

Точки кручения обобщенных формальных групп Хонды*

О. В. Демченко, С. В. Востоков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Демченко О. В., Востоков С. В. Точки кручения обобщенных формальных групп Хонды // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 597–606.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.403>

Обобщенные формальные группы Хонды представляют из себя класс формальных групп, который, в частности, включает все формальные группы над кольцом целых локальных полей, слабо разветвленных над \mathbb{Q}_p . Этот класс является следующим в цепочке *мультипликативная формальная группа — формальные группы Любина — Тейта — формальные группы Хонды*. Формальные группы Любина — Тейта определяются выделенными эндоморфизмами $[\pi]_F$. Формальные группы Хонды обладают выделенными гомоморфизмами, которые пропускаются через $[\pi]_F$. В настоящей работе мы доказываем, что для обобщенных формальных групп Хонды композиция последовательности выделенных гомоморфизмов пропускается через $[\pi]_F$. В качестве приложения этого факта доказан ряд свойств точек π^n -кручения обобщенной формальной группы Хонды.

Ключевые слова: формальные группы, точки кручения формальной группы.

1. Введение. Пусть k — конечное расширение \mathbb{Q}_p с кольцом целых чисел \mathcal{O} , униформизирующей π и полем вычетов мощности q . Один из центральных фактов теории Любина — Тейта касается группы точек π^n -кручения W_F^n формальной группы Любина — Тейта F над \mathcal{O} . Классическим результатом является тот факт, что W_F^n — \mathcal{O} -модуль ранга 1, а $k(W_F^n)/k$ — абелево вполне разветвленное расширение степени $q^{n-1}(q-1)$.

Формальные группы Хонды [1] представляют из себя расширение класса формальных групп Любина — Тейта и полностью классифицируют формальные группы над \mathcal{O} в случае, когда k неразветвлено. Для формальной группы Хонды F высоты h известно, что $W_F^n \cong (\mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O})^h$ как \mathcal{O} -модуль, $k(W_F^1)$ содержит неразветвленное расширение степени h и $\nu(\eta) = 1/(q^h - 1)q^{(n-1)h}$, где $\eta \in W_F^n \setminus W_F^{n-1}$ и ν — нормализованное нормирование k (см. [2, 3]).

Дальнейшее обобщение дает новый класс формальных групп [4], который мы будем называть *обобщенными формальными группами Хонды*. Этот класс, который, в частности, описывает все формальные группы в случае, если индекс ветвления e поля k меньше p , и будет предметом нашего исследования.

Формальные группы Любина — Тейта определяются выделенным эндоморфизмом $[\pi]_F(x) \equiv x^q \pmod{\pi}$. Для любой формальной группы Хонды высоты h существует гомоморфизм $[\pi]_{F, F_1}(x) \equiv x^{q^h} \pmod{\pi}$ (см. [5]), а обобщенные формальные

* Работа выполнена при поддержке РФФ (грант №16-11-10200).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

группы Хонды обладают гомоморфизмом $[a]_{F, F_1}(x) \equiv x^{a^h} \pmod{a}$ для некоторых $a \in \mathcal{O}, 1 \leq \nu(a) \leq e-1$. Очевидным недостатком этого гомоморфизма является то, что он непосредственно не связан с эндоморфизмом, который может быть использован при определении точек кручения. Цель нашей статьи — устранить эту проблему и получить некоторые непосредственные следствия.

Для обобщенной формальной группы Хонды F над \mathcal{O} мы строим цепочку выделенных гомоморфизмов и находим их параметры. Оказывается, что композиция некоторого числа таких гомоморфизмов пропускается через эндоморфизм F и, таким образом, может служить аналогом выделенного эндоморфизма формальной группы Любина — Тейта. Это позволяет нам вычислить нормирование точек кручения и оценить степень вычетов расширения $k(W_F^1)/k$.

2. Обобщенные формальные группы Хонды. Пусть k/k_1 — конечное расширение локальных полей нулевой характеристики с индексом ветвления e . Предположим, что поле вычетов \bar{k}_1 имеет характеристику $p \neq 2$ и мощность q . Обозначим через $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ кольца целых полей k, k_1 и через Π, π — их соответствующие униформизирующие. Пусть k_0 — подполе инерции в k/k_1 с кольцом целых \mathcal{O}_0 . Пусть ν — нормализованное нормирование k .

Обозначим через Δ автоморфизм Фробениуса неразветвленного расширения k_0/k_1 . Положим $\blacktriangle\varphi = \varphi^\Delta(x^q)$, где $\varphi \in k_0[[x]]$, что определяет левое действие на $k_0[[x]]$ некоммутативного кольца $E = \mathcal{O}_0[[\blacktriangle]]$ с правилом умножения $\blacktriangle a = a^\Delta \blacktriangle, a \in \mathcal{O}_0$.

