УДК 512.62 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4
MSC 11S15, 14B25

Сравнение классификаций двумерных локальных полей, тип II*

О. Ю. Иванова[1], *И. Б. Жуков*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Российская Федерация, 190000, Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 67
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Иванова О. Ю., Жуков И. Б.* Сравнение классификаций двумерных локальных полей, тип II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 607–621.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.404

Статья относится к теории устранения высшего ветвления для двумерных полей и продолжает исследования, связанные с классификацией полей, введенной в работе Масато Курихары. Рассматриваются двумерные локальные поля смешанной характеристики с конечным полем вычетов, для которых характеристика поля вычетов отлична от двух. Хорошо известна структура полей, которые слабо неразветвлены над своим подполем констант — так называемых стандартных полей. Также известно, что из любого поля можно получить стандартное конечным расширением его подполя констант. Вопрос о наименьшей степени такого расширения в общем случае остается открытым. В статье Курихары двумерные поля подразделяются на два типа следующим образом. Рассматривается линейное соотношение между дифференциалами локальных параметров. Если нормирование коэффициента при униформизирующей меньше, чем нормирование коэффициента перед вторым локальным параметром, поле относится к типу I, в противном случае — к типу II. В настоящей статье изучаются поля типа II. Для них рассматривается уточнение инварианта Курихары: для каждого поля вводится величина Δ, равная разности нормирований коэффициентов в соотношении для дифференциалов локальных параметров. Степень константного расширения, устраняющего ветвление, для любого поля не меньше, чем индекс ветвления над подполем констант. При этом расширение такой степени существует не для всех полей. В статье доказано, что для существования расширения наименьшей возможной степени достаточно, чтобы величина Δ принимала достаточно большие по модулю значения. Соответствующая оценка на величину Δ зависит от индекса ветвления поля над его подполем констант.

Ключевые слова: высшие локальные поля, дикое ветвление.

1. Введение. Настоящая работа продолжает исследование связи обобщенной классификации Курихары с теорией устранения ветвления, начатое в [1–4].

Рассматриваются двумерные локальные поля смешанной характеристики, для которых характеристика поля вычетов равна $p > 2$ и последнее поле вычетов конечно. Двумерное поле смешанной характеристики называется стандартным, если $e_{K/k} = 1$, где k — подполе констант поля K. Структура стандартного поля известна,

*Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 16-11-10200).

для него выполнено

$$K \simeq k\{\{t\}\} = \Big\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i, \quad v(a_i) \gg -\infty, \quad v(a_i) \underset{i\to-\infty}{\longrightarrow} \infty \Big\}.$$

В работах [5, 6], посвященных теории ветвления, доказано, что для любого двумерного поля существует конечное константное расширение, превращающее это поле в стандартное. Естественным образом возникает вопрос о минимальной степени расширения, превращающего данное поле в стандартное. Легко видеть, что эта степень не может быть меньше, чем $e_{K/k}$. Однако оценить эту степень сверху через $e_{K/k}$ нельзя — даже в случае $e_{K/k} = p$ она может быть сколь угодно большой.

В работах [3, 4] получены оценки снизу для минимальной степени подходящего расширения, зависящие от величины Δ (см. формулу (2) ниже), связанной с классификацией полей, введенной в [7] (см. также [8]), для случая, когда поле является полем типа I в этой классификации, то есть величина Δ положительна. В этих работах доказано, что если величина Δ для данного поля может принимать большие значения, то минимальная степень расширения велика.

В настоящей работе рассматриваются поля типа II. Доказано, что если для поля K величина Δ принимает достаточно большие по модулю отрицательные значения, то существует константное расширение, превращающее K в стандартное, степень которого равна $e_{K/k}$, то есть наименьшему возможному числу. Получающееся при этом расширение поля K не содержит неразветвленных подрасширений степени p. Получены две оценки на величину Δ: одна зависит только от $v_p(e_{K/k})$, другая — от $v_p(e_{K/k})$ и глубины ветвления расширения $e_{K/k\{\{t\}\}}$.

2. Предварительные сведения. Будем использовать следующие обозначения: p — фиксированное простое число, $p > 2$; $v_p(x)$ — p-адическое нормирование p-адического числа x.

Для дискретно нормированного поля F обозначим через v_F его нормирование, через $\overline{F}$ — его поле вычетов, и, если $char F = 0$, $char \overline{F} = p$, положим $e_F = v_F(p)$. Через O_F обозначим кольцо целых поля F. Элемент π такой, что $v_F(\pi) = 1$, называется униформизирующей поля F.

Определение 2.1. Пусть E/F — конечное расширение дискретно нормированных полей. Оно называется

неразветвленным, если $e_{E/F} = 1$, и расширение $\overline{E}/\overline{F}$ сепарабельно;
свирепым, если $e_{E/F} = 1$, и расширение $\overline{E}/\overline{F}$ чисто несепарабельно;
вполне разветвленным, если $e_{E/F} = |E : F|$.

