УДК 512.734 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4
MSC 14C15, 14F42, 18E30, 19E15, 18E40, 14C30, 14F20, 18E35

Чжоу-весовые гомологии мотивных комплексов и их связь с мотивными гомологиями*

М. В. Бондарко, Д. З. Кумаллагов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Бондарко М. В., Кумаллагов Д. З.* Чжоу-весовые гомологии мотивных комплексов и их связь с мотивными гомологиями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 560–587. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.401

Работа посвящена изучению Чжоу-весовых гомологий мотивных комплексов Воеводского и их связи с мотивными гомологиями. Мы обобщаем полученные ранее результаты и доказываем, что если высшие группы мотивных гомологий мотива M равны нулю, то обнуляются также некоторые группы Чжоу-весовых гомологий M. Также мы получаем условия эффективности высших членов весового комплекса M и факторов весовой фильтрации Делиня его когомологий. Применяя эти результаты к мотивам с компактными носителями, мы получаем схожие соотношения между обнулением групп Чжоу и когомологиями с компактными носителями. Мы также доказываем, что если группы высших мотивных гомологий геометрического мотива или многообразия над универсальной областью (в некотором диапазоне) — группы кручения, то показатели этих групп ограничены. Для доказательства основных результатов мы изучаем слайсы мотивов. Поскольку функторы слайса не сохраняют компактность мотива, результаты предыдущей статьи о Чжоу-весовых гомологиях недостаточны для наших целей. Это заставило нас обобщить их на (w_{Chow}-ограниченные снизу) мотивные комплексы.

Ключевые слова: мотивы, триангулированные категории, группы Чжоу, весовые структуры, Чжоу-весовые гомологии, весовая фильтрация Делиня, когомологии с компактным носителем, эффективность.

1. Введение. Эта работа является дополнением к [1] (см. также несколько отличную версию этого текста в [2]). В этих статьях было предложено расширение хорошо известной теории разложения диагонали[1] на геометрические мотивы Воеводского и многообразия; главным инструментом были новые теории *Чжоу-весовых* гомологий. Основной целью этих статей было изучение многообразий, поэтому Чжоу-весовые гомологии были определены только на категории геометрических мотивов.

В нашей работе показано, что есть смысл изучать Чжоу-весовые гомологии объектов большей категории DM_R^{eff} R-линейных мотивных комплексов. Мы расширяем основные результаты [1] на класс $DM^{eff}_{R\, w_{\mathrm{Chow}}+}$ мотивов, ограниченных снизу относительно *весовой структуры Чжоу* на категории DM_R^{eff}; здесь R — кольцо

*Работа авторов над параграфом 3 данной статьи поддержана РНФ (грант № 16-11-10200). Параграфы 1 и 2 были написаны Д. З. Кумаллаговым; это исследование поддержано РФФИ (грант № 19-31-90074).

[1] Напомним, что этот термин был введен в статье [3]. Некоторые результаты этой теории можно найти в предложениях 0.4, 4.3.1 и 4.3.4, а также в замечаниях 0.5(1), 3.3.10(1) и 4.3.2(2) статьи [1].

коэффициентов. Это дает возможность обобщить следствие 3.4.2 статьи [1] и доказать, что из обнуления высших мотивных гомологий следуют схожие обнуления Чжоу-весовых гомологий, а также эффективность членов весового комплекса. Основное отличие от более ранних результатов в том, что мы можем рассматривать мотивные гомологии положительных размерностей (которые соответствуют алгебраическим циклам размерности $j > 0$) в теореме 3.2.3 ниже. Доказательство этой теоремы использует слайсы мотивов Воеводского. Таким образом, нам приходится рассматривать Чжоу-весовые гомологии и связанные с ними условия для не только геометрических объектов категории DM_R^{eff}.

Далее теорема 3.2.3 применяется для обобщения других результатов вышеупомянутых статей. Мы доказываем, что если группы высших мотивных гомологий геометрического мотива (в некоторой «области») над универсальной областью — группы кручения, то показатели этих групп ограничены. Теорема 3.2.3 также применяется к мотивам с компактными носителями многообразий (ср. теорему 4.2.3 ниже). Получаем, что если некоторые группы Чжоу многообразия X над универсальной областью K являются группами кручения, то их показатели ограничены. Рассуждая аналогично [1, теорема 4.2.1], мы также получаем, что из этих предположений следуют некоторые условия эффективности для когомологий X с компактным носителем; см. теорему 4.2.3 ниже.

Опишем содержание параграфов статьи. Дополнительные сведения о них можно найти в начале параграфов.

В § 2 мы напоминаем основные свойства приведенных весовых структур, категории мотивов Воеводского DM_R^{eff} и ее локализаций, а также весовых структур Чжоу на них.

В § 3 мы определяем Чжоу-весовые гомологии объектов DM_R^{eff} и обобщаем их свойства (изученные в [1]) на класс $DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$ Чжоу-ограниченных снизу объектов DM_R^{eff}. Это дает возможность доказать основную теорему 3.2.3, которая утверждает, что обнуление групп высших мотивных гомологий мотива $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$ (над полем функций над k) равносильно некоторым обнулениям Чжоу-весовых гомологий M. Это обнуление также эквивалентно некоторым условиям эффективности членов весового комплекса $t(M)$ (то есть его высшие члены должны быть «достаточно эффективными большими мотивами Чжоу»). Кроме того, приводится критерий в терминах замыканий относительно расширений и копроизведений.

В § 4 мы применяем теорему 3.2.3 вместе с результатами вышеупомянутых статей к геометрическим мотивам. Доказывается, что если высшие мотивные гомологии геометрического мотива над универсальной областью (в некотором «диапазоне») — группы кручения, то показатели этих групп и соответствующих групп Чжоу-весовых гомологий ограничены. Далее мы комбинируем результаты предыдущей статьи со свойствами мотивов с компактным носителем и доказываем теорему 4.2.3.

В § 5 доказываются некоторые свойства мотивов, необходимые как для этой статьи, так и для [1]. Вероятно, они общеизвестны, но авторы не смогли найти подходящих ссылок.

2. Предварительные сведения. Параграф 2.1 содержит ряд определений, преимущественно относящихся к (*приведенным*) триангулированным категориям.

В § 2.2 мы напоминаем основы теории (R-линейных) мотивов Воеводского над совершенным полем k.

В § 2.3 мы напоминаем основные определения и утверждения о весовых структурах.

В § 2.4 рассматриваются *чисто компактно порожденные* весовые структуры и индуцируемые ими весовые структуры на («чисто компактно порожденных») локализациях.

Параграф 2.5 содержит основы теорий *сильного весового комплекса*, *чистых* (гомологических) функторов и весовых спектральных последовательностей.

В § 2.6 мы применяем общую теорию к категории DM_R^{eff} и ее локализациям; это дает некоторые весовые структуры Чжоу, ядра которых «порождены» мотивами Чжоу.

2.1. Определения и обозначения.

- Если $a \le b \in \mathbb{Z}$, то будем обозначать через $[a, b]$ (соотв. $[a, +\infty)$, соотв. $[a, +\infty]$) множество $\{i \in \mathbb{Z} : \ a \le i \le b\}$ (соотв. $\{i \in \mathbb{Z} : \ i \ge a\}$, соотв. $[a, +\infty) \cup \{+\infty\} \subset \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$). Таким образом, когда мы пишем $i \ge c$ (где $c \in \mathbb{Z}$), мы всегда считаем i целым.

- Если C — категория и $X, Y \in \operatorname{Obj} C$, то через $C(X, Y)$ будем обозначать множество C-морфизмов из X в Y.

- Для пары категорий C', C мы пишем $C' \subset C$, если C' — полная подкатегория в C.

- Для данной категории C и $X, Y \in \operatorname{Obj} C$ будем называть X *ретрактом* Y, если id_X пропускается через Y.[2]

- Пусть $\underline{H}$ — подкатегория аддитивной категории C. Будем говорить, что $\underline{H}$ *Каруби-замкнута* в C, если она содержит все C-ретракты своих объектов. Кроме того, полная подкатегория $\operatorname{Kar}_C(\underline{H})$ аддитивной категории C, объекты которой — всевозможные C-ретракты объектов $\underline{H}$, будет называться *Каруби-замыканием* $\underline{H}$ в C.

Перейдем к менее распространенным определениям и соглашениям. Ниже $\underline{C}$ всегда будет обозначать некоторую триангулированную категорию; обычно она будет оснащена *весовой структурой* w (см. определение 2.3.1 ниже).

Определение 2.1.1. Пусть $\underline{B}$ — аддитивная категория.

1. Будем называть категорию $\frac{\underline{B}}{\underline{H}}$ *фактором* $\underline{B}$ по своей полной аддитивной подкатегории $\underline{H}$, если $\operatorname{Obj}(\frac{\underline{B}}{\underline{H}}) = \operatorname{Obj} \underline{B}$, а для любых $X, Y \in \operatorname{Obj} \underline{B}$ выполнено $(\frac{\underline{B}}{\underline{H}})(X, Y) = \underline{B}(X, Y)/(\sum_{Z \in \operatorname{Obj} \underline{H}} \underline{B}(Z, Y) \circ \underline{B}(X, Z))$.

2. Будем обозначать через $K(\underline{B})$ гомотопическую категорию (когомологических) комплексов над $\underline{B}$. Мы будем писать $M = (M^i)$, если M^i — члены комплекса M.

3. Для любых $A, B, C \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ будем говорить, что C — *расширение* B посредством A, если существует выделенный треугольник $A \to C \to B \to A[1]$.

---

[2]Конечно же, если C триангулированная или абелева категория, это равносильно тому, что X — прямое слагаемое Y.

4. Будем говорить, что класс $D \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ *замкнут относительно расширений*, если D содержит 0 и все расширения элементов из D посредством элементов D принадлежат D. Наименьший замкнутый относительно расширений подкласс объектов из $\underline{C}$, содержащий данный класс $B \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$, будем называть *замыканием B относительно расширений.*

5. Пусть D — некоторый класс объектов $\underline{C}$; будем обозначать через $\langle D \rangle$ или $\langle D \rangle_{\underline{C}}$ наименьшую полную Каруби-замкнутую триангулированную подкатегорию $\underline{C}$, содержащую D. Мы будем называть $\langle D \rangle$ триангулированной категорией, *плотно порожденной* классом D.

6. Для $X, Y \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ будем писать $X \perp Y$, если $\underline{C}(X, Y) = \{0\}$. Для $D, E \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ будем писать $D \perp E$, если $X \perp Y$ для любых $X \in D, Y \in E$.

   Для $D \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ будем обозначать через $D^{\perp}$ класс
   $$\{Y \in \operatorname{Obj} \underline{C} : \ X \perp Y \ \forall X \in D\}.$$
   Аналогично, ${}^{\perp}D$ — это класс $\{Y \in \operatorname{Obj} \underline{C} : \ Y \perp X \ \forall X \in D\}$.

7. Пусть $\underline{B}$ — подкатегория $\underline{C}$. Будем говорить, что подкатегория $\underline{B}$ *связная* (в $\underline{C}$), если $\operatorname{Obj} \underline{B} \perp (\cup_{i>0} \operatorname{Obj}(\underline{B}[i]))$.

8. Для $f \in \underline{C}(X, Y)$, где $X, Y \in \operatorname{Obj} \underline{C}$, будем называть третью вершину выделенного треугольника $X \xrightarrow{f} Y \to Z$ *конусом* f.[3]

Перечислим некоторые определения, относящиеся к приведенным триангулированным категориям.

Определение 2.1.2. Пусть $\mathcal{P}$ — класс объектов из $\underline{C}$ и категория $\underline{C}$ *приведена*, то есть замкнута относительно (малых) копроизведений.

1. Мы будем называть класс объектов или полную подкатегорию категории $\underline{C}$ *приведенными*, если они замкнуты относительно $\underline{C}$-копроизведений.

2. Мы будем называть полную подкатегорию $\underline{D} \subset \underline{C}$ *локализующей*, если она триангулирована и приведена. Соответственно, мы будем называть наименьшую локализующую подкатегорию $\underline{C}$, содержащую $\mathcal{P}$, *локализующей подкатегорией $\underline{C}$, порожденной $\mathcal{P}$*.

3. Если $\underline{H}$ — подкатегория $\underline{C}$, то мы будем называть полную подкатегорию $\underline{C}$, объекты которой являются ретрактами копроизведений объектов из $\underline{H}$ в $\underline{C}$ *копродуктивной оболочкой* $\underline{H}$ (в $\underline{C}$); мы будем обозначать ее через $\underline{H}^{\widehat{\oplus}}$.

4. Объект M из $\underline{C}$ называется *компактным*, если функтор $H^M = \underline{C}(M, -) : \underline{C} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ сохраняет копроизведения.

5. Будем говорить, что категория $\underline{C}$ *компактно порождена* $\mathcal{P}$, если $\mathcal{P}$ — существенно малый класс компактных объектов $\underline{C}$, который порождает $\underline{C}$ как свою локализующую подкатегорию.

[3]Напомним, что конус определен с точностью до неканонического изоморфизма.

2.2. О мотивных комплексах Воеводского и некоторых локализациях. Напомним некоторые свойства мотивных комплексов и введем обозначения.

Ниже k будет обозначать совершенное поле характеристики p, и мы полагаем $\mathbb{Z}[1/p] = \mathbb{Z}$, если $p = 0$. Множество гладких проективных многообразий над k будем обозначать через SmPrVar.

- Пусть R — фиксированная унитальная коммутативная и ассоциативная $\mathbb{Z}[1/p]$-алгебра. Рассмотрим R-линейные мотивные категории $DM^{eff}_{\mathrm{gm,R}} \subset DM^{eff}_R \subset DM_R$ (см. [4, § 3.1]). Категории DM^{eff}_R и DM_R приведены (см. определение 2.1.2), и вложение $DM^{eff}_R \to DM_R$ сохраняет копроизведения. Кроме того, DM^{eff}_R компактно порождена своей триангулированной подкатегорией $DM^{eff}_{\mathrm{gm,R}}$ эффективных геометрических мотивов.