Определим «координатные отображения» из k в k_0 . Любой элемент $\alpha \in k$ можно однозначно представить в виде $\alpha = a_0 + a_1\Pi + \dots + a_{e-1}\Pi^{e-1}$, где $a_0, a_1, \dots, a_{e-1} \in k_0$. Тогда положим $|\alpha|_0 = a_0, |\alpha|_1 = a_1, \dots, |\alpha|_{e-1} = a_{e-1}$. Эти отображения также могут быть естественным образом продолжены до отображений из $k[[x]]$ в $k_0[[x]]$.

Пусть $E_0 = E\blacktriangle$. Мы говорим, что степенной ряд $\lambda \in k[[x]]$ имеет тип $(A_0, A_1, \dots, A_{e-1})$, где $A_i \in E_0, 0 \leq i \leq e-1$, если $\lambda(x) \equiv x \pmod{\deg 2}$ и $\pi|\lambda|_i \equiv A_i|\lambda|_0 \pmod{\pi}, 0 \leq i \leq e-1$. Заметим, что тип не определен однозначно.

Формальная группа F над \mathcal{O} называется *обобщенной формальной группой Хонды*, если ее логарифм имеет тип $(A_0, A_1, \dots, A_{e-1})$ для некоторых $A_i \in E_0, 0 \leq i \leq e-1$.

Из [4, теорема 2] следует, что $\mathcal{O}_1 \subset \text{End}_{\mathcal{O}}(F)$, и в частности, $[\pi]_F$ является эндоморфизмом F над \mathcal{O} .

Теорема 1 [4, теоремы 1 и 3].

1. Любой $\lambda \in k[[x]]$, имеющий некоторый тип $(A_0, A_1, \dots, A_{e-1})$, является логарифмом обобщенной формальной группы Хонды над \mathcal{O} . Если $\mu \in k[[x]]$ имеет тот же тип, то формальные группы, соответствующие λ и μ , строго изоморфны.
2. Если $k_1 = \mathbb{Q}_p$ и $e < p$, то любая формальная группа над \mathcal{O} является обобщенной формальной группой Хонды.

По лемме 5.1 из [4] любая формальная группа над \mathcal{O} конечной высоты имеет тип $(B_0\blacktriangle^{h_0}, B_1\blacktriangle^{h_1}, \dots, B_{e-1}\blacktriangle^{h_{e-1}})$ такой, что $B_i \in E^*$ для всех $1 \leq i \leq e-1$. Пусть $1 \leq t \leq e-1$ — наименьший индекс, для которого достигается минимум h_0, \dots, h_{e-1} . Для $0 \leq i \leq e-1$ определим $\widehat{B}_i = \varepsilon_i^{-1}B_i$, если $B_i \equiv \varepsilon_i \pmod{\blacktriangle}, \varepsilon_i \in \mathcal{O}_0^*$. Переформулируем теорему 5 из [4].

Теорема 2. Предположим, что $\Pi^e = \delta\pi$ для некоторого $\delta \in \mathcal{O}_0^*$. Пусть $\lambda \in k[[x]]$ — степенной ряд типа $(B_0 \blacktriangle^{h_0}, B_1 \blacktriangle^{h_1}, \dots, B_{e-1} \blacktriangle^{h_{e-1}})$. Определим $\mu \in k[[x]]$ условием

$$|\mu|_i = \begin{cases} \varepsilon_t^{-1} B_{t+i} \blacktriangle^{h_{t+i}-h_t} |\lambda|_0^{\Delta^{h_t}}, & 0 \leq i \leq e-t-1, \\ \pi^{-1} \delta^{-1} \varepsilon_t^{-1} B_{t+i-e} \blacktriangle^{h_{t+i-e}-h_t} |\lambda|_0^{\Delta^{h_t}}, & e-t \leq i \leq e-1. \end{cases}$$

Тогда

1) μ имеет тип $(D_0 \blacktriangle^{h'_0}, D_1 \blacktriangle^{h'_1}, \dots, D_{e-1} \blacktriangle^{h'_{e-1}})$, где

$$D_i = \begin{cases} \varepsilon_t^{-1} B_{t+i} B_0^{\Delta^{h_{t+i}}} \left(\widehat{B}_t^{\Delta^{h_{t+i}+h_0-h_t}} \right)^{-1}, & 0 \leq i \leq e-t-1, \\ \delta^{-1} \varepsilon_t^{-1} B_{t+i-e} \left(\widehat{B}_t^{\Delta^{h_{t+i-e}-h_t}} \right)^{-1}, & e-t \leq i \leq e-1 \end{cases}$$

и

$$h'_i = \begin{cases} h_{t+i} + h_0 - h_t, & 0 \leq i \leq e-t-1, \\ h_{i-e+t} - h_t, & e-t \leq i \leq e-1; \end{cases}$$

2) $f = [\delta^{-1} \varepsilon_t^{-1} \Pi^{e-t}]_{F,G} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}'}(F, G)$, где F и G — формальные группы с логарифмами λ и μ ;

3) $f \equiv x^{q^{h_t}} \pmod{\Pi^{e-t}}$.