Определение 2.2. *Глубиной ветвления* расширения E/F называется

$$d_{E/F} = \frac{1}{e_E} \min\Big\{ v_E\Big(\frac{Tr_{E/F} a}{a}\Big) \mid a \in E^* \Big\}.$$

Нам понадобятся следующие свойства глубины: если $F \subset E \subset L$, то

$$d_{E/F} + d_{L/E} = d_{L/F} \tag{1}$$

(см. [9], леммы 2–4); для любого поля L выполнено $d_{EL/FL} \le d_{E/F}$.

Определение 2.3. *Двумерным локальным полем смешанной характеристики* называется такое поле, что $charK = 0$, для $K^{(1)} = \overline{K}$ выполнено $charK^{(1)} \neq 0$, и поле $K^{(0)} = \overline{K}^{(1)}$ конечно.

Далее под двумерным полем будем понимать двумерное поле K смешанной характеристики, для которого выполнено $char\overline{K} = p$. Двумерному полю соответствуют локальные параметры: униформизирующая и второй локальный параметр, то есть такой элемент $t \in O_K$, что $\overline{t}$ — униформизирующая поля $\overline{K}$.

Пусть K — двумерное поле. Обозначим через R_K — каноническую подгруппу K^*, состоящую из подъемов ненулевых элементов поля $K^{(0)}$.

Определение 2.4. *Подполем констант двумерного поля* K называется максимальное поле $k \subset K$, являющееся алгебраическим расширением $\mathbb{Q}_p$.

Лемма 2.5. *Пусть k — подполе констант поля K. Тогда $R_K \subset k$.*

Доказательство. Поле $K^{(0)}$ конечно, следовательно, подгруппа R_K конечна. Все ее элементы алгебраичны над $\mathbb{Q}_p$. □

Определение 2.6. Двумерное поле K называется *стандартным*, если $e_{K/k} = 1$, где k — подполе констант поля K.

Если K — стандартное двумерное поле с подполем констант k, и t — второй локальный параметр K, то $K = k\{\{t\}\}$ (см. [10, § 1] или [11]), и любое поле вида $k\{\{t\}\}$, где k — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$, является стандартным.

В [7] двумерные поля разделяются на два типа следующим образом. Пусть K — двумерное поле, π, t — его локальные параметры. Тогда $(\hat{\Omega}_{O_K/\mathbb{Z}})_{tors}$ порождается одним элементом $ad\pi + bdt$. Поле K называется полем типа I, если $v_K(b) > v_K(a)$, и полем типа II в противном случае (см. [7, лемма 1.1 и следствие 1.2]).

Пусть K — двумерное поле, k — его подполе констант. В [1] доказано, что вместо дифференциалов над $\mathbb{Z}$ можно рассматривать дифференциалы над O_k. Пусть π, t — локальные параметры K. Положим

$$\Delta_K(\pi, t) = \frac{1}{e_K}(v_K(b) - v_K(a)), \tag{2}$$

где для $a, b \in O_K$ выполнено $ad\pi + bdt = 0$ в $(\Omega_{O_K/O_k})_{tors}$. Величина $\Delta_K(\pi, t)$ не зависит от выбора a и b. Поле K имеет тип I тогда и только тогда, когда $\Delta(\pi, t) > 0$. Для поля типа I величина $\Delta_K(\pi, t)$ зависит только от π, а для поля типа II — только от t (см. [1, предложение 3.2 и следствие 4.4]). Для полей типа II мы будем использовать обозначение $\Delta_K(t) = \Delta_K(\pi, t)$, где π — произвольная униформизирующая.

Далее, для двумерного поля K и $a \in K$ элемент da будет пониматься как элемент Ω_{O_K/O_k}. Равенство $da = db$ будет пониматься как равенство в $(\Omega_{O_K/O_k})_{tors}$.

Определение 2.7. Пусть $K = k\{\{t\}\}$ — стандартное двумерное поле. Для элемента $x \in K$ определим формальную производную $\frac{\partial x}{\partial t}$ следующим образом: если $a_i \in k$ таковы, что $x = \sum a_i t^i$, то положим $\frac{\partial x}{\partial t} = \sum a_i i t^{i-1}$.

Определение корректно. Если ряд $\sum a_i t^i$ сходится, то и ряд $\sum a_i i t^{i-1}$ сходится. Кроме того, элемент $\frac{\partial x}{\partial t}$ зависит от x и t, но не зависит от поля k, то есть если k_1 и k_2 — два локальных поля, таких что $x \in k_1\{\{t\}\} \cap k_2\{\{t\}\}$, то формальные производные x по t, взятые в полях $k_1\{\{t\}\}$ и $k_2\{\{t\}\}$, будут совпадать.

Заметим, что для любого x выполнено

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt.$$

Также нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.8. *Пусть $K = k\{\{t\}\}$ — стандартное поле, π_k — униформизирующая поля K, и $x = \sum \theta_{i,j} \pi_k^i t^j$, где $\theta_{i,j} \in R_K \cup \{0\}$. Тогда*

$$v_K\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\Big) = \min\{i + e_K v_p(j) \mid \theta_{i,j} \neq 0\}.$$

Доказательство. См. [1, лемма 4.5]. ☐

Сформулируем и докажем лемму, связывающую следы степеней элемента и коэффициенты его минимального многочлена.