- Существует функтор M_R (R-мотива) из категории гладких k-многообразий в $DM^{eff}_{\mathrm{gm,R}}$. M_R также можно продолжить на всю категорию k-многообразий (см. [1] и [5]); однако, этот расширенный функтор нам не очень нужен.

  Мы будем обозначать через R объект $M_R(\operatorname{Spec} k)$. Напомним, что категория $DM^{eff}_{\mathrm{gm,R}}$ плотно порождена (см. определение 2.1.1) R-линейными мотивами $M_R(\mathrm{SmPrVar})$ (см. определение 2.1.2); следовательно, множество $M_R(\mathrm{SmPrVar})$ также компактно порождает DM^{eff}_R.

- Будем обозначать через $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R$ Каруби-замыкание в DM^{eff}_R полной подкатегории, класс объектов которой равен $M_R(\mathrm{SmPrVar})$. $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R$ называется категорией R-линейных эффективных гомологических мотивов Чжоу; этот термин пояснен в замечании 1.3.2(4) статьи [4].

- Также введем следующие обозначения: через $R\langle 1\rangle$ обозначим R-линейный мотив Лефшеца ($R(1)[2]$ в обозначениях статьи [1]). Для $i \geq 0$ и $M \in \operatorname{Obj} DM^{eff}_R$ будем обозначать через $M\langle i\rangle$ объект $M \otimes_{DM^{eff}_R} (R\langle 1\rangle)^{\otimes i}$.

  Напомним, что функтор $-\langle i\rangle$ вполне строг на DM^{eff}_R. Кроме того, $-\langle 1\rangle$ продолжается до автоэквивалентности категории DM_R, и элементы соответствующих классов $M_R(\mathrm{SmVar})\langle i\rangle$ компактны для всех $i \in \mathbb{Z}$.

- Заметим, что для любого $i \geq 0$ мотив $R\langle i\rangle$ — ретракт $M_R((\mathbb{P}^1)^i)$; следовательно, $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R\langle i\rangle \subset \underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R$.

Нам также понадобятся следующие определения, связанные с мотивами.

Определение 2.2.1. Пусть K — расширение k, а M — объект DM^{eff}_R.

1. Будем обозначать через K^{perf} совершенное замыкание поля K.

2. Мы будем обозначать через M_K результат применения к M функтора замены основного поля $DM^{eff}_R \to DM^{eff}_R(K^{perf})$; см. § 5 ниже.

3. Для $l, j \in \mathbb{Z}$ определим $\mathfrak{Chow}_j(M_K, R, l)$ (соотв. $\mathfrak{Chow}_j(M_K, R)$) как группу $DM_R(K^{perf})(R\langle j\rangle[l], M_K)$ (соотв. $DM_R(K^{perf})(R\langle j\rangle, M_L)$).[4]

4. Для $i \geq -1$ мы будем обозначать через DM^i_R локализацию Вердье $DM^{eff}_R/DM^{eff}_R\langle i+1\rangle$. l^i будет обозначать соответствующий функтор локализации, и $M^i_R = l^i \circ M_R$.

[4]В [1] группа $DM_R(K^{perf})(R\langle j\rangle[l], M_L)$ обозначается как $h_{2j+l,j}(M_K, R)$.

Предложение 2.2.2. *Пусть* $j, l \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$ *и* $j - r + l < 0$. *Тогда* $\mathfrak{Chow}_j(N_K\langle r\rangle, R, l) = \{0\}$ *для любого* $N \in \operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ *и любого расширения* K/k.

Доказательство. Это утверждение легко следует из известных свойств комплексов циклов Блоха — Суслина и предложения 5.1(1) ниже; см. предложение 2.3.3(2) статьи [1]. □

2.3. Весовые структуры: основные определения и утверждения. Напомним важнейшее для этой статьи определение.

Определение 2.3.1. I. Будем говорить, что пара подклассов $\underline{C}_{w\leq 0}, \underline{C}_{w\geq 0} \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$ задает весовую структуру w на триангулированной категории $\underline{C}$, если выполнены следующие условия.

(i) $\underline{C}_{w\geq 0}, \underline{C}_{w\leq 0}$ Каруби-замкнуты в $\underline{C}$ (то есть содержат все $\underline{C}$-ретракты своих объектов).

(ii) Полуинвариантность относительно сдвигов:
$\underline{C}_{w\leq 0} \subset \underline{C}_{w\leq 0}[1]$ и $\underline{C}_{w\geq 0}[1] \subset \underline{C}_{w\geq 0}$.

(iii) Ортогональность:
$\underline{C}_{w\leq 0} \perp \underline{C}_{w\geq 0}[1]$.

(iv) Весовые разложения:
для любого $M \in \operatorname{Obj}\underline{C}$ существует выделенный треугольник

$$X \to M \to Y \to X[1]$$

такой, что $X \in \underline{C}_{w\leq 0}$, $Y \in \underline{C}_{w\geq 0}[1]$.

Также нам потребуются следующие определения, связанные с триангулированными категориями и весовыми структурами.

Определение 2.3.2. Пусть $i, j \in \mathbb{Z}$; предположим, что триангулированная категория $\underline{C}$ снабжена весовой структурой w.

1. Полная подкатегория $\underline{Hw} \subset \underline{C}$ с объектами $\underline{C}_{w=0} = \underline{C}_{w\geq 0} \cap \underline{C}_{w\leq 0}$ называется *ядром* весовой структуры w.

2. $\underline{C}_{w\geq i}$ (соотв. $\underline{C}_{w\leq i}$, соотв. $\underline{C}_{w=i}$) будет обозначать $\underline{C}_{w\geq 0}[i]$ (соотв. $\underline{C}_{w\leq 0}[i]$, соотв. $\underline{C}_{w=0}[i]$).

3. $\underline{C}_{[i,j]}$ обозначает $\underline{C}_{w\geq i} \cap \underline{C}_{w\leq j}$; в частности, данный класс равен $\{0\}$, если $i > j$.

4. Будем называть $\underline{C}_{w+} = \cup_{i\in\mathbb{Z}}\underline{C}_{w\geq i}$ классом w-ограниченных снизу объектов $\underline{C}$.

5. Будем называть весовую структуру w *приведенной*, если категория $\underline{C}$ и класс $\underline{C}_{w\geq 0}$ приведены (см. определение 2.1.2(1) и предложение 2.3.4(1) ниже).

6. Пусть $\underline{C}'$ триангулированная категория с весовой структурой w', а $F : \underline{C} \to \underline{C}'$ — точный функтор. F называется *весо-точным* (относительно w, w'), если он отображает $\underline{C}_{w\leq 0}$ в $\underline{C}'_{w'\leq 0}$ и $\underline{C}_{w\geq 0}$ в $\underline{C}'_{w'\geq 0}$.

7. Пусть $\underline{D}$ — полная триангулированная подкатегория $\underline{C}$. Будем говорить, что w *ограничивается* на $\underline{D}$, если пара $(\underline{C}_{w\leq 0} \cap \operatorname{Obj}\underline{D},\ \underline{C}_{w\geq 0} \cap \operatorname{Obj}\underline{D})$ задает весовую структуру на $\underline{D}$.

8. Будем говорить, что объект M весо-вырожден слева (соотв. справа), если M принадлежит $\cap_{i\in\mathbb{Z}}\underline{C}_{w\geq i}$ (соотв. $\cap_{i\in\mathbb{Z}}\underline{C}_{w\leq i}$).
   Соответственно, w невырождена слева (соотв. справа), если все вырожденные слева (соотв. справа) объекты $\underline{C}$ нулевые.

Замечание 2.3.3. 1. Простой, но важный пример весовой структуры связан с «глупой» фильтрацией на категории $K^b(\underline{B})$ (или $K(\underline{B})$) для произвольной аддитивной $\underline{B}$.

Возьмем в качестве $K^b(\underline{B})_{w\leq 0}$ (соотв. $K^b(\underline{B})_{w\geq 0}$) класс комплексов, гомотопически эквивалентных комплексам, сконцентрированным в степенях ≥ 0 (соотв. ≤ 0); см. [6, замечание 1.2.3(1)]. Это дает весовую структуру, которую мы будем обозначать через w^{st}.

Ядро w^{st} — Каруби-замыкание $\underline{B}$ в $K^b(\underline{B})$ (или в $K(\underline{B})$ соответственно).

2. Весовое разложение объекта $M\in\operatorname{Obj}\underline{C}$ почти никогда не является каноническим.

Однако для любого $m\in\mathbb{Z}$ аксиома (iv) дает выделенный треугольник

$$w_{\leq m}M\to M\to w_{\geq m+1}M \tag{2.3.1}$$

с $w_{\geq m+1}M\in\underline{C}_{w\geq m+1}$ и $w_{\leq m}M\in\underline{C}_{w\leq m}$; будем называть его *$m$-весовым разложением* для M.

Мы будем использовать данные обозначения ниже (несмотря на то, что $w_{\geq m+1}M$ и $w_{\leq m}M$ не определены однозначно). Мы будем называть произвольные варианты $w_{\geq m+1}M$ или $w_{\leq m}M$ (для любого $m\in\mathbb{Z}$) *весовыми срезками* M. Кроме того, когда мы будем упоминать морфизмы $w_{\leq m}M\to M$ или $M\to w_{\geq m+1}M$, мы всегда будем считать, что он продолжается до некоторого m-весового разложения M.

3. В данной статье мы используем «гомологическую» конвенцию для весовых структур; ранее она использовалась в [7] и ряде последних статей авторов, в то время как в [8] использовалась «когомологическая» конвенция. Разница между ними — в смене «ролей» $\underline{C}_{w\leq 0}$ и $\underline{C}_{w\geq 0}$, т. е. $\underline{C}^{w\leq 0}=\underline{C}_{w\geq 0}$ и $\underline{C}^{w\geq 0}=\underline{C}_{w\leq 0}$. Напомним также, что Д. Паукзтелло ввел понятие весовых структур независимо в [9]; они были названы им ко-t-структурами.

Предложение 2.3.4. *Пусть $\underline{C}$ — триангулированная категория, w — весовая структура на $\underline{C}$, а $n\geq 0$.*

1. *Тогда класс $\underline{C}_{w\leq 0}$ замкнут относительно всех копроизведений, существующих в $\underline{C}$.*
2. *$\underline{C}_{w\geq 0}=(\underline{C}_{w\leq -1})^{\perp}$ и $\underline{C}_{w\leq 0}={}^{\perp}(\underline{C}_{w\geq 1})$.*
3. *Если M принадлежит $\underline{C}_{w\geq -n}$, то $w_{\leq 0}M$ принадлежит $\underline{C}_{[-n,0]}$.*
4. *Пусть $\underline{D}\subset\underline{C}$ — такая триангулированная подкатегория $\underline{C}$, что w ограничивается до весовой структуры $w_{\underline{D}}$ на $\underline{D}$. Пусть $M\in\underline{C}_{w\geq 0}$, $N\in\underline{C}_{w=0}$, и предположим, что морфизм $f\in\underline{C}(N,M)$ равен 0 в локализации $\underline{C}/\underline{D}$.*
   Тогда f пропускается через некоторый объект категории $\underline{Hw}_{\underline{D}}$.

Доказательство. Утверждения 2 и 3 были доказаны в [8] (обратите внимание на замечание 2.3.3(3)). Утверждение 4 приведено в следствии 1.4.6(2) статьи [1]. □

2.4. Некоторые утверждения о существовании весовых структур.

Предложение 2.4.1. *Пусть $\underline{B}$ — связная аддитивная подкатегория приведенной (триангулированной) категории $\underline{C}$ и объекты $\underline{B}$ компактны в $\underline{C}$.*

Тогда существует такая весовая структура w на $\underline{C}$, что $\underline{C}_{w\le 0}$ (соотв. $\underline{C}_{w\ge 0}$) — наименьший подкласс в $\operatorname{Obj}\underline{C}$, который замкнут относительно копроизведений, расширений и содержит $\operatorname{Obj}\underline{B}[i]$ для $i\le 0$ (соотв. для $i\ge 0$). Кроме того, $\underline{Hw}=\underline{B}^{\widehat{\oplus}}$ (см. определение 2.1.2(3)). В таком случае мы будем говорить, что w чисто компактно порождена подкатегорией $\underline{B}$.

Далее, если объекты $\underline{B}$ компактно порождают $\underline{C}$ как свою локализующую подкатегорию, то w невырождена слева.

Доказательство. Данные утверждения легко следуют из следствия 2.3.1 и леммы 2.3.3 статьи [10]; ср. теорему 3.2.2(2, 3) из [11]. □

Предложение 2.4.2. *Предположим, что $\underline{C}, w, \underline{B}$ удовлетворяют условиям предыдущего предложения; кроме того, $\underline{B}$ существенно мала и порождает $\underline{C}$ как собственную локализующую подкатегорию, и $\underline{H}$ — аддитивная подкатегория $\underline{B}$. Обозначим через $\underline{D}$ локализующую подкатегорию $\underline{C}$, порожденную $\underline{H}$.*

Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Локализация Вердье $\underline{C}/\underline{D}$ существует; функтор локализации $\pi:\underline{C}\to\underline{C}/\underline{D}$ сохраняет копроизведения и компактные объекты. Кроме того, категория $\underline{C}/\underline{D}$ порождена $\pi(\operatorname{Obj}\underline{B})$ как своя собственная локализующая подкатегория, и соответствующий точный функтор $\langle\underline{B}\rangle_{\underline{C}}/\langle\underline{H}\rangle_{\underline{C}}\to\underline{C}/\underline{D}$ (где $\langle\underline{B}\rangle_{\underline{C}}/\langle\underline{H}\rangle_{\underline{C}}$ — локализация Вердье соответствующих локально малых категорий) — полное вложение.