3. Преобразование наборов чисел. Рассмотрим преобразование, которое отображает набор из e натуральных чисел (h_0, \dots, h_{e-1}) в другой набор из e натуральных чисел

$$(h_0, h_{t+1} + h_0 - h_t, \dots, h_{e-1} + h_0 - h_t, h_0 - h_t, \dots, h_{t-1} - h_t),$$

где t — наименьший индекс, для которого достигается минимум h_0, \dots, h_{e-1} , т. е. $h_i > h_t$ при $0 \leq i \leq t-1$ и $h_i \geq h_t$ при $t+1 \leq i \leq e-1$.

Для начального набора (h_0, \dots, h_{e-1}) рекурсивно определим последовательность индексов: $t_0 = e$ и t_{j+1} — наименьший индекс, для которого достигается минимум h_0, \dots, h_{t_j-1} , т. е. $0 \leq t_{j+1} \leq t_j - 1$ и $h_i > h_{t_{j+1}}$ при $0 \leq i \leq t_{j+1} - 1$; $h_i \geq h_{t_{j+1}}$ при $t_{j+1} + 1 \leq i \leq t_j - 1$. Поскольку индексы t_j строго убывают, существует индекс r такой, что $t_r = 0$.

Для единообразия предположим, что $h_e = 0$.

Пример. Для шестерки чисел $(5, 3, 2, 3, 1, 4)$ последовательность индексов выглядит как $4, 2, 1, 0$. Последовательность шестерок:

$$(5, 3, 2, 3, 1, 4) \xrightarrow{\text{I}} (5, 8, 4, 2, 1, 2) \xrightarrow{\text{II}} (5, 6, 4, 7, 3, 1) \\ \xrightarrow{\text{III}} (5, 4, 5, 3, 6, 2) \xrightarrow{\text{IV}} (5, 3, 2, 3, 1, 4).$$

Лемма 1. После j последовательных преобразований, $1 \leq j \leq r$, набор чисел становится равным $(h_0^{(j)}, \dots, h_{e-1}^{(j)})$, где

$$h_i^{(j)} = \begin{cases} h_{t_j+i} + h_0 - h_{t_j}, & 0 \leq i \leq e-t_j-1, \\ h_{i-e+t_j} - h_{t_j}, & e-t_j \leq i \leq e-1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. База индукции $j = 1$ тривиальна. Применим преобразование к набору

$$(h_0, h_{t_j+1} + h_0 - h_{t_j}, \dots, h_{e-1} + h_0 - h_{t_j}, h_0 - h_{t_j}, \dots, h_{t_j-1} - h_{t_j}),$$

который обозначим за (h'_0, \dots, h'_{e-1}) . Тогда

$$h'_i = \begin{cases} h_{t_j+i} + h_0 - h_{t_j}, & 0 \leq i \leq e - t_j - 1, \\ h_{i-e+t_j} - h_{t_j}, & e - t_j \leq i \leq e - 1. \end{cases}$$

Сначала докажем, что индекс t' , удовлетворяющий $h'_i > h'_{t'}$, при $0 \leq i \leq t' - 1$ и $h'_i \geq h'_{t'}$, при $t' + 1 \leq i \leq e - 1$, равен $e - t_j + t_{j+1}$. Действительно, $h'_i = h_{t_j+i} + h_0 - h_{t_j} > h_{t_{j+1}} - h_{t_j} = h'_{e-t_j+t_{j+1}}$ при $0 \leq i \leq e - t_j - 1$ и $h'_i = h_{i-e+t_j} - h_{t_j} > h_{t_{j+1}} - h_{t_j} = h'_{e-t_j+t_{j+1}}$ при $e - t_j \leq i \leq e - t_j + t_{j+1} - 1$. Более того, $h'_i = h_{i-e+t_j} - h_{t_j} \geq h_{t_{j+1}} - h_{t_j} = h'_{e-t_j+t_{j+1}}$ при $e - t_j + t_{j+1} + 1 \leq i \leq e - 1$.

Обозначим за $(h''_0, \dots, h''_{e-1})$ набор чисел, получающийся из (h'_0, \dots, h'_{e-1}) . Тогда при $t' = e - t_j + t_{j+1}$ имеем

$$h''_i = \begin{cases} h'_{t'+i} + h'_0 - h'_{t'} & = (h_{t_{j+1}+i} - h_{t_j}) + h_0 - (h_{t_{j+1}} - h_{t_j}), \\ h'_{i-e+t'} - h'_{t'} & = (h_{t_{j+1}+i} + h_0 - h_{t_j}) - (h_{t_{j+1}} - h_{t_j}), \\ h'_{i-e+t'} - h'_{t'} & = (h_{i-e+t_{j+1}} - h_{t_j}) - (h_{t_{j+1}} - h_{t_j}), \end{cases}$$

$$= \begin{cases} h_{t_{j+1}+i} + h_0 - h_{t_{j+1}}, & 0 \leq i \leq e - t' - 1 = t_j - t_{j+1} - 1, \\ h_{t_{j+1}+i} + h_0 - h_{t_{j+1}}, & e - t' = t_j - t_{j+1} \leq i \leq e - t_{j+1} - 1, \\ h_{i-e+t_{j+1}} - h_{t_{j+1}}, & e - t_{j+1} \leq i \leq e - 1, \end{cases}$$

что доказывает индукционный переход. \square

В результате имеем $h_i^{(r)} = h_i, 0 \leq i \leq e - 1$, т.е. после r преобразований последовательность наборов зацикливается.