Лемма 2.9. *Пусть F — произвольное поле, $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ — сепарабельный неприводимый над F многочлен, a — корень f. Тогда при $1 \le i \le n-1$ выполнено*

$$Tr_{E/F}(a^i) = -\sum_{s=1}^{i-1} c_{n-i+s} Tr_{E/F}(a^s) - ic_{n-i}.$$

Доказательство. Пусть $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ — все элементы, сопряженные с a над F. Для любого i обозначим i-й элементарный симметрический многочлен от $a_1, \ldots, a_n$ через σ_i, их i-ю степенную сумму — через p_i, положим $c_n = \sigma_0 = 1$. Тогда

$$\sigma_i = (-1)^i c_{n-i}, \qquad p_i = Tr_{E/F}(a^i).$$

Запишем тождества Ньютона для симметрических многочленов:

$$i\sigma_i = \sum_{s=1}^{i} (-1)^{s-1} \sigma_{i-s} p_s.$$

Подставим выражения из предыдущей формулы:

$$i(-1)^i c_{n-i} = \sum_{s=1}^{i} (-1)^{i-1} c_{n-(i-s)} Tr_{E/F}(a^s) =$$

$$= -(-1)^i \Big(\sum_{s=1}^{i-1} c_{n-i+s} Tr_{E/F}(a^s) + Tr_{E/F}(a^i)\Big).$$

Разделив на $(-1)^i$, получаем нужное тождество. ☐

3. Соотношения между дифференциалами локальных параметров.

Лемма 3.1. *Пусть L/K — неразветвленное расширение двумерных полей, $p \nmid |L : K|$. Пусть t — второй локальный параметр поля K. Тогда существует второй локальный параметр t_1 поля L и $m \in L$ такие, что $v_L(m) = 0$ и $dt = m dt_1$.*

Доказательство. Положим $q = e_{L/K}$. Имеем $v_L(t) = 0$, $v_{\overline{L}}(\overline{t}) = q$. Следовательно, существуют второй локальный параметр t_1 поля L и $\theta \in R_L$ такие, что $t = \theta t_1^q$ (см. [12, теорема 2]). Этот второй локальный параметр и $m = \theta q t_1^{q-1}$ удовлетворяют условию. □

Следствие 3.2. *Пусть K — поле типа* II, *L/K — неразветвленное расширение степени q, $p \nmid q$, t — второй локальный параметр поля K. Тогда L — поле типа* II, *и существует второй локальный параметр t_1 поля L такой, что $\Delta_K(t) = \Delta_L(t_1)$.*

Лемма 3.3. *Пусть $L_0 \subset L_1$ — стандартные двумерные поля, L_1/L_0 — свирепое расширение степени p. Пусть t и t_1 — вторые локальные параметры полей L_0 и L_1. Тогда существует $m \in L_1$ такой, что $v_{L_1}(m) = e_{L_1} d_{L_1/L_0}$ и $dt = m dt_1$.*

Доказательство. Расширение $\overline{L}_1/\overline{L}_0$ несепарабельно, $\overline{L}_1 = \overline{L}_0(\overline{t}_1)$, следовательно,

$$t_1^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i t_1^i = 0,$$

где $v_{L_0}(c_i) > 0$ при $i \geq 1$, $v_{L_0}(c_0) = 0$, $v_{\overline{L}_0}(\overline{c}_0) = 1$. Так как поле L_0 стандартное, то $L_0 = l\{\{t\}\}$, где l — подполе констант поля L_0.

Пусть π_l — униформизирующая поля l,

$$c_0 = \sum [\theta_{i,j}] \pi_l^i t^j, \qquad \theta_{i,j} \in \overline{l}.$$

Тогда $\theta_{i,j} = 0$ при $i < 0$, и $\theta_{0,1} \neq 0$. По лемме 2.8 выполнено

$$v_{L_0}\Big(\frac{\partial c_0}{\partial t}\Big) = \min\{i + e_{L_0} v_p(j) \mid \theta_{i,j} \neq 0\}.$$

Следовательно,

$$v_{L_0}\Big(\frac{\partial c_0}{\partial t}\Big) = 0.$$

Положим

$$s = \min\Big\{e_{L_1}, \min\big\{v_{L_1}(c_i) \mid 1 \leq i \leq p-1\big\}\Big\}.$$

Имеем

$$0 = d\Big(t_1^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i t_1^i\Big) = \Big(p t_1^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} i c_i t_1^{i-1}\Big) dt_1 + \Big(\sum_{i=1}^{p-1} \Big(\frac{\partial c_i}{\partial t}\Big) t_1^i + \frac{\partial c_0}{\partial t}\Big) dt.$$

Следовательно, для

$$m = -\frac{p t_1^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} i c_i t_1^{i-1}}{\sum_{i=1}^{p-1} \big(\frac{\partial c_i}{\partial t}\big) t_1^i + \frac{\partial c_0}{\partial t}}$$

выполнено равенство $dt = m dt_1$. Имеем $v_{L_1}(m) = s$.