2. $\underline{C}/\underline{D}$ оснащен такой весовой структурой $w_{\underline{C}/\underline{D}}$, что функтор π весо-точен. К тому же, $w_{\underline{C}/\underline{D}}$ чисто компактно порождена своей полной подкатегорией, соответствующей $\underline{B}$ (в смысле предложения 2.4.1), а соответствующий функтор $\underline{Hw}\to\underline{Hw}_{\underline{C}/\underline{D}}$ раскладывается как композиция $\underline{Hw}\to\underline{Hw}/\underline{H}^{\widehat{\oplus}}$ (см. определение 2.1.1(1)) и полного вложения.

Доказательство. Все эти утверждения доказаны в [12] (см. предложение 4.3.1.3(III) и теорему 4.3.1.4 этой статьи). □

2.5. О весовых комплексах, чистых функторах и весовых спектральных последовательностях. Напомним понятие так называемого функтора «сильного» *весового комплекса*. Заметим, что эта версия теории менее общая, чем «слабая» версия, используемая в статье [1]. Последняя достаточна для наших целей (и в некотором смысле более удобна), но требует нескольких нестандартных определений.

Предложение 2.5.1. *Предположим, что $\underline{C}$ обладает ∞-оснащением (см. соответствующие ссылки в параграфе 1.1 статьи* [13]*) и удовлетворяет условиям предложения 2.4.1. Тогда существует точный функтор $t^{st}:\underline{C}\to K(\underline{Hw})$, $M\mapsto(M^i)$, для которого выполнено следующее.*

1. *Композиция вложения $\underline{Hw}\to\underline{C}$ с t^{st} изоморфна очевидному вложению $\underline{Hw}\to K(\underline{Hw})$.*

2. *Пусть* $\underline{C}'$ *— триангулированная категория, обладающая* ∞*-оснащением и чисто компактно порожденной весовой структурой* w'*; пусть* $F : \underline{C} \to \underline{C}'$ *— весо-точный функтор, поднимающийся на* ∞*-оснащение. Тогда композиция* $t'^{st} \circ F$ *изоморфна* $K(\underline{HF}) \circ t^{st}$*, где* t'^{st} *— функтор весового комплекса, соответствующий* w'*, а функтор* $K(\underline{HF}) : K(\underline{Hw}) \to K(\underline{Hw}')$ *— очевидная* $K(-)$*-версия ограничения* $\underline{HF} : \underline{Hw} \to \underline{Hw}'$ *функтора* F*.*

3. *Пусть* $i \in \mathbb{Z}$*; зафиксируем весовую срезку* $w_{\le i}N$ *объекта* $N \in \operatorname{Obj}\underline{C}$ *(см. замечание 2.3.3(2)). Тогда существует единственные морфизмы* $j_i : w_{\le i}N \to w_{\le i+1}N$ *(для* $i \in \mathbb{Z}$*), делающие треугольники* $w_{\le i}N \to w_{\le i+1}N \to N$ *коммутативными. К тому же, объекты* $\tilde{N}^{-1-i} = \operatorname{Cone}(j_i)[-1-i]$ *принадлежат* $\underline{C}_{w=0}$*, и существует комплекс* $\tilde{t}(N)$*, члены которого —* $\tilde{N}^i$ *(в соответствующих степенях), и* $\tilde{t}(N) \cong t^{st}(N)$ *(в категории* $K(\underline{Hw})$*).*

   Далее, если $l \le m \in \mathbb{Z}$ *и* $w_{\le l}N = 0$*, то объект* $w_{\le m}N$ *принадлежит замыканию относительно расширений множества* $\{\tilde{N}^j[-j],\ -m \le j \le -l\}$*.*

4. *Если* $M \in \underline{C}_{w\le n}$ *(соотв.* $M \in \underline{C}_{w\ge n}$*), то комплекс* $t^{st}(M)$ *принадлежит классу* $K(\underline{Hw})_{w_{st}\le n}$ *(соотв.* $K(\underline{Hw})_{w_{st}\ge n}$*).*

5. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— аддитивный ковариантный функтор из* $\underline{Hw}$ *в абелеву категорию* $\underline{A}$*. Тогда функтор* $H^{\mathcal{A}}$*, переводящий* $M \in \operatorname{Obj}\underline{C}$ *в нулевые гомологии комплекса* $\mathcal{A}(M^i)$*, гомологический. Кроме того, если* $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \circ \underline{HF}$ *для некоторого аддитивного функтора* $\mathcal{A}' : \underline{Hw}' \to \underline{A}$ *(в условиях пункта 2), то* $H^{\mathcal{A}} = H^{\mathcal{A}'} \circ F$*.*

6. *Если* $\underline{A}$ *— AB4 абелева категория, то описанный выше функтор* $H^{\mathcal{A}}$ *— единственный с точностью до изоморфизма гомологический функтор, который сохраняет копроизведения, и ограничение которого на категорию* $\underline{B}$ *(см. предложение 2.4.1) равно* $\mathcal{A}$*, а ограничения на* $\underline{B}[i]$ *для* $i \ne 0$ *равны* 0*.*

Доказательство. Пункты 1 и 2 легко следуют из замечания 3.6 статьи [13], а первое утверждение пункта 5 очевидно.

Далее, напомним, что функтор t^{st} «совместим» со *слабым* функтором весового комплекса как в [11]; см. замечание 2.5.2(2) ниже. Следовательно, применяя предложение 1.3.4(4, 6) и лемму 1.3.2(3) упомянутой статьи, получаем пункт 3.

Аналогично, пункт 4 следует из предложения 1.3.4(10) той же статьи, а второе утверждение пункта 5 — из предложения 1.3.4(12) (см. также теорему 2.1.2 там же). Дальше, пункт 6 следует из предложения 2.3.2(6) той же статьи; тут достаточно заметить, что функторы $\underline{Hw} \to \underline{A}$, сохраняющие малые копроизведения, взаимно однозначно соответствуют аддитивным функторам $\underline{B} \to \underline{A}$ (поскольку $\underline{Hw} = \underline{B}^{\widehat{\oplus}}$). □

Замечание 2.5.2. 1. Термин «весовой комплекс» был впервые использован в статье [14]. Однако область определения функтора весового комплекса, рассмотренного в этой статье, была не триангулирована.

2. В предложении 1.3.4 статьи [11] некоторый (канонический) функтор весового комплекса определялся как функтор из категории, канонически эквивалентной $\underline{C}$, в «слабую» категорию $K_{\mathfrak{w}}(\underline{Hw})$. Наше доказательство выше основано на двух соображениях.

Во-первых, существует канонический аддитивный функтор $K(\underline{Hw}) \to K_{\mathfrak{w}}(\underline{Hw})$, и функтор слабого весового комплекса пропускается через него; см замечания 1.3.5(3) и 3.6 статьи [13].

Во-вторых, функторы типа $H^{\mathcal{A}}$ из части 5 нашего предложения (названные *w-чистыми* в [11]; эта терминология пояснена в замечании 2.1.3(3) там же) пропускаются через функтор слабого весового комплекса; см. теорему 2.1.2 статьи [11]. Кроме того, свойства чистых функторов не зависят от какого-либо оснащения (как в предложении). В частности, легко видеть, что существование ∞-подъемов для F необязательно для второй части предложения 2.5.1(5).

С другой стороны, вероятно, возможно доказать некоторые рассмотренные выше утверждения с помощью аргументов, аналогичных тем, которые упомянуты в замечании 3.6 из [13].

Предложение 2.5.3. *Пусть выполнены условия предложения 2.5.1, и H — гомологический функтор $\underline{C} \to \underline{A}$. Тогда для любого $M \in \operatorname{Obj}\underline{C}$ существует спектральная последовательность $T = T_w(H, M)$ с $E_2^{pq}(T) = H_{-p}^{G_{-q}}(M)$, где G_{-q} — ограничение функтора $H_{-q} = H \circ [q]$ на $\underline{Hw}$ (и соотв. $H_{-p}^{G_{-q}} = H^{G_{-q}} \circ [p]$); также см. предложение 2.5.1(5).*

Кроме того, $T_w(H, M)$ функториальна по M и функториальна по H по отношению к композиции H с точными функторами между абелевыми категориями. $T_w(H, M)$ сходится к $H_{-p-q}(M)$, если M ограничен снизу и H обнуляет $\underline{C}_{w \geq i}$ для достаточно больших i.

Доказательство. Все утверждения легко следуют из теоремы 2.3.2 статьи [8] вместе с предложением 2.5.1(5); см. также замечание 2.5.2(2). □

2.6. Весовые структуры Чжоу на наших категориях. Используя полученные выше результаты, построим и изучим весовые структуры Чжоу на DM_R^{eff} и DM_R^r.

Предложение 2.6.1. *Пусть $r \geq -1$ и $M \in \operatorname{Obj} DM_R^{eff}$.*

1. *Тогда категории DM_R^{eff} и DM_R^r допускают ∞-оснащения.*

2. *Существует невырожденная слева весовая структура w_{Chow} на DM_R^{eff}, которая чисто компактно порождена с помощью $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ в смысле предложения 2.4.1. Таким образом, $DM_{R,w_{Chow}\leq 0}^{eff}$ (соотв. $DM_{R,w_{Chow}\geq 0}^{eff}$) — наименьший подкласс $\operatorname{Obj}\underline{C}$, замкнутый относительно копроизведений, расширений и содержащий $\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$ при $i \leq 0$ (соотв. при $i \geq 0$).*

   Соответственно, $\underline{Hw}_{\mathrm{Chow}} = \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff\,\widehat{\oplus}}$.

3. *Функтор $-\langle r+1\rangle : DM_R^{eff} \to DM_R^{eff}$ весо-точен по отношению к w_{Chow}.*

   Кроме того, этот функтор «строго» весо-точен, т. е. если $M\langle r+1\rangle$ принадлежит $DM_{R,w_{Chow}\leq 0}^{eff}$ (соотв. $DM_{R,w_{Chow}\geq 0}^{eff}$), то $M \in DM_{R,w_{Chow}\leq 0}^{eff}$ (соотв. $M \in DM_{R,w_{Chow}\geq 0}^{eff}$).

4. *Пусть для некоторого $i \in \mathbb{Z}$ существуют варианты $w_{Chow\leq -i}M$ и $w_{Chow\leq -i-1}M$, принадлежащие $\operatorname{Obj} DM_R^{eff}\langle r+1\rangle$. Тогда соответствующий*

объект $\tilde{M}^i = Cone(j_{-i-1})$, упомянутый в предложении 2.5.1(3), принадлежит $DM_R^{eff}{}_{w_{Chow}=0}\langle r+1\rangle$.

5. *Локализация DM_R^{eff} по подкатегории $DM_R^{eff}\langle r+1\rangle$ удовлетворяет условиям предложения 2.4.2, если мы положим $\underline{H} = \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle r+1\rangle$. Следовательно, существует такая чисто компактно порожденная весовая структура w_{Chow}^r на DM_R^r, что функтор локализации $l^r : DM_R^{eff} \to DM_R^r$ (см. определение 2.2.1(4)) весо-точен. Кроме того, l^r сохраняет копроизведения и компактность объектов.*

   Далее, если $-1 \le s \le r$, то очевидный функтор локализации $l_r^s : DM_R^r \to DM_R^s$ также весо-точен и сохраняет компактность и копроизведения.

6. *Если K — расширение поля k, то функтор замены основного поля $-_K : DM_R^{eff} \to DM_R^{eff}(K^{perf})$ (см. определение 2.2.1(2) и предложение 5.1 ниже) весо-точен и сохраняет копроизведения.*

7. *Если R не имеет кручения, k — поле бесконечной степени трансцендентности над своим простым подполем, то весовая структура w_{Chow} вырождена справа.*

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Далее, подкатегория $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ компактно порождает DM_R^{eff}. Следовательно, для доказательства утверждения 2 достаточно напомнить, что $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ связна в DM_R^{eff} (см. следствие 6.7.3 статьи [15]), и применить предложение 2.4.1.

Теперь напомним, что функтор $-\langle r+1\rangle$ сохраняет копроизведения и переводит $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ в себя.

Используя явное описание w_{Chow}, мы получаем, что $-\langle r+1\rangle$ весо-точен. Кроме того, если $M\langle r+1\rangle \in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\le 0}$ (соотв. $M\langle r+1\rangle \in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\ge 0}$), то из этой весо-точности получаем, что $M\langle r+1\rangle \perp DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\ge 1}\langle r+1\rangle$ (соотв. $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\le -1}\langle r+1\rangle \perp M$). Применяя предложение 2.3.4(2) и теорему сокращения (которая утверждает, что функтор $-\langle r+1\rangle$ вполне строг), получаем требуемое.

4. Согласно предложению 2.5.1(3) мотив $\tilde{M}^i$ принадлежит $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}=0}$. Поскольку $\tilde{M}^i$ также принадлежит $\mathrm{Obj}\, DM_R^{eff}\langle r+1\rangle$, предыдущее утверждение дает $\tilde{M}^i = N\langle r+1\rangle$, где N принадлежит $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\le 0} \cap DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\ge 0} = DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}=0}$.

Поскольку $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle r\rangle \subset \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$, мы также получаем, что первая часть пункта 5 следует из предложения 2.4.2. Далее, чтобы получить вторую часть утверждения, применим предложение 2.4.2 для категорий $\underline{B}$ и $\underline{H}$, чьи объекты суть $M_R^r(\mathrm{SmPrVar})$ и $l^r(M_R(\mathrm{SmPrVar})\langle s+1\rangle)$ соответственно.

6. Напомним, что для соответствующего морфизма $f : \mathrm{Spec}\, K^{perf} \to \mathrm{Spec}\, k$ функтор $-_K$ можно определить как ограничение на DM_R^{eff} функтора $f^* : DM_R \to DM_R(K^{perf})$; см. предложение 5.1(1) ниже.