4. Основная теорема. Рассмотрим формальную группу F над \mathcal{O} конечной высоты с логарифмом λ типа

$$(B_0 \blacktriangle^{h_0}, B_1 \blacktriangle^{h_1}, \dots, B_{e-1} \blacktriangle^{h_{e-1}}),$$

где $B_i \in E^*$ для всех $1 \leq i \leq e - 1$. Теорема 2 позволяет построить цепочку формальных групп над \mathcal{O}

$$F = F_0 \xrightarrow{f_1} F_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_r} F_r,$$

где $f_j \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F_{j-1}, F_j), f_j \equiv x^{q^{h_j^*}} \pmod{\pi_j}$ и $f_j \equiv \pi_j x \pmod{\text{deg } 2}$ для некоторых $h_j^* \geq 1, \pi_j \in \mathcal{O}$ с $1 \leq \nu(\pi_j) \leq e$ при $j \geq 1$.

Теорема 3. Формальная группа $F_j, 0 \leq j \leq r$, имеет логарифм $\lambda^{(j)}$ с $|\lambda^{(j)}|_0 = \widehat{B}_{t_j} |\lambda|_0^{\Delta^{h_{t_j}}}$ типа $(B_0^{(j)} \blacktriangle^{h_0^{(j)}}, B_1^{(j)} \blacktriangle^{h_1^{(j)}}, \dots, B_{e-1}^{(j)} \blacktriangle^{h_{e-1}^{(j)}})$, где $h_i^{(j)}, 1 \leq i \leq e - 1$, определены в лемме 1 и $B_i^{(j)} \in E^*, 0 \leq i \leq e - 1$, определены как

$$B_i^{(j)} = \begin{cases} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_j+i} B_0^{\Delta^{h_{t_j+i}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_j+i}+h_0-h_{t_j}}} \right)^{-1}, & 0 \leq i \leq e - t_j - 1, \\ \delta^{-1} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_j+i-e} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_j+i-e}-h_{t_j}}} \right)^{-1}, & e - t_j \leq i \leq e - 1. \end{cases}$$

При этом $h_{j+1}^* = h_{t_{j+1}} - h_{t_j}$ и $\pi_{j+1} = \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} \Pi^{t_j - t_{j+1}}$, где $\varepsilon_e = \delta^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулы для $|\lambda^{(j)}|_0$ и $B_i^{(j)}$ индукцией по j . База $j = 1$ следует из теоремы 2.

Для $1 \leq i \leq e - 1$ обозначим $B_i^{(j)}$ через C_i . По индукционному предположению имеем

$$|\lambda^{(j)}|_0 = \widehat{B}_{t_j} |\lambda|_0^{\Delta^{h_{t_j}}}$$

и

$$C_i = \begin{cases} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_j+i} B_0^{\Delta^{h_{t_j+i}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_j+i}+h_0-h_{t_j}}} \right)^{-1}, & 0 \leq i \leq e - t_j - 1, \\ \delta^{-1} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_j+i-e} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_j+i-e}-h_{t_j}}} \right)^{-1}, & e - t_j \leq i \leq e - 1. \end{cases}$$

По теореме 2 и лемме 1 получаем

$$B_i^{(j+1)} = \begin{cases} (\varepsilon'_{t'})^{-1} C_{t'+i} C_0^{\Delta^{h'_{t'+i}}} \left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i}+h'_0-h'_{t'}}} \right)^{-1}, & 0 \leq i \leq e - t' - 1, \\ \delta^{-1} (\varepsilon'_{t'})^{-1} C_{t'+i-e} \left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i-e}-h'_{t'}}} \right)^{-1}, & e - t' \leq i \leq e - 1, \end{cases}$$

где $C_{t'} = \varepsilon'_{t'} \widehat{C}_{t'}$, $\widehat{C}_{t'} \in E^*$,

$$h'_i = h_i^{(j)} = \begin{cases} h_{t_j+i} + h_0 - h_{t_j}, & 0 \leq i \leq e - t_j - 1, \\ h_{i-e+t_j} - h_{t_j}, & e - t_j \leq i \leq e - 1 \end{cases}$$

и $t' = e - t_j + t_{j+1}$. Заметим, что $h'_{t'} = h_{t_{j+1}} - h_{t_j}$ и

$$C_{t'} = \delta^{-1} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}} \right)^{-1},$$

откуда $\varepsilon'_{t'} = \delta^{-1} \varepsilon_{t_j}^{-1} \varepsilon_{t_{j+1}}$ и $\widehat{C}_{t'} = \widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}} \right)^{-1}$.