Докажем, что

$$e_{L_1} d_{L_1/L_0} = s.$$

Имеем $Tr_{L_1/L_0} t_1^0 = Tr_{L_1/L_0} 1 = p$, и по лемме 2.9 при $1 \leq i \leq p-1$ выполнено

$$Tr_{L_1/L_0}(t_1^i) = -c_{p-1} Tr_{L_1/L_0}(t_1^{i-1}) - \cdots - c_{p-i+1} Tr_{L_1/L_0}(t_1) - i c_{p-i}.$$

Следовательно,

$$\min\Big\{v_{L_1}\big(Tr_{L_1/L_0}(t_1^i)\big) \mid 0 \le i \le p-1\Big\} = s. \tag{3}$$

Пусть l — общее подполе констант полей L_0 и L_1. Тогда $L_0 = l\{\{t\}\}$, $L_1 = l\{\{t_1\}\}$. Любой $x \in L_1$ можно представить в виде

$$x = \sum_{0 \le i \le p-1} a_i t_1^i, \qquad a_i \in l.$$

Имеем

$$v_{L_1}\Big(\frac{Tr_{L_1/L_0}x}{x}\Big) \ge \frac{\min\Big\{v_{L_1}\big(a_i Tr_{L_1/L_0}(t_1^i)\big) \mid 0 \le i \le p-1\Big\}}{\min\Big\{v_{L_1}(a_i) \mid 0 \le i \le p-1\Big\}} \ge$$
$$\ge \min\Big\{v_{L_1}\big(Tr_{L_1/L_0}(t_1^i)\big) \mid 0 \le i \le p-1\Big\}.$$

Учитывая (3), получаем

$$e_{L_1} d_{L_1/L_0} = s.$$

□

Лемма 3.4. *Пусть K — поле типа* II, *и $c \in K$. Тогда существует $m \in K$ такой, что $v_K(m) \ge v_K(c) - 1$ и $dc = m d\pi$.*

Доказательство. Пусть π, t — локальные параметры поля K, k — подполе констант поля K. Положим $K_0 = k\{\{t\}\}$, $s = v_K(c)$. Расширение $K/k\{\{t\}\}$ вполне разветвлено, следовательно, $O_K = O_{K_0}[\pi]$. Элемент c можно представить в виде

$$c = \pi^s \sum_{i=0}^{p-1} c_i \pi^i, \qquad c_i \in K_0.$$

Пусть $a, b \in K$ таковы, что $a d\pi + b dt = 0$. Так как K — поле типа II, то $v_K(b) \le v_K(a)$. Имеем

$$dc = \pi^s \sum_{i=0}^{p-1}\Big(i c_i \pi^{i-1} d\pi + \Big(\frac{\partial c_i}{\partial t}\Big)\pi^i dt\Big) + s\pi^{s-1}\Big(\sum_{i=0}^{p-1} c_i \pi^i\Big) d\pi,$$

следовательно,

$$m = \sum_{i=0}^{p-1} i c_i \pi^{s+i-1} - \frac{a}{b}\pi^s \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial c_i}{\partial t}\pi^i + s\sum_{i=0}^{p-1} c_i \pi^{i+s-1}$$

удовлетворяет условию. □

4. Случай $e_{K/k} = p$.

Лемма 4.1. *Пусть K — двумерное поле, k — подполе констант поля K, $e(K/k) = p$. Пусть π, t — локальные параметры поля K, $K_0 = k\{\{t\}\}$,*

$$x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i$$

— минимальный многочлен для π над K_0. Тогда следующие условия равносильны:

1) *поле K имеет тип* II,
2) *выполняется неравенство*

$$pv_{K_0}\Big(\frac{\partial c_0}{\partial t}\Big) \le \min\Big\{pe_{K_0}+p-1, \min\big\{pv_{K_0}(c_i)+i-1 \mid 1\le i\le p-1\big\}\Big\}.$$

Доказательство. Имеем

$$0 = d\Big(\pi^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i\pi^i\Big) = \Big(p\pi^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} ic_i\pi^{i-1}\Big)d\pi + \Big(\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial c_i}{\partial t}\pi^i\Big)dt.$$

Положим

$$a = p\pi^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} ic_i\pi^{i-1}, \qquad b = \sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial c_i}{\partial t}\pi^i.$$

Тогда выполнено $ad\pi + bdt = 0$, и, следовательно, условие 1 равносильно тому, что то $v_K(b) \le v_K(a)$.