Далее, функтор f^* сохраняет копроизведения, так как он сопряжен слева к некоторому функтору f_*, см. теорему 3.1 статьи [16], а также определения 1.1.12 и 1.4.2 книги [17]. Следовательно, функтор $-_K$ также сохраняет копроизведения.

Далее, f^* переводит (эффективные) мотивы Чжоу над k в мотивы Чжоу над K^{perf} (см. предложение 5.1(1) ниже), а значит, снова применяя явное описание w_{Chow}, мы получаем, что функтор $-_K$ весо-точен.

Наконец, утверждение 7 — это предложение 3.2.6 статьи [11]. □

3. Чжоу-весовые гомологии и их связь с мотивными гомологиями. В § 3.1 мы определяем и исследуем функторы Чжоу-весовых гомологий $DM_R^{eff} \to \underline{\mathrm{Ab}}$; мы обобщаем соответствующие утверждения из [1, § 3.1].

В § 3.2 мы обобщаем (полученные ранее) критерии обнуления Чжоу-весовых гомологий с категории $DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}$ на $DM_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}^{eff}$.

В § 2.2 мы доказываем нашу основную теорему 3.2.3, связывающую обнуление мотивных гомологий в лестничной области с некоторыми условиями обнуления Чжоу-весовых гомологий. В доказательстве мы используем *слайсы.*

3.1. Чжоу-весовые гомологии мотивов: основные свойства.

Определение 3.1.1. 1. Пусть $i, l, j \in \mathbb{Z}$; K — расширение поля k.

Тогда мы будем обозначать через $\mathrm{CWH}_j^i(-_K, R, l)$ функтор $H^{\mathcal{A}} \circ [i]$, соответствующий весовой структуре w_{Chow} (см. предложение 2.6.1(2)) согласно предложению 2.5.1(5), где $\mathcal{A}$ — ограничение функтора $N \mapsto \mathfrak{Chow}_j(N_K, R, l)$ (см. определение 2.2.1(3)) на $\underline{Hw}_{\mathrm{Chow}}$. Иногда будем опускать R в этом обозначении. Кроме того, мы обычно будем писать $\mathrm{CWH}_j^i(M_K, R)$ вместо $\mathrm{CWH}_j^i(M_K, R, 0)$.

2. Мы будем использовать обозначение $DM_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}^{eff}$ для класса w_{Chow}-ограниченных снизу мотивов (см. определение 2.3.2(4)).[5]

3. Нам потребуются следующие соглашения (ср. § 2.2): функтор $l^{+\infty} = l_{+\infty}^{+\infty}$ — тождественный функтор на категории DM_R^{eff}, $l_{+\infty}^j = l^j$, $w_{\mathrm{Chow}}^{+\infty} = w_{\mathrm{Chow}}$, $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle +\infty \rangle = DM_R^{eff}\langle +\infty \rangle = \{0\}$ и т. д.

4. Мы будем обозначать через t_{hom}^R R-линейную версию гомотопической t-структуры Воеводского; см. [15, § 4.4] или пример 2.3.13 статьи [18].

Докажем некоторые свойства этих функторов.

Предложение 3.1.2. *Пусть i, l, j, K такие же, как в предыдущем определении, и $r \in [0, +\infty]$.*

1. Тогда $\mathrm{CWH}_j^i(-_K, R, l)$ — гомологический функтор на DM_R^{eff}, сохраняющий копроизведения. Кроме того, этот функтор пропускается через функтор замены базы $DM_R^{eff} \to DM_R^{eff}(K^{perf})$.

2. Пусть $r \geq j + l$. Тогда функтор $\mathrm{CWH}_j^0(-_K, R, l)$ обнуляет $DM_R^{eff}\langle r+1 \rangle$; таким образом, он индуцирует корректно определенный функтор $DM_R^r \to \underline{\mathrm{Ab}}$ (см. определение 2.2.1(4)). Кроме того, этот функтор чист по отношению к весовой структуре w_{Chow}^r (см. предложение 2.6.1(5)).

3. Для любого гладкого связного проективного многообразия P/k функторы $DM_R^j(l^j(M_R(P)\langle j \rangle), -)$ и $\mathrm{CWH}_j^0(-_{k(P)}, R)$ канонически изоморфны; заметим, что последний функтор корректно определен согласно предыдущему пункту.

4. Пусть N принадлежит $DM_{R w_{Chow}^r \geq -n}^r$. Тогда $\mathrm{CWH}_j^i(N_K, l) = \{0\}$, если или $i > n$ и $j \leq r - l$, или $l < 0$.

5. Кроме того, если $m \in [0, r]$, то следующие условия на $N \in DM_{R w_{Chow}^r \geq -n}^r$ равносильны:

(a) $\mathrm{CWH}_j^i(N_K) = \{0\}$ для любого $0 \leq j \leq m$ и любого поля функций K/k;

(b) объект $N_m = l_r^m(N)$ принадлежит $DM_{R\ w_{Chow}^m \geq 1-n}^m$;

(c) существует срезка $w_{Chow \leq -n}^r N$, принадлежащая $l^r(\mathrm{Obj}\, DM_R\langle m+1 \rangle)$.

[5] Легко видеть, что этот класс дает (полную) триангулированную подкатегорию $DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}$, но нам этот факт не понадобится.

6. Класс $DM_R^{eff,t_{hom}^R\le 0}$ (см. определение 3.1.1(4)) равен наименьшему подклассу $\operatorname{Obj} DM_R^{eff}$*, который замкнут относительно расширений, копроизведений и содержит* $\operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}(a)[a+b]$ *для любых $a, b \ge 0$. Кроме того, если $i > j+l$, то функтор* $\mathrm{CWH}_j^i(N_K, l) = \{0\}$ *обнуляет этот класс.*

Доказательство. 1. Все эти утверждения легко следуют из предложений 2.5.1(5, 6) и 2.6.1(6); достаточно лишь заметить, что функтор $\mathfrak{Chow}_j(-_K, R, l)$ сохраняет копроизведения, так как объект $R\langle j\rangle_{K^{perf}}$ категории $DM_R(K^{perf})$ компактен (см. § 2.2).

2. Для доказательства первого утверждения этого пункта мы должны проверить, что $\mathrm{CWH}_j^0(-_K, R, l) \circ \langle r+1\rangle = 0$. Напомним, что функтор $-\langle r+1\rangle : DM_R^{eff} \to DM_R^{eff}$ весо-точен относительно w_{Chow} по предложению 2.6.1(3); следовательно, предложение 2.5.1(5, 6) сводит утверждение к обнулению ограничения $\mathfrak{Chow}_j(M_K^s, R, l)$ на $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle r+1\rangle$. Остается применить предложение 2.2.2.

Для доказательства второго утверждения применим предложение 2.5.1(6) еще раз. Поскольку функтор $DM_R^{eff} \to \underline{\mathrm{Ab}}$, индуцированный $\mathrm{CWH}_j^0(-_K, R, l)$, сохраняет копроизведения, достаточно заметить, что его ограничение на $M_R^r(\mathrm{SmPrVar})[s]$ для $s \ne 0$ зануляется, поскольку функтор $\mathrm{CWH}_j^0(-_K, R, l)$ чист относительно w_{Chow}; здесь мы применяем вышеупомянутые свойства функторов замены базы и мотивных гомологий.

3. Поскольку объект $l^j(M_R(P)\langle j\rangle)$ компактен в DM_R^j (см. предложение 2.4.2(1)), оба указанных функтора сохраняют копроизведения. Кроме того, они гомологичны, и функтор $\mathrm{CWH}_j^0(-_{k(P)}, R)$ чист по определению. Следовательно, для получения требуемого изоморфизма достаточно сравнить их ограничения на категории $l^j(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff})[i] \subset \operatorname{Obj} DM_R^j$ при $i \in \mathbb{Z}$. Далее, напомним, что локализация $DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}/DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}\langle j+1\rangle$ вкладывается в DM_R^j по предложению 2.4.2(1). Следовательно, искомое утверждение легко следует из предложения 2.2.6(6) статьи [1].

4. Конечно же, мы можем считать n равным 0.

По предложению 2.5.1(4) соответствующий весовой комплекс $t^{st}(N)$ гомотопически эквивалентен комплексу, сконцентрированному в неположительных степенях. Теперь вспомним, что функтор CWH_j^0 чист относительно w^r_{Chow} (см. определение 3.1.1(1) и пункт 2 этого предложения). Применив связь чистых функторов с весовыми комплексами, получаем, что $\mathrm{CWH}_j^i(N_K, l) = \{0\}$ для любого $i > 0$ (и соответствующих значений j).

Наконец, $\mathrm{CWH}_j^i(N_K, l) = \{0\}$, если $l < 0$, поскольку соответствующее ограничение $\mathcal{A}$ функтора $N \mapsto \mathfrak{Chow}_j(N_K, R, l)$ на $\underline{Hw}_{\mathrm{Chow}}$ равно нулю ввиду связности категории $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}(K^{perf})$.

5. Если $j < m$, то функтор $\mathrm{CWH}_j^i(-_K) = \{0\}$ пропускается через l_m^r по пункту 2; следовательно, пункт 4 дает (b) $\implies$ (a). Далее, условие (c) очевидно следует из условия (b), если $r = +\infty$, и следует из (b), если $r \in \mathbb{Z}$ согласно теореме 3.3.1 из [19] (см. замечание 3.3.2(1) в этой статье). К тому же напомним, что функтор l_r^m весо-точен по предложению 2.6.1(5); следовательно, условие (b) следует из (c).

Осталось проверить, что (b) следует из (a). Снова предположим, что $n = 0$.

Сперва положим $m < +\infty$. Тогда, разумеется, достаточно проверить следующее: из (a) следует, что если $-1 \le s < m$ и $l_r^s(N) \in DM^s_{R w^s_{Chow}\ge 1}$, то объект N_{s+1} принадлежит $DM_R^{s+1}{}_{w^{s+1}_{Chow}\ge 1}$.

Выберем весовое разложение $w_{Chow\le 0}^{s+1}N_{s+1} \stackrel{g_{s+1}}{\to} N_{s+1} \to w_{Chow\ge 1}^{s+1}N_{s+1}$ объекта N_{s+1} и применим локализацию $l_{s+1}^s : DM_R^{s+1} \to DM_R^s$. Поскольку функтор l_{s+1}^s весоточен, $l_{s+1}^s(w_{Chow\le 0}^{s+1}N_{s+1}) \in DM_R^s{}_{w_{Chow}^s\le 0}$. Поскольку $l_r^s(N) = l_{s+1}^s(N_{s+1})$, аксиома ортогональности (iii) из определения 2.3.1 дает $l_{s+1}^s(g_{s+1}) = 0$.

Далее, предложение 2.3.4(3) дает $w_{Chow\le 0}^{s+1}N_{s+1} \in DM_R^{s+1}{}_{w_{Chow}^{s+1}=0}$. Таким образом, применяя предложения 2.3.4(4) и 2.6.1(3), мы получаем, что морфизм g_{s+1} пропускается через элемент $DM_R^{s+1}{}_{w_{Chow}^{s+1}=0}\langle s+1\rangle$; а значит, и через некоторое копроизведение вида $M_R^{s+1}(P_a)\langle s+1\rangle$ для некоторых (связных) многообразий $P_a \in \mathrm{SmPrVar}$.

Применяя пункт 3, получаем, что $M_R^{s+1}(P_a)\langle s+1\rangle \perp N_{s+1}$, поскольку $\mathrm{CWH}_{s+1}^0(N_{s+1,k(P_a)}) = 0$; таким образом, $g_{s+1} = 0$. Отсюда получаем, что N_{s+1} — ретракт $w_{Chow\ge 1}^{s+1}N_{s+1}$; следовательно, N_{s+1} принадлежит $DM_R^{s+1}{}_{w_{Chow}^{s+1}\ge 1}$.

Осталось рассмотреть случай $m = r = +\infty$. Рассуждая так же, как и выше, получаем, что достаточно проверить, что $M_R(P_a) \perp N$ для любого гладкого проективного k-многообразия P_a. Теперь пусть P_a — многообразие размерности d. Применим равносильность наших условий в случае $m = d$ (заметим, что ее мы только что доказали). Условие (b) в этом случае дает весовое разложение с $w_{Chow\le 0}^{d+1}N_{d+1} \in \mathrm{Obj}(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff\,\widehat{\oplus}})\langle d+1\rangle$ (см. рассуждение выше). По определению групп Чжоу сразу получаем $M_R(P_a) \perp M_R(\mathrm{SmPrVar})\langle d+1\rangle$; следовательно, $M_R(P_a) \perp w_{Chow\le 0}^{d+1}N_{d+1}$. Поскольку $M_R(P_a) \perp w_{Chow\ge 1}^{d+1}N_{d+1}$, по аксиоме ортогональности для w_{Chow} получаем, что, действительно, $M_R(P_a) \perp N$.

6. Первая часть утверждения дана теоремой 2.4.3 и примером 2.3.13 статьи [18]; она также может быть легко получена из теоремы 2.2.1(3) статьи [20] (см. также [21, теорема 6.2.1(1)]). Далее, Чжоу-весовые гомологии сохраняют копроизведения; следовательно, требуемое обнуление следует из первого утверждения пункта и предложения 2.2.2. □

Замечание 3.1.3. Поскольку весовая структура w_{Chow} вырождена справа (по крайней мере, в некоторых случаях; см. предложение 2.6.1(7)), и для вырожденных справа объектов M весовой комплекс $t_R(M)$ обнуляется, далее мы в основном будем изучать w_{Chow}-ограниченные снизу мотивы. Напомним, что лемма 2.4 статьи [22] дает интересный пример w_{Chow}-вырожденного мотива; см. предложение 3.2.6 из [11]. Заметим также, что этот мотив бесконечно эффективен, то есть принадлежит $\cap_{r\ge 0}\mathrm{Obj}\,DM_R^{eff}\langle r\rangle$; см. замечание 3.2.4 ниже.