Начнем с того, что

$$|\lambda^{(j+1)}|_0 = \widehat{C}_{t'} |\lambda^{(j)}|_0^{\Delta^{h'_{t'}}} = \widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}} \right)^{-1} \left(\widehat{B}_{t_j} |\lambda|_0^{\Delta^{h_{t_j}}} \right)^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}} = \widehat{B}_{t_{j+1}} |\lambda|_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}}}},$$

что дает требуемый результат для $|\lambda^{(j)}|_0$. Для того, чтобы получить формулу для типов, рассмотрим по отдельности три случая.

Случай I ($0 \leq i \leq t_j - t_{j+1} - 1$). Имеем

$$C_{t'+i} = \delta^{-1} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_{j+1}+i} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}-h_{t_j}}} \right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} C_0^{\Delta^{h'_{t'+i}}} &= \left(\widehat{B}_{t_j} B_0^{\Delta^{h_{t_j}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_0}} \right)^{-1} \right)^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}-h_{t_j}}} = \\ &= \widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}-h_{t_j}}} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}+h_0-h_{t_j}}} \right)^{-1} \end{aligned}$$

и

$$\left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i}+h'_0-h'_{t'}}} \right)^{-1} = \left(\left(\widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}}-h_{t_j}}} \right)^{-1} \right)^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}-h_{t_j}+h_0-(h_{t_{j+1}}-h_{t_j})}} \right)^{-1} =$$

$$= \widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_j}}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1},$$

откуда

$$B_i^{(j+1)} = \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}.$$

Случай II ($t_j - t_{j+1} \leq i \leq e - t_{j+1} - 1$). Здесь

$$C_{t'+i-e} = \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_{j+1}+i} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_j}}}}} \right)^{-1}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i-e}-h'_{t'}}} \right)^{-1} &= \left(\left(\widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}-h_{t_j}}}} \right)^{-1} \right)^{\Delta^{(h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_j})-(h_{t_{j+1}-h_{t_j})}}} \right)^{-1} = \\ &= \widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_j}}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

что дает

$$B_i^{(j+1)} = \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}.$$

Случай III ($e - t_{j+1} \leq i \leq e - 1$). Аналогично,

$$C_{t'+i-e} = \delta^{-1} \varepsilon_{t_j}^{-1} B_{t_{j+1}+i-e} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e-h_{t_j}}}}} \right)^{-1}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\widehat{C}_{t'}^{\Delta^{h'_{t'+i-e}-h'_{t'}}} \right)^{-1} &= \left(\left(\widehat{B}_{t_{j+1}} \left(\widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}-h_{t_j}}}} \right)^{-1} \right)^{\Delta^{(h_{t_{j+1}+i-e-h_{t_j})-(h_{t_{j+1}-h_{t_j})}}} \right)^{-1} = \\ &= \widehat{B}_{t_j}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e-h_{t_j}}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$B_i^{(j+1)} = \delta^{-1} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i-e} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}.$$

В результате получаем

$$B_i^{(j+1)} = \begin{cases} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i} B_0^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i}}} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i+h_0-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}, & 0 \leq i \leq e - t_{j+1} - 1, \\ \delta^{-1} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} B_{t_{j+1}+i-e} \left(\widehat{B}_{t_{j+1}}^{\Delta^{h_{t_{j+1}+i-e-h_{t_{j+1}}}}} \right)^{-1}, & e - t_{j+1} \leq i \leq e - 1, \end{cases}$$

что и доказывает индукционный переход.

Наконец, h_{j+1}^* определено выше, как $h'_{t'} = h_{t_{j+1}} - h_{t_j}$ и $\pi_{j+1} = \delta^{-1} \varepsilon_{t'}^{-1} \Pi^{e-t'} = \varepsilon_{t_j} \varepsilon_{t_{j+1}}^{-1} \Pi^{t_j - t_{j+1}}$. \square

Из теоремы 3 следует, что логарифм $\lambda^{(r)}$ формальной группы F_r имеет тип

$$\left(B_0^{(r)} \blacktriangle^{h_0}, B_1^{(r)} \blacktriangle^{h_1}, \dots, B_{e-1}^{(r)} \blacktriangle^{h_{e-1}} \right),$$

где

$$|\lambda^{(r)}|_0 = \widehat{B}_0 |\lambda|_0^{\Delta^{h_0}}$$

и

$$B_i^{(r)} = \varepsilon_0^{-1} B_i B_0^{\Delta^{h_i}} \left(\widehat{B}_0^{\Delta^{h_i}} \right)^{-1} = \varepsilon_0^{-1} B_i \varepsilon_0^{\Delta^{h_i}}.$$

Продолжим цепочку формальных групп с помощью теоремы 2:

$$F = F_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_r} F_r \xrightarrow{f_{r+1}} F_{r+1} \xrightarrow{f_{r+2}} \dots.$$

Пусть $f_s \equiv \pi_s x \pmod{\deg 2}$ и $f_s \equiv x^{q^{h_s^*}} \pmod{\pi_s}$, $s \geq 1$. Положим $\varepsilon_{(0)} = 1$ и $\varepsilon_{(m)} = \varepsilon_0 \varepsilon_0^{\Delta^{h_0}} \dots \varepsilon_0^{\Delta^{(m-1)h_0}}$, $m \geq 1$.