Имеем

$$v_K(a) = \min\Big\{pe_{K_0}+p-1, \min\big\{pv_{K_0}(c_i)+i-1 \mid 1\le i\le p-1\big\}\Big\}. \tag{4}$$

При $1 \le i \le p-1$ выполнено

$$v_K\Big(\frac{\partial c_i}{\partial t}\pi^i\Big) \ge pv_{K_0}(c_i)+i > v_K(a),$$

следовательно, условие $v_K(b) \le v_K(a)$ равносильно тому, что

$$v_K\Big(\frac{\partial c_0}{\partial t}\Big) \le v_K(a).$$

Учитывая (4) и равенство $e_{K/K_0} = e_{K/k} = p$, получаем, что это условие равносильно условию 2. □

Лемма 4.2. *Пусть K — поле типа* II, *k — подполе констант поля K, $e(K/k) = p$. Пусть π, t — локальные параметры поля K, $K_0 = k\{\{t\}\}$,*

$$x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_ix^i$$

— минимальный многочлен для π над K_0,

$$c_0 = \sum_{\substack{i\ge 1\\ j\in\mathbb{Z}}} \theta_{i,j}\pi_k^i t^j, \qquad \theta_{i,j} \in R_{K_0}\cup\{0\}.$$

Тогда существуют i, j такие, что $i \le e_{K_0}$, $p \nmid j$, $\theta_{i,j} \ne 0$.

Доказательство. По лемме 4.1 выполнено

$$pv_{K_0}\Big(\frac{\partial c_0}{\partial t}\Big) \le pe_{K_0}+p-1.$$

Следовательно,
$$v_{K_0}\Big(\frac{\partial c_0}{\partial t}\Big) \le \Big[\frac{pe_{K_0}+p-1}{p}\Big] = e_{K_0}.$$
Из леммы 2.8 следует, что существуют такие i, j, что
$$i + e_{K_0} v_p(j) \le e_{K_0}, \qquad \theta_{i,j} \ne 0.$$
При $i \ge 1$ это неравенство может выполняться только, если
$$i \le e_{K_0}, \qquad v_p(j) = 0.$$
$\square$

Лемма 4.3. *Пусть $L_0 = l\{\{t\}\}$, π_l — униформизирующая поля l, $c_i \in L_0$ при $0 \le i \le p-1$ таковы, что $v_{L_0}(c_i) \ge p$, $v_{L_0}(c_0) = p$,*
$$c_0 = \sum_{\substack{i\ge 1\\ j\in\mathbb{Z}}} \theta_{i,j}\pi_l^{pi}t^j, \qquad \theta_{i,j} \in R_{L_0} \cup \{0\},$$
существуют i, j такие, что $i \le \frac{e_{L_0}}{p}$, $p \nmid j$, $\theta_{i,j} \ne 0$, $L = L_0(x)$, где
$$x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i = 0.$$
Тогда L/L_0 — свирепое расширение степени p.

Доказательство. Положим
$$i_0 = \min\{i \mid p \nmid j, \theta_{i,j} \ne 0 \text{ для некоторого } j\},$$
$$c_0' = \sum_{p\mid j} \theta_{i,j}^{1/p}\pi_l^{i}t^{j/p}, \qquad c_0'' = \sum_{p\nmid j} \theta_{i,j}\pi_l^{pi}t^{j},$$
$$y_1 = x + c_0', \qquad y = \pi_l^{-i_0} y_1,$$
Имеем $L = L_0(y)$. Достаточно доказать, что $v_{L_0}(y) = 0$, и $\overline{y}^p \in \overline{L}_0 \setminus \overline{L}_0^p$.

Имеем
$$v_L(c_0') \ge e_{L/L_0}, \qquad v_L(c_0'') = e_{L/L_0}pi_0,$$
$$v_L(x) = \frac{1}{p} v_L(c_0) = e_{L/L_0},$$
следовательно,
$$v_L(y_1) \ge e_{L/L_0},$$
$$v_L\Big((y_1 - c_0')^p - y_1^p + {c_0'}^p\Big) \ge e_L + e_{L/L_0}p.$$
Кроме того,
$$v_L(c_0 - (c_0')^p - c_0'') = v_L\Big(\sum_{p\mid j}\theta_{i,j}\pi_l^{pi}t^j - \Big(\sum_{p\mid j}\theta_{i,j}^{1/p}\pi_l^{i}t^{j/p}\Big)^p\Big) \ge e_L + e_{L/L_0}p.$$

Имеем

$$y_1^p + c_0'' + \sum_{i=1}^{p-1} c_i x^i + \Big((y_1 - c_0')^p - y_1^p + {c_0'}^p\Big) + (c_0 - (c_0')^p - c_0'') = 0,$$

следовательно, $v_L(y_1^p + c_0'') > e_L \geq v_L(c_0'')$. Получаем, что

$$v_L(y_1) = \frac{1}{p} v_L(c_0'') = e_{L/L_0} i_0, \qquad v_L(y) = 0$$

и

$$\overline{y}^p = -\overline{\pi_l^{-pi_0} c_0''} \in \overline{L}_0 \setminus \overline{L}_0^p.$$