Другое соображение, указывающее на проблемы с применением рассуждений, схожих с нашими, к w_{Chow}-неограниченным снизу объектам, приведено в [11, замечание 2.2.6(3)].

2. Напомним, что Чжоу-весовые гомологии для геометрических мотивов были введены и подробно изучены в [1]. Наша версия этих теорий гомологий — единственное их чистое расширение на категорию DM_R^{eff}, сохраняющее копроизведения (см. предложение 2.5.1(6)).

3.2. Критерии обнуления Чжоу-весовых гомологий. Чтобы сформулировать наши утверждения в максимальной общности, напомним следующее техническое определение.

Определение 3.2.1. 1. Пусть $\mathcal{I}$ — подмножество $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ (см. § 2.1).

Мы будем называть $\mathcal{I}$ *лестничным* множеством, если для любых $(i, j) \in \mathcal{I}$ и $(i', j') \in \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ таких, что $i' \ge i$ и $j' \le j$, выполнено $(i', j') \in \mathcal{I}$.

Для $i \in \mathbb{Z}$ будем обозначать через $a_{\mathcal{I},i}$ наименьшее число $j \in [0, +\infty]$, для которого $(i, j) \notin \mathcal{I}$.

2. Для $m \in \mathbb{Z}$ мы будем обозначать через $d_{\leq m} DM_R^{eff}$ локализующую подкатегорию DM_R^{eff}, порожденную $\{M_R(X)\}$, для X, пробегающих гладкие k-многообразия размерности, не превосходящей m; соответственно, эта категория нулевая, если $m < 0$.

Кроме того, обозначим через $d_{\leq m}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ подкатегорию $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$, состоящую из ретрактов мотивов гладких проективных многообразий размерности, не превосходящей m.

Замечание 3.2.2. Очевидно, множество $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ — лестничное тогда и только тогда, когда оно равно объединению «полос» $\bigcup_{(i_0,j_0)\in\mathcal{I}} \mathcal{I}_{i_0,j_0}$, где $\mathcal{I}_{(i_0,j_0)} = [i_0, +\infty) \times [0, j_0]$. Поэтому объединение лестничных множеств лестнично; ср. теорему 3.2.3(4) ниже.

Изучим обнуление $\mathrm{CWH}_*^*(M_K)$ в степенях, соответствующих лестничным множествам.

Теорема 3.2.3. *Пусть $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ — лестничное множество, M — элемент $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}+}$ (см. определение 2.3.2(4)).*

1. *Тогда следующие условия равносильны.*

   A. $\mathrm{CWH}_j^i(M_K) = \{0\}$ для любого поля функций K/k и $(i, j) \in \mathcal{I}$.

   B. Если $(i, j) \in \mathcal{I}$, то объект $l^j(M)$ принадлежит $DM^{R,j}_{w_{\mathrm{Chow}} \geq -i+1}$.

   C. Для любого $i \in \mathbb{Z}$ существует срезка $w_{\mathrm{Chow} \leq -i} M$, принадлежащая $\mathrm{Obj}\, DM_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle$.

   D. M принадлежит наименьшему классу $D_{\mathcal{I}}$ объектов DM_R^{eff}, который замкнут относительно расширений и копроизведений, и содержит $\cup_{i\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Obj}(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle)[-i])$.

   E. Существует $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff\widehat{\oplus}}$-комплекс $\tilde{t}M \cong t(M)$ такой, что его i-й член $\tilde{M}^i$ является объектом $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle^{\widehat{\oplus}}$.

2. *Если $M \in DM_{R,[a,b]}^{eff}$ (для некоторых $a \leq b \in \mathbb{Z}$), то M принадлежит $D_{\mathcal{I}}$ (см. условие 1.D) тогда и только тогда, когда M принадлежит замыканию относительно расширений класса $\cup_{-b\leq i\leq -a}(\mathrm{Obj}(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle^{\widehat{\oplus}})[-i])$.*

3. *Если размерность M не превосходит $r \geq 0$, то равносильные условия пункта 1 также эквивалентны следующим.*

   A′. $\mathrm{CWH}_j^i(M_K) = \{0\}$ для всех пар $(i, j) \in \mathcal{I}$ и $K = k(P)$, где P — гладкое проективное k-многообразие размерности не более $r - j$.

   C′. Для любого $i \in \mathbb{Z}$ существует срезка $w_{\mathrm{Chow} \leq -i} M$, принадлежащая $\mathrm{Obj}(d_{\leq r - a_{\mathcal{I},i}} DM_R^{eff})\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle$.

   D′. M принадлежит наименьшему классу объектов DM_R^{eff}, замкнутому относительно расширений, копроизведений и содержащему класс $\cup_i \mathrm{Obj}$ $(d_{\leq r-a_{\mathcal{I},i}}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle)[-i]$.

E′. Существует $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\widehat{\oplus}$*-комплекс* $\tilde{t}M \cong t(M)$ *такой, что его* i*-й член* $\tilde{M}^i$ *является объектом* $(d_{\le r-a_{\mathcal{I},i}}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff})\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle^{\widehat{\oplus}}$.

Кроме того, схожие модификации также могут быть сделаны для пункта 2.

4. *Пусть* $\mathcal{I}_j$ *— лестничные множества, где* j *пробегает некоторое множество индексов* J, *и* $\mathcal{I} = \cup\mathcal{I}_j$. *Тогда элемент* M *принадлежит* $D_{\mathcal{I}}$ *тогда и только, когда он принадлежит* $\cap_j D_{\mathcal{I}_j}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим полосу $\mathcal{I}_{(i_0,j_0)} = [i_0, +\infty) \times [0, j_0]$. Последовательно применяя предложение 3.1.2(5), легко получаем, что обнуление $\mathrm{CWH}_j^i(M_K)$ для любых $(i,j) \in \mathcal{I}_{(i_0,j_0)}$ эквивалентно $l^{j_0}(M) \in DM^{R,j_0}_{w_{\mathrm{Chow}} \ge -i_0+1}$; см. доказательство теоремы 3.2.1(2) статьи [1]. Применяя замечание 3.2.2, получаем равносильность условий A и B. Аналогично, эквивалентность B $\Leftrightarrow$ C также следует из предложения 3.1.2(5).

Далее, мы можем взять срезку $w_{\le i}M$ равной 0 для достаточно малых i. Поэтому, если выполнено условие C, то, применяя предложение 2.6.1(4) и утверждение 2.5.1(3), получаем, что срезки $w_{\mathrm{Chow} \le -i}M$ из условия C принадлежат классу $D_{\mathcal{I}}$.

Напомним теперь, что весовая структура w_{Chow} приведена и невырождена слева; см. предложение 2.6.1(2). Следовательно, для любого объекта $M \in DM_R^{eff}$ и любых вариантов срезок $w_{\mathrm{Chow} \ge j}M$ существует выделенный треугольник $\coprod_{j\ge 0} w_{\mathrm{Chow} \ge j}M \to \coprod_{j\ge 0} w_{\mathrm{Chow} \ge j}M \to M \to \coprod_{j\ge 0} w_{\mathrm{Chow} \ge j}M[1]$ *счетного гомотопического копредела*; см. теорему 4.1.3(1, 2), определение 4.1.1 и замечание 1.2.6(1) статьи [10]. Поэтому, выбрав срезки $w_{\mathrm{Chow} \ge j}M$, принадлежащие $D_{\mathcal{I}}$, получаем, что M также принадлежит $D_{\mathcal{I}}$. Следовательно, условие D следует из условия C.

Далее докажем $D \Rightarrow E$ схожим с предложением 2.3.2(9) статьи [11] образом (соответственно, в этом доказательстве можно использовать слабый весовой комплекс вместо сильного). Напомним, что функтор t^{st} точен и сохраняет копроизведения. Поскольку класс $C_{\mathcal{I}}$ объектов $K(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff})$, изоморфных тем, что удовлетворяют нашим условиям эффективности членов, очевидно, замкнут относительно расширений и копроизведений, класс $D'_{\mathcal{I}}$ таких $N \in \mathrm{Obj}\, DM_R^{eff}$, что $t^{st}(N) \in C_{\mathcal{I}}$, также замкнут относительно этих операций. Так как класс $D'_{\mathcal{I}}$, очевидно, содержит $\cup_i \mathrm{Obj}(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle)[-i]$, получаем, что $D_{\mathcal{I}} \subset D'_{\mathcal{I}}$.

Наконец, для доказательства $E \Rightarrow A$ заметим, что если $\tilde{t}(M) = (\tilde{M}^i)$, то $\mathrm{CWH}_j^i(M_K)$ — подфактор группы $\mathfrak{Chow}_j(\tilde{M}_K^i, R)$, а последняя равна нулю согласно предложению 2.2.2.

2. Пусть M удовлетворяет условиям C предыдущего пункта и принадлежит $DM^{eff}_{R,[a,b]}$. Тогда можем выбрать $w_{\mathrm{Chow} \le a}M = 0$. Кроме того, из условия D в пункте 1 следует, что M — объект $DM_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},-b}\rangle$. Поэтому, если мы положим $w_{\mathrm{Chow} \le b}M = M$ и выберем срезки $w_{\mathrm{Chow} \le -i}M$, принадлежащие $\mathrm{Obj}\, DM_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle$ при $-b < i < -a$, то эти условия будут выполнены для выбранных весовых срезок в диапазоне $-b \le i \le -a$.

Теперь применим предложение 2.6.1(4) и предложение 2.5.1(3). Схожим с доказательством следствия $C \Rightarrow D$ предыдущего пункта способом получаем, что $w_{\mathrm{Chow} \le b}M = M$ принадлежит требуемому классу.

3. Очевидно, условие A пункта 1 влечет условие A′, в то время как условия 1.C, 1.D и 1.E следуют из наших условий C′, D′ и E′, соответственно. Таким образом, до-

статочно проверить, что эти условия равносильны, и из них следуют «ограниченные по размерности» версии условий 2.

Далее, легко увидеть, что приведенные выше рассуждения работают и в нашей ситуации, если воспользоваться следующими утверждениями: для любого $j \geq 0$ весовая структура w_{Chow} ограничивается на триангулированную подкатегорию $d_{\leq r}DM_R^{eff}$, объекты которой — j-эффективные и w_{Chow}-ограниченные снизу (в $DM_R^{eff} \supset d_{\leq r}DM_R^{eff}$) мотивы, и ядро этого ограничения равно $(d_{\leq r-j}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff})\langle j\rangle^{\widehat{\oplus}}$. Теперь утверждение легко следует из теоремы 2.2 статьи [23] (вместе с предложением 1.7 там же, дающим вычисление ядра; см. также доказательство последнего).

Оставшиеся детали мы оставляем читателю, так как мы не будем использовать данное утверждение ниже. Отметим только, что мы предлагаем брать подкатегории размерности не более r в локализациях типа DM_R^j, а не в соответствующих локализациях $d_{\leq r}DM_R^{eff}$ (хотя и они, вероятно, могут быть использованы в доказательстве; см. предложение 2.2.6(7) статьи [1]).

4. Очевидно; см. условие A в пункте 1.

□

Замечание 3.2.4. Полагая $\mathcal{I} = \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ в нашей теореме, мы немедленно получаем, что бесконечно эффективные элементы $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}+}$ равны 0; ср. замечание 3.1.3(1).

Теперь установим связь нашей теоремы с высшими Чжоу-весовыми гомологиями.

Предложение 3.2.5. *Пусть $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ и $M \in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}+}$. Рассмотрим следующие условия на M.*

1. $\mathrm{CWH}_j^i(M_K, R) = \{0\}$ *для любого $(i, j) \in \mathcal{I}$ и любого поля функций K/k.*
2. *Для любого рационального расширения K/k и $(i, j) \in \mathcal{I}$ выполнено* $\mathrm{CWH}_{j-1}^i(M_K, 1) = \{0\}$.
3. $\mathrm{CWH}_0^i(M_K, j) = \{0\}$ *для любых $(i, j) \in \mathcal{I}$ и любого поля функций K/k.*
4. $\mathrm{CWH}_a^i(M_K, j-a) = \{0\}$ *для любых $(i, j) \in \mathcal{I}$, $a \in \mathbb{Z}$, и любого расширения K/k.*

Тогда выполнено следующее.

1. Из условия 4 следуют условия 3 и 2, и из каждого из этих двух условий следует условие 1.

2. Пусть $\mathcal{I}$ — лестничное множество. Тогда все условия 1–4 равносильны.

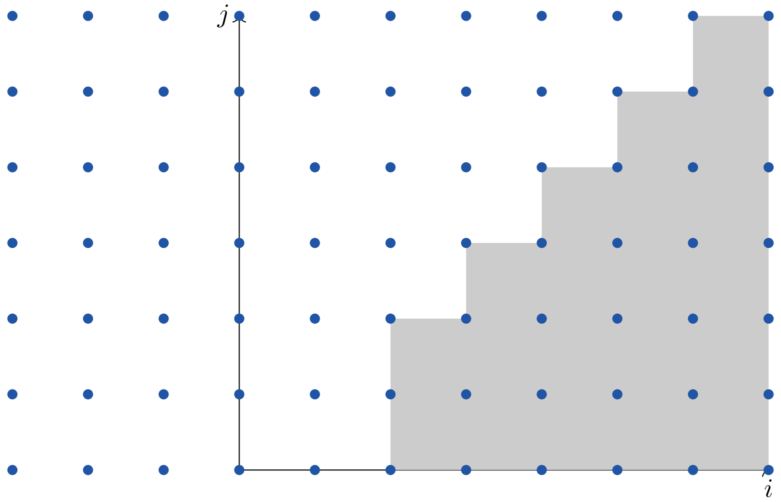
Доказательство. 1. Очевидно, из условия 4 следуют все остальные. Оставшиеся импликации доказываются также, как в предложении 3.4.1 статьи [1].