Лемма 2. При $1 \leq j \leq r$, $m \geq 0$ имеем $h_{rm+j}^* = h_{t_j} - h_{t_{j-1}}$ и

$$\pi_{rm+j} = \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_{j-1}}}} \left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_j}}} \right)^{-1} \varepsilon_{t_{j-1}} \varepsilon_{t_j}^{-1} \Pi^{t_{j-1}-t_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, логарифм $\lambda^{(rm)}$ формальной группы F_{rm} имеет тип

$$\left(B_0^{(rm)} \blacktriangle^{h_0}, B_1^{(rm)} \blacktriangle^{h_1}, \dots, B_{e-1}^{(rm)} \blacktriangle^{h_{e-1}} \right),$$

где $B_i^{(rm)} = \varepsilon_{(m)}^{-1} B_i \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_i}} \equiv \varepsilon_{(m)}^{-1} \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_i}} \varepsilon_i \pmod{\blacktriangle}$.

Тогда первое равенство очевидно, а второе следует из теоремы 3, где

$$\pi_{rm+j} = \left(\varepsilon_{(m)}^{-1} \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_{j-1}}}} \varepsilon_{t_{j-1}} \right) \left(\varepsilon_{(m)}^{-1} \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_j}}} \varepsilon_{t_j} \right)^{-1} \Pi^{t_{j-1}-t_j}.$$

□

Теперь для любого $m \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \pi_{rm+1} \dots \pi_{rm+r} &= \\ &= \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_0}}} \left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_1}}} \right)^{-1} \varepsilon_{t_0} \varepsilon_{t_1}^{-1} \Pi^{t_0-t_1} \cdot \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_1}}} \left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_2}}} \right)^{-1} \varepsilon_{t_1} \varepsilon_{t_2}^{-1} \Pi^{t_1-t_2} \dots \\ &\quad \dots \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_{r-1}}}} \left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_r}}} \right)^{-1} \varepsilon_{t_{r-1}} \varepsilon_{t_r}^{-1} \Pi^{t_{r-1}-t_r} = \\ &= \varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_0}}} \left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_{t_r}}} \right)^{-1} \varepsilon_{t_0} \varepsilon_{t_r}^{-1} \Pi^{t_0-t_r} = \varepsilon_{(m)} \left(\varepsilon_{(m)}^{\Delta^{h_0}} \right)^{-1} \delta^{-1} \varepsilon_0^{-1} \Pi^e = \left(\varepsilon_0^{\Delta^{mh_0}} \right)^{-1} \pi. \end{aligned}$$

Определим $f^{(s)} = f_s \circ \dots \circ f_1$, $s \geq 1$. Поскольку

$$\pi_1 \dots \pi_{rm} = \varepsilon_0^{-1} \pi \cdot \left(\varepsilon_0^{\Delta^{h_0}} \right)^{-1} \pi \dots \left(\varepsilon_0^{\Delta^{(m-1)h_0}} \right)^{-1} \pi = \varepsilon_{(m)}^{-1} \pi^m,$$

заключаем, что $f^{(rm)} \equiv \varepsilon_{(m)}^{-1} \pi^m x \pmod{\deg 2}$.

Далее получаем

$$h_{rm+1}^* + \dots + h_{rm+r}^* = (h_{t_1} - h_{t_0}) + (h_{t_2} - h_{t_1}) + \dots + (h_{t_r} - h_{t_{r-1}}) = h_{t_r} - h_{t_0} = h_0,$$

и следовательно, $f^{(rm)} \equiv x^{q^{h_0 m}} \pmod{\Pi}$.

5. Точки кручения. Пусть $\mathfrak{M}_{\hat{\Omega}}$ обозначает максимальный идеал пополнения алгебраического замыкания k . Положим $W_F^n = \{\alpha \in \mathfrak{M}_{\hat{\Omega}} : [\pi^n]_F(\alpha) = 0\}$.

Предложение 1.

1. $W_F^n = \{\alpha \in \mathfrak{M}_{\hat{\Omega}} : f^{(rn)}(\alpha) = 0\}$.
2. W_F^n является \mathcal{O}_1 -модулем мощности $q^{h_0 n}$, изоморфным $(\mathcal{O}_1/\pi^n \mathcal{O}_1)^{h_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Прямая проверка условий теоремы 2 из [4] показывает, что существует изоморфизм $[\varepsilon_{(n)}]_{F_{rn}, F}$ над \mathcal{O} , что дает требуемый результат.