□

Лемма 4.4. *Пусть K — поле типа* II*, k — подполе констант поля K, $e(K/k) = p$, π_k — униформизирующая поля k. Тогда поле $K(\sqrt[p]{\pi_k})$ стандартное, и расширение $K(\sqrt[p]{\pi_k})/K$ свирепое.*

Доказательство. Пусть t — второй локальный параметр поля K, $K_0 = k\{\{t\}\}$, $l = k(\sqrt[p]{\pi_k})$, $\pi_l = \sqrt[p]{\pi_k}$, $L_0 = l\{\{t\}\}$, $L = K(\sqrt[p]{\pi_k})$. Пусть π — униформизирующая поля K,

$$f(x) = x^p + \sum_{i=0}^{p-1} c_i x^i$$

— минимальный многочлен для π над K_0,

$$c_0 = \sum_{\substack{i\geq 1\\ j\in\mathbb{Z}}} \theta_{i,j} \pi_k^i t^j, \qquad \theta_{i,j} \in R_{K_0} \cup \{0\}.$$

Из леммы 4.2, примененной к расширению K/K_0, следует, что существуют i, j такие, что

$$i \leq e_{K_0} = \frac{e_{L_0}}{p}, \qquad p \nmid j, \qquad \theta_{i,j} \neq 0.$$

Имеем $L = L_0(\pi)$ и многочлен $f(x)$ является минимальным многочленом для π над l_0. Коэффициент c_0 можно записать как

$$c_0 = \sum_{\substack{i\geq 1\\ j\in\mathbb{Z}}} \theta_{i,j} \pi_l^{pi} t^j, \qquad \theta_{i,j} \in R_{L_0} \cup \{0\}.$$

Таким образом, к расширению L/L_0 и $x = \pi$ можно применить лемму 4.3. Получаем, что L/L_0 — свирепое расширение степени p. Из этого следует, что поле L стандартное.

Расширения K/K_0 и L_0/K_0 вполне разветвлены, расширение L/L_0 свирепое, следовательно, расширение L/K свирепое. □

5. Основные результаты.

Лемма 5.1. *Пусть $K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ — двумерные поля, k — их общее подполе констант, поле K_0 стандартное, K_{i+1}/K_i — вполне разветвленные расширения степени p, π_k — униформизирующая поля k, поля K_i при $i \geq 1$ имеют тип* II, *существует общий второй локальный параметр t полей K_i при $i \geq 0$ такой, что $\Delta_{K_i}(t) \leq -d_{K_{i-1}/K_0}$ при $i \geq 1$. Тогда поле $K_n(\sqrt[p^n]{\pi_k})$ стандартное, и расширение $K_n(\sqrt[p^n]{\pi_k})/K_n$ свирепое.*

Доказательство. Индукция по n. Для $n = 1$ утверждение доказано в лемме 4.4. Докажем переход от $n-1$ к n.

Положим $\pi_l = \sqrt[p]{\pi_k}$, $L_i = K_i(\pi_l)$. Применяя лемму 4.4 к полю K_1, получаем, что поле L_1 стандартное, расширение L_1/K_1 свирепое. Из того, что расширение L_1/K_1 свирепое, расширения L_0/K_0 и K_{i+1}/K_i вполне разветвлены, следует, что расширение L_1/L_0 свирепое, расширения L_{i+1}/L_i при $i \geq 1$ вполне разветвлены, расширения L_i/K_i при $i \geq 1$ свирепы. Пусть t_1 — второй локальный параметр поля L_1 и $m \in L_1$ таковы, как в лемме 3.3. Пусть π_i — произвольные униформизирующие полей K_i, и $a_i, b_i \in K_i$ таковы, что $a_i d\pi_i + b_i dt = 0$. Тогда выполнено

$$\frac{1}{e_{K_i}}\big(v_{K_i}(b_i) - v_{K_i}(a_i)\big) = \Delta_{K_i}(t) \leq -d_{K_{i-1}/K_0},$$

а также выполнено $a_i d\pi_i + m b_i dt_1 = 0$. Элементы π_i и t_1 являются локальными параметрами полей L_i. Имеем

$$\begin{aligned}\Delta_{L_i}(\pi_i, t_1) = \frac{1}{e_{L_i}}\big(v_{L_i}(mb_i) - v_{L_i}(a_i)\big) = \\ = \frac{1}{e_{K_i}}\big(v_{K_i}(b_i) - v_{K_i}(a_i)\big) + \frac{1}{e_{L_1}} v_{L_1}(m) \leq \\ \leq -d_{K_{i-1}/K_0} + d_{L_1/L_0} \leq -d_{L_{i-1}/L_0} + d_{L_1/L_0} = -d_{L_{i-1}/L_1}.\end{aligned}$$