2. Осталось проверить, что условие 4 следует из условия 1. Для этого достаточно применить теорему 3.2.3(1) (см. условия A и D в ней) и предложение 3.1.2(1, 4). □

Замечание 3.2.6. Заметим, что следствие $1 \Rightarrow 4$ из предложения 3.2.5 может быть ложным, если множество $\mathcal{I}$ не лестничное. Например, возьмем $\mathcal{I} = [2, +\infty) \times [0, +\infty) \cup \{0\} \times [0, 5]$. Тогда мотив $\mathbb{Q}\langle 1\rangle[-1]$, очевидно, удовлетворяет условию 1, но $\mathrm{CWH}_1^2(\mathbb{Q}\langle 1\rangle[-1], 1) \cong \mathbb{Q}$.

3.3. Связь с мотивными гомологиями. Определим некоторые «крутые» лестничные множества и бирациональные мотивы.

Определение 3.3.1. 1. Пусть $(i_0, j_0) \in \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$. Тогда мы определим $S_{(i_0,j_0)} \subset \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ как множество $\{(i,j) : \ i \geq i_0, \ 0 \leq j \leq j_0 + (i - i_0)\}$; проиллюстрируем это определение, закрасив серым цветом точки множества $S_{(2,2)}$ на картинке ниже.



2. Пусть $\mathcal{I}$ — подмножество в $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ (см. § 2.1). Мы будем называть его *суперлестничным* множеством, если для любых $(i_0, j_0) \in \mathcal{I}$ множество $S_{(i_0,j_0)}$ лежит в $\mathcal{I}$.

3. Мы будем говорить, что объект N категории DM_R^{eff} *бирационален*, если $\operatorname{Obj} DM_R^{eff}\langle 1 \rangle \perp N$.

Сделаем некоторые замечания о суперлестничных множествах и бирациональных мотивах.

Замечание 3.3.2. 1. Очевидно, любое суперлестничное множество является лестничным.

Кроме того, если $(i,j) \in S_{(i_0,j_0)}$, то $S_{(i,j)} \subset S_{(i_0,j_0)}$. Таким образом, подмножество в $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ суперлестнично тогда и только тогда, когда оно представляется в виде объединения «секторов» $S_{(i_l,j_l)}$ для некоторых $(i_l, j_l) \in S_{(i_0,j_0)}$.

2. Рассмотрим вложение $DM_R^{eff}\langle 1 \rangle \to DM_R^{eff}$. Композиция $\nu^{\geq 1}$ данного вложения со своим правым сопряженным равна функтору $\underline{Hom}(R\langle 1 \rangle, -)\langle 1 \rangle$; см. предложение 4.6.2 статьи [24].

К тому же для любого объекта M из DM_R^{eff} это предложение дает следующий треугольник *слайс-фильтрации*:

$$\nu^{\geq 1}(M) \to M \to \nu^0(M) \to \nu^{\geq 1}(M)[1]. \tag{3.3.2}$$

Напомним также, что объект $\nu^0(M)$ бирационален в смысле определения 3.3.1(3); см. [24, лемма 4.5.4].

Теперь изучим связь между Чжоу-весовыми и мотивными гомологиями.

Теорема 3.3.3. *Пусть* $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s,n_s)}$ *для некоторых* $t_s \in \mathbb{Z}$, $n_s \geq 0$. *Тогда следующие условия на* $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$ *равносильны:*

(a) $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$ *для любой пары* $(i,j) \in \mathcal{I}$ *и любого поля функций* K/k;

(b) $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ *для любого* K, $0 \leq r \leq n_s$, *и* $c \geq t_s$;

(c) $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ *для любого* K *и* $(r,c) \in \mathcal{I}$.

Доказательство. Очевидно, условие (b) следует из условия (c).

Теперь предположим, что условие (a) выполнено, и $(i,j) \in \mathcal{I}$. Так как $\mathcal{I}$ — суперлестничное множество, $(u, j+u-i) \in \mathcal{I}$ при $u \geq i$. Следовательно, $\mathrm{CWH}^u_j(M_K, u-i) = \{0\}$ для любого $u \geq i$ по предложению 3.2.5; см. условия 4 и 1 в нем.

Далее, функтор $H = \mathfrak{Chow}_j(-_K, R, u-i)$ обнуляет $DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}} \geq 1}$ для любого $u \in \mathbb{Z}$, и равен нулю, если $u < i$, согласно предложению 3.1.2(4). Поэтому получаем сходящуюся Чжоу-весовую спектральную последовательность

$$T(H,M) : E_2^{u,q}T(H,M) = \mathrm{CWH}^u_j(M_K, R, -q) \implies E_\infty^{u+q} = \mathfrak{Chow}_j(M_K, R, -u-q),$$

соответствующую w_{Chow}; см. предложение 2.5.3. Применяя вышеупомянутые обнуления групп $\mathrm{CWH}^u_j(M_K, u-i)$, мы получаем $\mathfrak{Chow}_j(M_K, R, -i) = \{0\}$, а значит, из условия (c) следует условие (a).

Осталось установить, что условие (a) следует из (b). Поскольку $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s,n_s)}$, достаточно доказать, что это следствие справедливо для $\mathcal{I} = S_{(t,n)}$, где $t \in \mathbb{Z}$ и $n \geq 0$. Конечно, мы можем считать t равным 0. Следовательно, осталось доказать следующую лемму.

Лемма 3.3.4. *Пусть* $n \geq 0$, $M \in \mathrm{Obj}\, DM^{eff}_R$, *и* $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ *для всех* $c \geq 0$, $0 \leq r \leq n$, *и полей функций* K/k. *Тогда* $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$ *для любого* $(i,j) \in S_{(0,n)}$ *(и любого поля функций* K/k*).*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $n \geq 0$.

В случае $n = 0$ наше утверждение — очевидное обобщение следствия 3.4.2 из [1]; мы, по сути, приведем здесь доказательство этого следствия. Согласно предложению 5.1(3) ниже, из нашего предположения следует, что M принадлежит $DM_R^{eff, t^R_{hom} \leq -1}$ (см. определение 3.1.1(4)). Таким образом, остается применить предложение 3.1.2(6).

Теперь предположим, что утверждение выполнено при всех $n \leq m$ для некоторого $m \geq 0$. Проверим его для $n = m+1$. Поскольку мы доказали его в случае $n = 0$, достаточно проверить, что $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$, если $(i, j-1) \in S_{(0,n-1)}$.

Возьмем треугольник (3.3.2) и обозначим $\nu^0(M)$ и $\nu^{\geq 1}(M)$ через M^0 и M^1 соответственно. Тогда для любого $i \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$ и поля функций K треугольник (3.3.2) дает длинную точную последовательность $\dots \to \mathrm{CWH}^i_j(M^1_K) \to \mathrm{CWH}^i_j(M_K) \to \mathrm{CWH}^i_j(M^0_K) \to \dots$ Поэтому достаточно проверить, что $\mathrm{CWH}^i_j(M^0_K) = \mathrm{CWH}^i_j(M^1_K) = \{0\}$ при $(i, j-1) \in S_{(0,n-1)}$.

Теперь легко видеть, что для $i \in \mathbb{Z}$ и $j \geq 1$ выполнено $\mathfrak{Chow}_j(M^1_K, R, -i) = \mathfrak{Chow}_j(M_K, R, -i)$ и $\mathfrak{Chow}_j(M^0_K, R, -i) = \{0\}$ (см. также вышеупомянутые утверждения из статьи [24]). Таким образом, для $M^2 = \underline{Hom}(R\langle 1\rangle, M)$ (см. замечание 3.3.2(2)) выполнено $\mathfrak{Chow}_{j-1}(M^2_K, R, -i) = \{0\}$, если $i \geq 0$ и $j-1 \leq n-1$. Применяя предположение индукции, получаем $\mathrm{CWH}^i_{j-1}(M^2_K) = \{0\}$ при $(i, j-1) \in S_{(0,n-1)}$. Поэтому из предложения 2.5.1(5) легко следует, что $\mathrm{CWH}^i_j(-_K)\circ\langle 1\rangle \cong \mathrm{CWH}^i_{j-1}(-_K)$; следовательно, $\mathrm{CWH}^i_j(M^1_K)=\{0\}$ при $(i,j-1)\in S_{(0,n-1)}$ (напомним, что $M^1\cong M^2\langle 1\rangle$). Кроме того, M^1 принадлежит $DM_R^{eff\,t^R_{hom}\le -1}$ (поскольку $M\in DM_R^{eff\,t^R_{hom}\le -1}$); см. следствие 3.3.7(2) (и теорему 3.3.1) статьи [18] или предложение 5.1(3) ниже. Отсюда легко получаем, что M^0 также принадлежит $DM_R^{eff\,t^R_{hom}\le -1}$. Поскольку мотив M^0 бирационален, он принадлежит $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\ge 1}$ по лемме 3.3.5(2) ниже. Таким образом, $\mathrm{CWH}^i_j(M^0_K)=\{0\}$ при $i\ge 0$ (см. предложение 3.1.2(4)), что завершает доказательство. □

Лемма 3.3.5. *Пусть $N\in DM_R^{eff\,t^R_{hom}\le 0}$.*

1. Тогда для любого $j\ge 0$ можно выбрать срезку $w_{chow\le -j}N$, принадлежащую $\operatorname{Obj} DM_R^{eff}\langle j\rangle$.

2. Предположим к тому же, что мотив N бирационален в смысле определения 3.3.1(3). Тогда $N\in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\ge 0}$.

Доказательство. 1. Если $N\in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}+}$, то наше утверждение легко следует из случая $n=0$ леммы 3.3.4 (заметим, что для данного случая доказательство было получено независимо) и теоремы 3.2.3(1) (см. условия A и C в ней).

Рассуждения в общем случае схожи с доказательством [11, предложение 2.3.2(10)]. Зафиксируем $j\ge 0$. Поскольку весовая структура w_{Chow} приведена, класс C тех $M\in\operatorname{Obj} DM_R^{eff}$, для которых существует срезка $w_{\mathrm{Chow}\le -j}M$, принадлежащая $\operatorname{Obj} DM_R^{eff}\langle j\rangle$, приведен (см. определение 2.1.2(1)) в DM_R^{eff}; см. предложение 2.3.2(3) той же статьи. Кроме того, C замкнут относительно расширений по предложению 1.2.4(12) там же. Снова по предложению 3.1.2(6) получаем, что достаточно установить существование таких $w_{\mathrm{Chow}\le -j}M$, если $M\in\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a\rangle[b-a]$ для $a,b\ge 0$. Последнее очевидно.

2. По предыдущему пункту существует -1-весовое разложение $w_{chow\le -1}N\xrightarrow{a} N\to w_{\ge 0}N$ (см. замечание 2.3.3(2)) такое, что $w_{\le -1}N\in\operatorname{Obj} DM_R^{eff}\langle 1\rangle$. Поскольку мотив N бирационален, $w_{\le -1}N\perp N$ (см. замечание 3.3.2(2)). Следовательно, N — ретракт объекта $w_{\ge 0}N\in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\ge 0}$; таким образом, N сам принадлежит $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}\ge 0}$. □

Таким образом, теорема 3.2.3 полностью доказана. □

Замечание 3.3.6. 1. Ниже мы будем применять теорему 3.2.3 преимущественно к геометрическим мотивам. Однако отметим, что наши аргументы опираются на слайсы; таким образом, их невозможно применить, «не выходя за пределы $DM^{eff}_{\mathrm{gm,R}}$» (см. [25]).

Отметим также, что доказательства теорем 3.2.3 и 3.3.3 намекают на то, что имеет смысл изучать условия этих теорем для подкатегорий DM_R^{eff}, больших $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}+}$. В частности, можно рассмотреть категорию Воеводского $DM_{R-}^{eff}\supset DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}+}$; ср. § 2.3 из [23].

2. Поскольку слайсы точны и сохраняют копроизведения, для любого лестничного $\mathcal{I}$ объект M из DM_R^{eff} принадлежит классу $D_{\mathcal{I}}$ (см. условие D в теореме 3.2.3(1)) тогда и только тогда, когда ему принадлежат $\nu^0(M)$ и $\nu^{\ge 1}(M)$. Кроме того, аналогичные утверждения выполнены для других «слайсов» M. Мы оставляем детали читателю.

3. Очевидно, в $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ есть много лестничных, но не суперлестничных подмножеств. Однако единственный конкретный тип множеств такого типа, рассмотренный в [1], — это множества вида $\mathbb{Z} \times [0, c-1]$ (для $c > 0$). Они соответствуют c-эффективности мотивов; см. замечание 3.3.2(2) там.

4. Продемонстрируем, что теорема 3.2.3 не обобщается на произвольные подмножества $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$. Пусть $R = \mathbb{Q}$ и $M = \mathbb{Q}\langle 1\rangle[-1]$. Тогда $\mathrm{CWH}_j^i(M) = \{0\}$, если $(i, j) \neq (1, 1)$.

Далее, пусть k не равно объединению конечных полей, и $\mathcal{I} = [0, +\infty) \times [0, +\infty) \setminus \{(1, 1)\}$. Тогда $\mathrm{CWH}_0^0(N, \mathbb{Q}) = k^\times \otimes \mathbb{Q} \neq \{0\}$, но $(0, 0) \in \mathcal{I}$.

5. Пусть $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$, $t \geq 0$, и $E_2^{*,*}$ — члены Чжоу-весовой спектральной последовательности $T_{w_{\mathrm{Chow}}}(H, M)$ для гомологического функтора $DM_R^{eff}(R\langle t\rangle, -)$ сконцентрированы в первом квадранте (в частности, это выполнено, если $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}} \leq 0}$). Тогда можно рассмотреть так называемую пятичленную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{CWH}_t^1(M) \to \mathfrak{Chow}_t(M, -1) \to \mathrm{CWH}_t^0(M, -1) \to \mathrm{CWH}_t^2(M) \to \mathfrak{Chow}_t(M, -2),$$

и применить ее для изучения обнуления соответствующих групп гомологий.