2. Результат о мощности W_F^n следует из подготовительной леммы Вейерштрасса и сравнения $f^{(rn)} \equiv x^{q^{h_0 n}} \pmod{\Pi}$. Пусть $W_F^n \cong \bigoplus \mathcal{O}_1/\pi^{s_i} \mathcal{O}_1$ — прямое разложение W_F^n в качестве конечного \mathcal{O}_1 -модуля. Поскольку $[\pi^n]_F(\alpha) = 0$ для любого $\alpha \in W_F^n$, имеем $s_i \leq n$ и $W_F^1 \cong (\mathcal{O}_1/\pi \mathcal{O}_1)^{h_0}$. Из сюръективности $[\pi^{n-1}]_F : W_F^n \rightarrow W_F^1$ следует, что число компонент в приведенном выше разложении W_F^n с $s_i = n$ не меньше h_0 , поэтому все компоненты имеют такой вид. \square

Пусть M — максимальный идеал $k(W_F^n)$. Для $1 \leq j \leq r, m \geq 1$ положим

$$e_{m,j} = \frac{t_{j-1} - t_j}{(q^{h_{t_j}} - q^{h_{t_{j-1}}})q^{(m-1)h_0}}.$$

Предложение 2.

1. Для $\alpha \in M$ и натурального $s > 0$ имеем

$$f_s(\alpha) \equiv \begin{cases} \alpha q^{h_s^*} \pmod{M^{\nu(\alpha)q^{h_s^*}+1}}, & \nu(\alpha) < \frac{\nu(\pi_s)}{q^{h_s^*}-1}, \\ \pi_s \alpha \pmod{M^{\nu(\alpha)+\nu(\pi_s)+1}}, & \nu(\alpha) > \frac{\nu(\pi_s)}{q^{h_s^*}-1}, \\ \pi_s \alpha + \alpha q^{h_s^*} \pmod{M^{\nu(\alpha)+\nu(\pi_s)+1}}, & \nu(\alpha) = \frac{\nu(\pi_s)}{q^{h_s^*}-1}. \end{cases}$$

2. Если $\eta \in W_F^n \setminus W_F^{n-1}$, то $\nu(\eta) = e_{n,j}$ для некоторого $1 \leq j \leq r$.
3. Существует базис W_F^n , содержащий $h_{t_j} - h_{t_{j-1}}$ элементов с нормированием $e_{n,j}$ для каждого $1 \leq j \leq r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Это легко следует из того, что $\nu(f_s(\alpha)) = \nu(\pi_s \alpha + \alpha q^{h_s^*})$.

2. Во-первых, определим $V_F^s = \{\alpha \in F(\mathfrak{M}_{\hat{\Omega}}) : f^{(s)}(\alpha) = 0\}, s \leq rn$. Очевидно, что $V_F^{rm} = W_F^m$ и

$$W_F^n \setminus W_F^{n-1} = (V_F^{rn} \setminus V_F^{rn-1}) \cup (V_F^{rn-1} \setminus V_F^{rn-2}) \cup \dots \cup (V_F^{r(n-1)+1} \setminus V_F^{r(n-1)}).$$

Пусть $\zeta \in V_F^s \setminus V_F^{s-1}$. Тогда из того, что $f^{(s-1)}(\zeta) \neq 0$ и $f_s(f^{(s-1)}(\zeta)) = 0$, следует, что $\nu(f^{(s-1)}(\zeta)) = \frac{\nu(\pi_s)}{q^{h_s^*}-1}$. В свою очередь, из $\nu(f_{s-1}(f^{(s-2)}(\zeta))) = \frac{\nu(\pi_s)}{q^{h_s^*}-1}$ получаем

$\nu(f^{(s-2)}(\zeta)) = \frac{\nu(\pi_s)}{(q^{h_s^*}-1)q^{h_{s-1}^*}}$, поскольку $\frac{\nu(\pi_s)}{q^{h_s^*}-1} < \frac{e}{p-1} \leq 1 \leq \nu(\pi_{s-1})$. Продолжая, для $s = rm + j$ получаем $\nu(\zeta) = \frac{\nu(\pi_s)}{(q^{h_s^*}-1)q^{h_{s-1}^*+\dots+h_1^*}} = e_{m,j}$.

3. Поскольку $[\pi]_F(\alpha) = 0$ для любого $\alpha \in V_F^j$ при $1 \leq j \leq r$, имеем $V_F^j \cong (\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_1^*+\dots+h_j^*}$ как \mathcal{O}_1 -модуль. Теперь выберем h_1^* элементов в качестве базиса $V_F^1 \cong (\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_1^*}$, затем добавим h_2^* элементов, чтобы получить базис $V_F^2 \cong (\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_1^*+h_2^*}$ и т. д., в конце получаем базис $W_F^1 \cong (\mathcal{O}_1/\pi\mathcal{O}_1)^{h_0}$. Для каждого α из этого базиса выберем $\alpha' \in W_F^n$ такое, что $[\pi^{n-1}]_F(\alpha') = \alpha$, что дает базис W_F^n с требуемыми свойствами. \square