Получаем, что поля $L_1 \subset \cdots \subset L_n$, униформизирующая π_l поля l и второй локальный параметр t_1 удовлетворяют предположению индукции. Следовательно, поле

$$L_n(\sqrt[p^{n-1}]{\pi_l}) = L_n(\sqrt[p^n]{\pi_k}) = K_n(\sqrt[p^n]{\pi_k})$$

стандартное, расширение $K_n(\sqrt[p^n]{\pi_k})/L_n$ свирепое, и расширение $K_n(\sqrt[p^n]{\pi_k})/K_n$ свирепое как башня двух свирепых. □

Предложение 5.2. *Пусть $k\{\{t\}\} \subset K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ — двумерные поля, k — их общее подполе констант, $K_0/k\{\{t\}\}$ — вполне разветвленное расширение степени q, где $p \nmid q$, K_{i+1}/K_i — вполне разветвленные расширения степени p, поля K_i при $i \geq 1$ имеют тип* II, *$\Delta_{K_i}(t) \leq -d_{K_{i-1}/K_0}$ при $i \geq 1$. Тогда*

1) *существует поле l_0 такое, что $|l_0 : k| = q$, поле l_0K_0 стандартное, расширение l_0K_n/K_n неразветвлено, расширение $l_0K_0/l_0\{\{t\}\}$ неразветвлено;*

2) *для любого поля l_0, удовлетворяющего условию 1 и для любой униформизирующей π_0 поля l_0 поле $l_0K_n(\sqrt[p^n]{\pi_0})$ стандартное, и расширение $l_0K_n(\sqrt[p^n]{\pi_0})/l_0K_n$ свирепое.*

Доказательство. 1) По лемме 3.3.2 из [6], примененной к расширению $K_0/k\{\{t\}\}$, существует такое поле l_0, что $|l_0 : k|$ является делителем q, расширение $l_0K_0/l_0k\{\{t\}\}$ неразветвлено и l_0 — подполе констант поля l_0K_0. Имеем

$$l_0k\{\{t\}\} = l_0\{\{t\}\},$$

это поле стандартное, следовательно, поле l_0K_0 тоже стандартное. Из того, что $K_0/k\{\{t\}\}$ вполне разветвлено, следует, что $|l_0 : k| = q$, расширение l_0/k вполне разветвлено, расширения l_0K_0/K_0 и $l_0K_0/l_0\{\{t\}\}$ неразветвлены. Из неразветвленности расширения l_0K_0/K_0 следует неразветвленность расширений l_0K_i/K_i для любого i.

2) Проверим, что для полей l_0K_i выполнено условие леммы 5.1.

Так как расширения l_0K_i/K_i неразветвлены, то l_0K_{i+1}/l_0K_i — вполне разветвленные расширения степени p, и для любого i выполнено

$$d_{l_0K_{i-1}/l_0K_0} = d_{K_{i-1}/K_0}.$$

По лемме 3.1, примененной к расширению $l_0K_0/l_0\{\{t\}\}$, существуют $m \in l_0K_0$ и второй локальный параметр t_1 поля lK_0 такие, что $v_{lK_0}(m) = 0$ и $dt = mdt_1$. Пусть π_i — униформизирующие полей K_i, и a_i, b_i таковы, что $a_i d\pi_i + b_i dt = 0$. Тогда π_i, t_1 — локальные параметры поля l_0K_i для любого i, выполнены равенства $a_i\pi_i + (mb_i)dt_1 = 0$ и

$$\Delta_{l_0K_i}(t_1) = \frac{1}{e_{l_0K_i}}(v_{l_0K_i}(mb_i) - v_{l_0K_i}(a_i)) = \frac{1}{e_{K_i}}(v_{K_i}(b_i) - v_{K_i}(a_i)) = \Delta_{K_i}(t).$$

□

Лемма 5.3. *Пусть K — поле типа* II, *t — второй локальный параметр поля K, k — подполе констант поля K, и поле M таково, что $k\{\{t\}\} \subset M \subset K$, $|K : M| = p$,*

$$\Delta_K(t) \le -d_{K/M} - \frac{p-1}{e_K}.$$

Тогда M — поле типа II, *и*

$$\Delta_M(t) = \Delta_K(t) + d_{K/M} + \frac{p-1}{e_K}.$$

Доказательство. Достаточно найти униформизирующую π_M поля M такую, что

$$\Delta_M(\pi_M, t) = \Delta_K(t) + d_{K/M} + \frac{p-1}{e_K}.$$

Пусть униформизирующие π_K, π_M полей K и M таковы, что

$$\pi_K^p + \sum_{i=1}^{p-1} c_i\pi_K^i + \pi_M = 0,$$

где $c_i \in M$, $v_M(c_i) \ge 1$. По лемме 3.4 существуют такие m_i, что

$$v_M(m_i) \ge v_M(c_i) - 1, \qquad dc_i = m_i d\pi_M.$$

Имеем

$$\Big(p\pi_K^{p-1}+\sum_{i=1}^{p-1} ic_i\pi_K^{i-1}\Big)d\pi_K+\Big(\sum_{i=1}^{p-1} m_i\pi_K^i+1\Big)d\pi_M=0.$$