4. Применение к геометрическим мотивам. В этом параграфе мы применим теорему 3.2.3 для получения ряда новых утверждений о геометрических мотивах. Мы рассуждаем аналогично статье [1].

В § 4.1 мы применяем теорему 3.2.3 совместно с результатами [1, § 3.6]; это дает конечность показателей для высших групп Чжоу-весовых гомологий и групп мотивных гомологий низких степеней при условии, что это — группы кручения.

В § 4.2 мы применяем наши результаты к мотиву с компактными носителями многообразия X. Мы получаем, что если группы Чжоу X (над универсальной областью K, содержащей k) — группы кручения, то их показатели конечны. Также мы получаем некоторую «эффективность» соответствующих весовых факторов Делиня для сингулярных и этальных когомологий X с компактным носителем.

4.1. Конечность показателей Чжоу-весовых и мотивных гомологий. Применим наши результаты к геометрическим мотивам.

Теорема 4.1.1. *Пусть M — объект категории $DM^{eff}_{gm,\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}$, K — универсальная область (т. е. K — алгебраически замкнутое бесконечной степени трансцендентности над своим простым подполем), содержащая k, и $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s, n_s)}$ (см. определение 3.3.1(1)).*

Тогда следующие условия равносильны.

1. $\mathfrak{Chow}_r((M \otimes \mathbb{Q})_K, \mathbb{Q}, -c) = \{0\}$ *для* $0 \leq r \leq n_s$ *и* $c \geq n_s$*; здесь* $M \otimes \mathbb{Q}$ *— результат применения к* M *функтора расширения скаляров* $- \otimes \mathbb{Q} = - \otimes_{\mathbb{Z}[1/p]} \mathbb{Q} : DM^{eff}_{gm,\mathbb{Z}[1/p]} \to DM^{eff}_{gm,\mathbb{Q}}$ *из предложения 3.6.2(I.1) статьи [1].*
2. *Существует число* $E_M > 0$*, для которого* $E_M \mathfrak{Chow}_r(M_{k'}, -c, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = \{0\}$ *при всех* $(r, c) \in \mathcal{I}$ *и любого расширения полей* k'/k.
3. *Если* $(i, j) \in \mathcal{I}$*, то* $\mathrm{CWH}_j^i((M \otimes \mathbb{Q})_K, \mathbb{Q}) = \{0\}$.
4. *Существует число* $E'_M > 0$ *такое, что* $E'_M\, \mathrm{CWH}^i_{j-a}(M_{k'}, a) = \{0\}$ *для любых* $a \in \mathbb{Z}$*,* $(i, j) \in \mathcal{I}$ *и любого расширения полей* k'/k.

Доказательство. Условие 1, очевидно, следует из условия 2.

Далее, по предложению 2.3.4(II) статьи [1] условие 1 (соотв. 3) выполнено тогда и только тогда, когда соответствующие гомологии обнуляются для любого поля функций k'/k. Следовательно, применив теорему 3.2.3 к мотиву $M \otimes \mathbb{Q} \in \operatorname{Obj} DM_{\mathbb{Q}}^{eff}$, получаем, что эти условия равносильны.

Кроме того, условия 3 и 4 эквивалентны по теореме 3.6.4 той же статьи (см. условие II.B в ней).

Наконец, будем рассуждать аналогично следствию 3.6.5(II) там же. Как мы уже отметили в доказательстве теоремы 3.2.3, имеется следующая спектральная последовательность $T(H, M)$:

$$E_2^{u,q} T(H, M) = \mathrm{CWH}_j^u(M_K, \mathbb{Z}[1/p], -q) \implies E_\infty^{u+q} = \mathfrak{Chow}_j(M_K, \mathbb{Z}[1/p], -u-q).$$

К тому же, комплекс $t^{st}(M)$ изоморфен ограниченному (см. определение 3.1.1(1) и предложение 2.2.1(1) статьи [1]). Следовательно, простое вычисление, проведенное выше, дает следующее: если $(r, c) \in \mathcal{I}$, то группа $\mathfrak{Chow}_r(M_{k'}, -c, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ обладает фильтрацией, длина которой ограничена константой, а факторы обнуляются умножением на E'_M. Таким образом, в качестве E_M можно взять некоторую степень E'_M. □

Замечание 4.1.2. Конечность показателей некоторых Чжоу-весовых гомологий весьма интересна. Отметим, что группы Чжоу-весовых и мотивных гомологий геометрических мотивов могут иметь очень большие и сложные подгруппы кручения.

4.2. Применения к мотивам с компактными носителями. Применим наши результаты к мотивам с компактными носителями. Напомним некоторые базовые факты об этих объектах.

Предложение 4.2.1. *1. Существует функтор $M_{gm}^{c,R}$ мотива с компактными носителями из категории $SchPr$ многообразий над k с собственными морфизмами в $DM_{gm,R}^{eff}$.*

2. Для любых $j, l \in \mathbb{Z}$, $X \in \mathrm{Var}$, $M = M_{gm}^{c,R}(X)$ и любого расширения k'/k группа $\mathfrak{Chow}_j(M_{k'}, R, l)$ (см. определение 2.2.1(3)) естественно изоморфна высшей группе Чжоу $CH_j(X_{k'}, l, R)$ (см. $\mathbb{Z}[1/p]$-линейную версию этого обозначения в теореме 5.3.14 статьи [5]).

Доказательство. Эти утверждения легко следуют из $\mathbb{Z}[1/p]$-линейных версий, доказанных в § 5.3 статьи [5], вместе с предложением 1.3.3 статьи [4] и предложением 5.1(2) ниже; ср. [1, предложение 4.1.2]. □

Замечание 4.2.2. Напомним, что функтор M_R также определен на категории всех k-многообразий, и если многообразие X собственно, то $M_R(X) = M_{gm}^{c,R}(X)$ (см. предложение 5.3.5 статьи [5]). В частности, $M_R(X) = M_{gm}^{c,R}(X)$, если X гладко и проективно.

Теперь мы применим теорему 3.2.3 вместе с некоторыми результатами [1] и получим обобщение теоремы 4.2.1 той статьи. Отметим, что в этом утверждении не упоминаются Чжоу-весовые гомологии.

Теорема 4.2.3. *Пусть $X \in \mathrm{Var}$, K — универсальная область, содержащая k, и для некоторого множества $\{(t_s, n_s)\} \subset \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ и любых $(r, c) \in \mathbb{Z} \otimes [0, +\infty)$, в т. ч. $0 \le r \le n_s$ и $c \ge t_s$ для некоторого s, выполнено $CH_r(X_K, -c, \mathbb{Q}) = \{0\}$.*

1. Тогда существует $E_X > 0$ такое, что $E_X CH_r(X_{k'}, -c, \mathbb{Z}[1/p]) = \{0\}$ для любых $(r, c) \in \mathcal{I}$ и любого расширения k'/k, где $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s, n_s)}$ (см. определение 3.3.1(1)).

2. Если k — подполе $\mathbb{C}$, а $l, m \in \mathbb{Z}$, то $(m+l)$-й весовой фактор Делиня $H^m_c(X_{\mathbb{C}})$ ($\mathbb{Q}$-линейных) сингулярных когомологий $X_{\mathbb{C}}$ с компактными носителями $a_{\mathcal{I},l}$-эффективен как чистая структура Ходжа; соответствующие обозначения можно найти в определении 3.2.1(1) выше и [1, определение 3.5.3, теорема 3.5.4(2)].

Кроме того, аналогичные свойства факторов Делиня выполнены для этальных когомологий $H^q_c(X_{k^{alg}}, \mathbb{Q}_\ell)$, если k — совершенное замыкание поля, имеющего конечную степень трансцендентности над простым подполем.

Доказательство. 1. Утверждение легко следует из предложения 4.2.1(2) и теоремы 4.1.1 (см. условия 1 и 2 в последней).

2. Если $(i, j) \in \mathcal{I}$ и $M = M^{c,\mathbb{Q}}_{gm}(X)$, то $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$; см. теорему 3.2.3. Теперь легко можем рассуждать аналогично доказательству теоремы 4.2.1(2) статьи [1]. □

Замечание 4.2.4. 1. К тому же для $M = M^{c,\mathbb{Q}}_{gm}(X)$ и любого когомологического функтора H из $DM^{eff}_{gm,\mathbb{Q}}$ в абелеву категорию $\underline{A}$ можно применить обнуление упомянутых выше групп Чжоу-весовых гомологий вместе с предложением 3.5.1(1) той же статьи и получить, что для любых $l, m \in \mathbb{Z}$ и объект $E_2^{-l,m}T(M)$, и $(Gr_W^{-l}H^{m-l})(M)$ являются подфакторами $H^m(M_R(P)\langle a_{\mathcal{I},l}\rangle)$ для некоторого $P \in \mathrm{SmPrVar}$, если $a_{\mathcal{I},l} < +\infty$, и равны 0, если $a_{\mathcal{I},l} = +\infty$; см. соответствующие обозначения в [1, определение 1.4.4(2), предложение 1.4.5(2)].

2. Из сочетания двух «стандартных» мотивных гипотез следует, что условие эффективности структуры Ходжа в теореме 4.2.3(2) равносильно нашим предположениям о группах Чжоу X. Это утверждение легко следует из предложения 3.5.6 статьи [1] (примененного вместе с нашей теоремой 3.2.3).

3. Конечно же, можно рассмотреть Чжоу-весовую спектральную последовательность для негеометрических объектов из $DM^{eff}_{\mathbb{Q}}$ (или DM^{eff}_R для любого R). В частности, можно определить функторы сингулярных и этальных гомологий, сходные с упомянутыми в теореме 4.2.3(2), на категории $DM^{eff}_{\mathbb{Q}}$. Заметим, что такие гомологические функторы, принимающие значения в соответствующих инд-пополненных категориях и сохраняющие копроизведения, существуют; см. лемму 2.2 статьи [26].

Важно отметить здесь, что эти функторы переводят объекты категории $\underline{Chow}^{eff\widehat{\oplus}}_{\mathbb{Q}}$ в (инд-чистые) объекты веса 0 соответствующих смешанных категорий; следовательно, эти весовые спектральные последовательности вырождаются в E_2 (ср. теорему 3.5.4 статьи [1]).

5. Вспомогательные утверждения о мотивах. Докажем некоторые утверждения, которые применялись как в [1], так и в этой статье. Авторы не нашли соответствующих формулировок (над полями) в литературе, но, конечно же, не претендуют на приоритет по их поводу.

Мы не будем вводить определения и обозначения, используемые ниже; они могут быть найдены в статье [16].

Предложение 5.1. *Пусть K/k — расширение совершенных полей, $f : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} k$ — соответствующий морфизм и X — k-многообразие.*

Тогда выполнены следующие утверждения.

1. *Функтор $-_K$ из определения 2.2.1(2) — это ограничение на DM_R^{eff} функтора $f^* : DM_R \to DM_R(K^{perf})$, и выполнено $f^*(M_R(X)) \cong M_R(X_K)$.*

2. *К тому же $f^*(M_R^c(X)) \cong M_R^c(X_K)$.*

3. *Объект N категории DM_R^{eff} принадлежит $DM_R^{eff\, t_{hom}^R \le 0}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{Chow}_0(N_{k'}, R, l) = \{0\}$ для любого $l < 0$ и любого поля функций k'/k.*

   Кроме того, эти условия равносильны обнулению групп $\mathfrak{Chow}_r(N_{k'}, R, l - r)$ для всех $l < 0$, $r \ge 0$ и любого поля функций k'/k.

Доказательство. 1. Перейдем к «стабильным» мотивным категориям $DM_R \cong DM_{cdh}(\operatorname{Spec} k, R) \supset DM_R^{eff}$ (см. § 1.2, определение 1.5, и предложение 8.1(c) статьи [16]). Тогда вторая часть утверждения говорит, что мы в действительности можем определить $-_K$ как ограничение на DM_R^{eff} функтора f^*.

Для доказательства требуемого изоморфизма напомним, что мотив $M_R(X)$ может быть вычислен как $x_! x^!(R)$, где $x : X \to \operatorname{Spec} k$ — структурный морфизм; см. формулу (8.7.1) (и § 1.6) этой статьи. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X_K & \xrightarrow{f_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle x_K} & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{f} & \operatorname{Spec} k \end{array} \qquad (5.1)$$

и напомним, что категории $DM_{cdh}(-, R)$ дают *мотивную категорию* над категорией нетеровых k-схем конечной размерности, и она *непрерывна относительно подкруток* $\langle n \rangle$ для $n \in \mathbb{Z}$; см. предложение 4.3 и теорему 5.1 там же, а также определения 2.4.45 и 4.3.2 книги [17]. Таким образом, мы можем применить изоморфизм замены базы (см. теорему 2.4.50(4) этой книги) и получить $f^* x_! \cong x_{K!} f_X^*$.

Далее, мотивная категория $DM_{cdh}(-, R)$ *порождена этими подкрутками* (см. определение 2.5 и предложение 4.3 статьи [16]), и морфизм f *регулярен* по теореме Попеску — Спиваковского (см. теорему 4.1.5 книги [17]). Таким образом, применяя предложение 4.3.12 этой книги, мы получаем $f_X^* x^! \cong x_K^! f^*$. Остается напомнить, что $f^* R_{\operatorname{Spec} k} \cong R_{\operatorname{Spec} K}$ (см. § 1.1.1 там же); следовательно, $f^*(M_R(X)) \cong x_{K!} x_K^! R_{\operatorname{Spec} K} \cong M_R(X_K)$.

2. Доказательство этого пункта во многом похоже на предыдущее. Предложение 8.10 статьи [16] говорит, что мотив $M_{gm}^{r,c}(X)$ вычисляется как $x_* x^!(R)$; здесь мы используем обозначения [17] (и пишем x_* вместо Rx_*). Далее, упомянутые выше утверждения позволяют применить предложение 4.3.15 этой книги; это дает $f^* x_* \cong x_{K*} f_X^*$. Применяя упомянутые выше изоморфизмы получаем, что $f^*(M_{gm}^{r,c}(X)) \cong x_{K*} x_K^! R_{\operatorname{Spec} K} \cong M_{gm}^{r,c}(X_K)$.