Предложение 3. *Расширение $k(W_F^1)/k$ содержит неразветвленное подрасширение степени*

$$\text{НОК}(h_{t_1}, h_{t_2} - h_{t_1}, \dots, h_{t_{r-1}} - h_{t_{r-2}}, h_0 - h_{t_{r-1}}).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого $1 \leq j \leq r$ поле $k(W_F^1)$ содержит ζ , примитивный корень $(q^{h_j^*}-1)$ -й степени из единицы для $h_j^* = h_{t_j} - h_{t_{j-1}}$. Напомним, что $f_j \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F_{j-1}, F_j)$, $f_j \equiv x^{q^{h_j^*}} \pmod{\pi_j}$ и $f_j \equiv \pi_j x \pmod{\text{deg } 2}$. Из теоремы 6 из [4] следует, что существуют формальные группы G, G' над \mathcal{O} такие, что G, F_{j-1} и G', F_j имеют один и тот же тип, и $g \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(G, G')$ для $g(x) = \pi_j x + x^{q^{h_j^*}}$. Тогда эти пары формальных групп строго изоморфны. Пусть φ — строгий изоморфизм из F_{j-1} в G и φ' — строгий изоморфизм из F_j в G' , при этом $\varphi' \circ f_j = g \circ \varphi$.

Пусть $\eta \in \mathfrak{M}_{\hat{\mathcal{O}}}$ — какой-то ненулевой корень f_j . Для $\xi \in \mathfrak{M}_{\hat{\mathcal{O}}}$ такого, что $f_j^{(j-1)}(\xi) = \eta$, имеем $\xi \in V_F^j \subset k(W_F^1)$, откуда $\eta \in k(W_F^1)$. Если $\eta' = \varphi^{-1}(\zeta\varphi(\eta))$ и $\varphi' \circ f_j \circ \varphi^{-1}(\zeta\varphi(\eta)) = g(\zeta\varphi(\eta)) = \zeta g(\varphi(\eta)) = \zeta\varphi'(f_j(\eta)) = 0$, то $f_j(\eta') = 0$ и $\eta' \in k(W_F^1)$. Таким образом, $\zeta = \varphi(\eta')/\varphi(\eta) \in k(W_F^1)$, что и требовалось доказать. \square

Литература

1. Honda T. On the theory of commutative formal groups // J. Math. Soc. Japan. 1970. Vol. 22. P. 213–246.
2. Бенца Д. Г., Востоков С. В. Норменное спаривание в формальных группах и представления Галуа // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. Вып. 6. С. 69–97.
3. Демченко О. В. Формальные группы Хонды: арифметика группы точек // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. Вып. 1. С. 132–149.
4. Демченко О. В. Формальные группы над p -адическими кольцами целых с малым ветвлением и выделенные изогении // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. Вып. 3. С. 55–85.
5. Демченко О. В. Новое в отношениях формальных групп Любина — Тэйта и формальных групп Хонды // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. Вып. 5. С. 77–84.

Статья поступила в редакцию 8 мая 2020 г.;
после доработки 17 июня 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Демченко Олег Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доц.; o.demchenko@spbu.ru
Востоков Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, проф.; s.vostokov@spbu.ru

Torsion points of generalized Honda formal groups*

O. V. Demchenko, S. V. Vostokov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Demchenko O. V., Vostokov S. V. Torsion points of generalized Honda formal groups. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 597–606. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.403> (In Russian)

Generalized Honda formal groups are a new class of formal groups that in particular describes the formal groups over the ring of integers of local fields weakly ramified over \mathbb{Q}_p . It is the next class in the chain *the multiplicative formal group* — *Lubin — Tate formal groups* — *Honda formal groups*. Lubin — Tate formal groups are defined by distinguished endomorphisms $[\pi]_F$, Honda formal groups possess distinguished homomorphisms that factor through $[\pi]_F$ and in the present paper we prove that for generalized Honda formal groups it is compositions of distinguished homomorphisms that factor through $[\pi]_F$. As an application of this fact, some properties of π^n -torsion points of generalized Honda formal groups are studied.

Keywords: formal groups, torsion points.

References

1. Benois D. G., Vostokov S. V., “Norm pairing in formal groups and Galois representations”, *Leningrad Math. J.* **2** (6), 1221–1249 (1991).
2. Demchenko O., “New relationship between formal Lubin — Tate groups and formal Honda groups”, *St. Petersburg Math. J.* **10** (5), 785–789 (1999).
3. Demchenko O. V., “Honda formal groups: the arithmetic of the group of points”, *St. Petersburg Math. J.* **12** (1), 101–115 (2001).
4. Demchenko O. V., “Formal groups over p -adic rings of integers with small ramification and distinguished isogenies”, *St. Petersburg Math. J.* **14** (3), 405–428 (2003).
5. Honda T., “On the theory of commutative formal groups”, *J. Math. Soc. Japan* **22**, 213–246 (1970).

Received: May 8, 2020

Revised: June 17, 2020

Accepted: June 18, 2020

Authors' information:

Oleg V. Demchenko — o.demchenko@spbu.ru

Sergei V. Vostokov — s.vostokov@spbu.ru

*This work was supported by Russian Science Foundation (grant no. 16-11-10200).