3. N принадлежит $DM_R^{eff\, t_{hom}^R \le 0}$ тогда и только тогда, когда для любого поля функций k'/k и любого его представления в виде $\operatorname{Spec} k' = \varprojlim X_j$ для $X_j \in \mathrm{SmVar}$, $r \ge 0$ и $l < 0$, выполняется $\varinjlim_j DM_R^{eff}(M_R(X_j)\langle r \rangle [l - r], N) = \{0\}$; см. следствие 5.2, § 1.18 и теорему 3.7 статьи [27].[6]

[6]Как вариант, можно применить следствие 2.3.12 и теорему 3.3.1 статьи [18]; см. также определения 1.3.10 и 3.2.3 и формулу (2.3.4.a) этой статьи.

Далее, напомним, что мотивы $M_R(X_j)$ также могут быть вычислены как $x_{j\#}R_{X_j} = x_{j\#}x_j^* R_{\operatorname{Spec} k}$, где $x_j : X_j \to \operatorname{Spec} k$ — структурные морфизмы, а функторы $x_{j\#}$ сопряжены слева к x_j^*; см. формулу (8.5.3) статьи [16] (мы опускаем L в обозначениях этой статьи). Таким образом, $DM_R^{eff}(M_R(X_j)\langle r\rangle[l-r], N) \cong DM_{cdh}(X_j, R)(R_{X_j}\langle r\rangle[l-r], x_j^* N)$. По непрерывности, упомянутой выше, мы можем перейти к пределу (см. определение 2.5 там же) и получить

$$\varinjlim DM_{cdh}(X_j, R)(R_{X_j}\langle r\rangle[l-r], x_j^* N) \cong DM_{cdh}(\operatorname{Spec} k', R)(R_{\operatorname{Spec} k'}\langle r\rangle[l-r], f^* N).$$

Последняя группа изоморфна $\mathfrak{Chow}_r(N_{k'}, R, l-r)$, поскольку мы можем заменить поле k' на его совершенное замыкание; см. предложение 8.1 статьи [16].

Остается проверить требуемое обнуление в случае $r = 0$. Оно легко получается из предложения 5.2.6(8) и замечания 5.2.7(7) статьи [28]. Кроме того, его легко можно вывести из хорошо известной теоремы 4.19 статьи [3] и того факта, что мотив $R\langle n\rangle[-n]$ — ретракт $M_R(\mathbb{G}_m^n)$ (где $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$). $\square$

Литература

1. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.* On Chow-weight homology of geometric motives. Preprint. 2020. URL: https://www.researchgate.net/publication/340849991_On_Chow-weight_homology_of_geometric_motives (accessed: September 7, 2020).

2. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.* Detecting the c-effectivity of motives, their weights, and dimension via Chow-weight (co)homology: a “mixed motivic decomposition of the diagonal”. Preprint. 2014. arxiv.org/abs/1411.6354

3. *Bloch S.* Lectures on algebraic cycles. In: Duke University Mathematics series IV, 1980.

4. *Бондарко М. В., Кумаллагов Д. З.* О весовых структурах Чжоу без проективности и разрешения особенностей // Алгебра и Анализ. 2018. Т. 30, № 5. С. 57–83.

5. *Kelly S.* Voevodsky motives and ldh-descent // Asterisque. 2017. No. 391. P. 1–134.

6. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.* On constructing weight structures and extending them to idempotent extensions // Homology, Homotopy and Appl. 2018. Vol. 20, no. 1. P. 37–57.

7. *Wildeshaus J.* Chow motives without projectivity // Compositio Mathematica. 2009. Vol. 145, no. 5. P. 1196–1226.

8. *Bondarko M. V.* Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general) // J. of K-theory. 2010. Vol. 6, no. 3. P. 387–504. arxiv.org/abs/0704.4003

9. *Pauksztello D.* Compact cochain objects in triangulated categories and co-t-structures // Central European Journal of Mathematics. 2008. Vol. 6, no. 1. P. 25–42.

10. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.* On purely generated α-smashing weight structures and weight-exact localizations // J. of Algebra. 2019. Vol. 535. P. 407–455.

11. *Bondarko M. V.* On weight complexes, pure functors, and detecting weights. Preprint. 2018. arxiv.org/abs/1812.11952

12. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.* Non-commutative localizations of additive categories and weight structures; applications to birational motives // J. of the Inst. of Math. of Jussieu. 2018. Vol. 17, no. 4. P. 785–821.

13. *Sosnilo V. A.* Theorem of the heart in negative K-theory for weight structures // Doc. Math. 2019. Vol. 24. P. 2137–2158.

14. *Gillet H., Soulé C.* Descent, motives and K-theory // J. f. die reine und ang. Math. 1996. Vol. 478. P. 127–176.

15. *Beilinson A., Vologodsky V.* A DG guide to Voevodsky motives // Geom. Funct. Analysis. 2008. Vol. 17, no. 6. P. 1709–1787.

16. *Cisinski D.-C., Déglise F.* Integral mixed motives in equal characteristic // Documenta Mathematica, Extra Volume: Alexander S. Merkurjev’s Sixtieth Birthday. 2015. P. 145–194.

17. *Cisinski D.-C., Déglise F.* Triangulated categories of mixed motives. In: Springer Monographs in Mathematics. 2019.

18. *Bondarko M. V., Déglise F.* Dimensional homotopy t-structures in motivic homotopy theory // Adv. in Math. 2017. Vol. 311. P. 91–189.

19. *Bondarko M. V., Sosnilo V. A.* On the weight lifting property for localizations of triangulated categories // Lobachevskii J. of Math. 2018. Vol. 39, no. 7. P. 970–984.

20. *Bondarko M. V.*, Z[1/p]-motivic resolution of singularities // Compositio Math. 2011. Vol. 147, no. 5. P. 1434–1446.

21. *Bondarko M. V.* Differential graded motives: weight complex, weight filtrations and spectral sequences for realizations; Voevodsky vs. Hanamura // J. of the Inst. of Math. of Jussieu. 2009. Vol. 8, no. 1. P. 39–97. arxiv.org/abs/math.AG/0601713

22. *Ayoub J.* Motives and algebraic cycles: a selection of conjectures and open questions. In: Hodge theory and L^2-analysis. P. 87–125. Adv. Lect. Math. (ALM). Vol. 39. Somerville, MA: Int. Press, 2017.

23. *Bondarko M. V.* Intersecting the dimension and slice filtrations for motives // Homology, Homotopy and Appl. 2018. Vol. 20, no. 1. P. 259–274.

24. *Kahn B., Sujatha R.* Birational motives, II: triangulated birational motives // Int. Math. Res. Notices. 2017. Vol. 2017, no. 22. P. 6778–6831.

25. *Ayoub J.* The slice filtration on DM(k) does not preserve geometric motives. Appendix to A. Huber's "Slice filtration on motives and the Hodge conjecture" // Math. Nachr. 2008. Vol. 281, no. 12. P. 1764–1776.

26. *Krause H.* Smashing subcategories and the telescope conjecture — an algebraic approach // Invent. math. 2000. Vol. 139. P. 99–133.

27. *Déglise F.* Modules homotopiques (Homotopy modules) // Doc. Math. 2011. Vol. 16. P. 411–455.

28. *Bondarko M. V.* Gersten weight structures for motivic homotopy categories; retracts of cohomology of function fields, motivic dimensions, and coniveau spectral sequences. Preprint. 2018. arxiv.org/abs/1803.01432

Статья поступила в редакцию 15 мая 2020 г.;
после доработки 17 июня 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Бондарко Михаил Владимирович — д-р физ.-мат. наук, доц., проф. РАН; m.bondarko@spbu.ru
Кумаллагов Давид Зелимович — аспирант; kumdavid@yandex.ru

On Chow-weight homology of motivic complexes and its relation to motivic homology

M. V. Bondarko, D. Z. Kumallagov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Bondarko M. V., Kumallagov D. Z. On Chow-weight homology of motivic complexes and its relation to motivic homology. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 560–587. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.401 (In Russian)

In this paper we study in detail the so-called Chow-weight homology of Voevodsky motivic complexes and relate it to motivic homology. We generalize earlier results and prove that the vanishing of higher motivic homology groups of a motif M implies similar vanishing for its Chow-weight homology along with effectivity properties of the higher terms of its weight complex $t(M)$ and of higher Deligne weight quotients of its cohomology. Applying this statement to motives with compact support we obtain a similar relation between the vanishing of Chow groups and the cohomology with compact support of varieties. Moreover, we prove that if higher motivic homology groups of a geometric motif or a variety over a universal domain are torsion (in a certain "range") then the exponents of these groups are uniformly bounded. To prove our main results we study Voevodsky slices of motives. Since the slice functors do not respect the compactness of motives, the results of the previous

Chow-weight homology paper are not sufficient for our purposes; this is our main reason to extend them to (w_{Chow}-bounded below) motivic complexes.

Keywords: motives, triangulated categories, Chow groups, weight structures, Chow-weight homology, Deligne filtration, effectivity.

References

1. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "On Chow-weight homology of geometric motives", preprint (2020). Available at: https://www.researchgate.net/publication/340849991_On_Chow-weight_homology_of_geometric_motives (accessed: September 7, 2020).

2. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "Detecting the c-effectivity of motives, their weights, and dimension via Chow-weight (co)homology: a "mixed motivic decomposition of the diagonal", preprint (2014). arxiv.org/abs/1411.6354

3. Bloch S., *Lectures on algebraic cycles*, in: *Duke University Mathematics series* IV (1980).

4. Bondarko M. V., Kumallagov D. Z., "On Chow weight structures without projectivity and resolution of singularities", *St. Petersburg Math. J.* **30** (5), 803–819 (2019).

5. Kelly S., "Voevodsky motives and ldh-descent", *Asterisque* (391), 1–134 (2017).

6. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "On constructing weight structures and extending them to idempotent extensions", *Homology, Homotopy and Appl.* **20** (1), 37–57 (2018).

7. Wildeshaus J., "Chow motives without projectivity", *Compositio Mathematica* **145** (5), 1196–1226 (2009).

8. Bondarko M. V., "Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)", *J. of K-theory* **6** (3), 387–504 (2010). arxiv.org/abs/0704.4003

9. Pauksztello D., "Compact cochain objects in triangulated categories and co-t-structures", *Central European Journal of Mathematics* **6** (1), 25–42 (2008).

10. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "On purely generated α-smashing weight structures and weight-exact localizations", *J. of Algebra* **535**, 407–455 (2019).

11. Bondarko M. V., "On weight complexes, pure functors, and detecting weights", preprint (2018). arxiv.org/abs/1812.11952

12. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "Non-commutative localizations of additive categories and weight structures; applications to birational motives", *J. of the Inst. of Math. of Jussieu* **17** (4), 785–821 (2018).

13. Sosnilo V. A., "Theorem of the heart in negative K-theory for weight structures", *Doc. Math.* **24**, 2137–2158 (2019).

14. Gillet H., Soulé C., "Descent, motives and K-theory", *J. f. die reine und ang. Math.* **478**, 127–176 (1996).

15. Beilinson A., Vologodsky V., "A DG guide to Voevodsky motives", *Geom. Funct. Analysis* **17** (6), 1709–1787 (2008).

16. Cisinski D.-C., Déglise F., "Integral mixed motives in equal characteristic", *Documenta Mathematica, Extra Volume: Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday*, 145–194 (2015).

17. Cisinski D.-C., Déglise F., *Triangulated categories of mixed motives*, in: *Springer Monographs in Mathematics* (2019).

18. Bondarko M. V., Déglise F., "Dimensional homotopy t-structures in motivic homotopy theory", *Adv. in Math.* **311**, 91–189 (2017).

19. Bondarko M. V., Sosnilo V. A., "On the weight lifting property for localizations of triangulated categories", *Lobachevskii J. of Math.* **39** (7), 970–984 (2018).

20. Bondarko M. V., "Z[1/p]-motivic resolution of singularities", *Compositio Math.* **147** (5), 1434–1446 (2011).

21. Bondarko M. V., "Differential graded motives: weight complex, weight filtrations and spectral sequences for realizations; Voevodsky vs. Hanamura", *J. of the Inst. of Math. of Jussieu* **8** (1), 39–97 (2009). arxiv.org/abs/math.AG/0601713

22. Ayoub J., "Motives and algebraic cycles: a selection of conjectures and open questions", in: *Hodge theory and L^2-analysis*, 87–125 (Int. Press, Somerville, MA, 2017, vol. 39 of Adv. Lect. Math.).

23. Bondarko M. V., "Intersecting the dimension and slice filtrations for motives", *Homology, Homotopy and Appl.* **20** (1), 259–274 (2018).

24. Kahn B., Sujatha R., "Birational motives, II: triangulated birational motives", *Int. Math. Res. Notices* **2017** (22), 6778–6831 (2017).

25. Ayoub J., "The slice filtration on DM(k) does not preserve geometric motives. Appendix to A. Huber's "Slice filtration on motives and the Hodge conjecture", *Math. Nachr.* **281** (12), 1764–1776 (2008).

26. Krause H., "Smashing subcategories and the telescope conjecture — an algebraic approach", *Invent. math.* **139**, 99–133 (2000).

27. Déglise F., "Modules homotopiques (Homotopy modules)", *Doc. Math.* **16**, 411–455 (2011).

28. Bondarko M. V., "Gersten weight structures for motivic homotopy categories; retracts of cohomology of function fields, motivic dimensions, and coniveau spectral sequences", preprint (2018). arxiv.org/abs/1803.01432

Received: May 15, 2020
Revised: June 17, 2020
Accepted: June 18, 2020

Authors' information:

Mikhail V. Bondarko — m.bondarko@spbu.ru
David Z. Kumallagov — kumdavid@yandex.ru