Положим

$$s=\min\Big\{e_K+p-1,\min\big\{v_K(c_i)+i-1\mid 1\le i\le p-1\big\}\Big\},$$

$$m=-\frac{p\pi_K^{p-1}+\sum_{i=1}^{p-1} ic_i\pi_K^{i-1}}{\sum_{i=1}^{p-1} m_i\pi_K^i+1}.$$

Тогда $d\pi_M=md\pi_K$. Докажем, что $v_K(m)=s$. Имеем

$$v_K\Big(p\pi_K^{p-1}+\sum_{i=1}^{p-1} ic_i\pi_K^{i-1}\Big)=s.$$

При $1\le i\le p-1$ выполнено

$$v_K(m_i\pi_K^i)=pv_M(m_i)+i\ge p(v_M(c_i)-1)+i>0,$$

следовательно,

$$v_K\Big(\sum_{i=1}^{p-1} m_i\pi_K^i+1\Big)=0.$$

Пусть $a_K,b_K\in K$ таковы, что $a_Kd\pi_K+b_Kdt=0$. Тогда

$$a_Kd\pi_M+mb_Kdt=0,$$

и, следовательно,

$$\Delta_M(\pi_M,t)=\frac{1}{e_M}(v_M(mb_K)-v_M(a_K))=$$
$$=\frac{1}{e_K}(v_K(b_K)-v_K(a_K))+\frac{1}{e_K}v_K(m)=\Delta_K(t)+\frac{1}{e_K}s.$$

Из того, что $O_K=O_M[\pi_K]$, следует, что

$$d_{K/M}=\frac{1}{e_K}\min\Big\{v_K\Big(\frac{Tr_{K/M}(\pi_K^i)}{\pi_K^i}\Big)\mid 0\le i\le p-1\Big\}.$$

Имеем

$$\frac{Tr_{K/M}\pi_K^0}{\pi_K^0}=Tr_{K/M}1=p,$$

и по лемме 2.9 при $1\le i\le p-1$ выполнено

$$\frac{Tr_{K/M}(\pi_K^i)}{\pi_K^i}=-\frac{c_{p-1}}{\pi_K}\frac{Tr_{K/M}(\pi_K^{i-1})}{\pi_K^{i-1}}-\dots-\frac{c_{p-i+1}}{\pi_K^{i-1}}\frac{Tr_{K/M}(\pi_K)}{\pi_K}-i\frac{c_{p-i}}{\pi_K^i}. \qquad (5)$$

Положим

$$s'=\min\big\{v_K(c_i)-p+i\mid 1\le i\le p-1\big\}.$$

Тогда
$$s' = \min\Big\{v_K\Big(\frac{c_{p-i}}{\pi_K^i}\Big) \mid 1 \le i \le p-1\Big\}.$$
Применяя формулу (5) последовательно к $i = 1, \dots, p-1$, получаем, что
$$\min\Big\{v_K\Big(\frac{Tr_{K/M}(\pi_K^i)}{\pi_K^i}\Big) \mid 0 \le i \le p-1\Big\} \ge s',$$
и для
$$i_0 = \min\Big\{i \mid v_K\Big(\frac{c_{p-i}}{\pi_K^i}\Big) = s', 1 \le i \le p-1\Big\}$$
выполнено
$$v_K\Big(\frac{Tr_{K/M}(\pi_K^i)}{\pi_K^i}\Big) = s'$$
Следовательно,
$$e_K d_{K/M} = \min\{e_K, s'\} = s - (p-1).$$
Таким образом,
$$\Delta_M(\pi_M, t) = \Delta_K(t) + \frac{1}{e_K}(e_K d_{M/K} + p - 1).$$
□

Теорема 5.4. *Пусть K — двумерное поле типа* II, *k — его подполе констант, t — второй локальный параметр поля K, $e_{K/k} = p^n q$, где $q \nmid p$, и выполнено хотя бы одно из условий*

а) $\Delta_K(t) \le -(n-1) - \frac{p^{n-1}-1}{e_K}$,

б) $\Delta_K(t) \le -d_{K/k\{\{t\}\}} - \frac{p^{n-1}-1}{e_K}$.

Тогда существует расширение l/k степени $p^n q$ такое, что поле lK стандартное, и расширение lK/K является композитом неразветвленного расширения степени q и свирепого расширения степени p^n.

Если поле l_0 таково, что l_0/k — вполне разветвленное расширение степени q и l_0K/K — неразветвленное расширение, и π_0 — униформизирующая поля l, то в качестве поля l можно взять поле $l_0(\sqrt[p^n]{\pi_0})$.

Доказательство. Пусть
$$k\{\{t\}\} \subset K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K$$
таковы, что $K_0/k\{\{t\}\}$ — вполне разветвленное расширение степени q, и K_{i+1}/K_i — вполне разветвленные расширения степени p. Применяя лемму 5.3 и (1) к расширениям $K_n/K_{n-1}, \dots, K_{i+1}/K_i$, получаем, что
$$\Delta_{K_i}(t) = \Delta_{K_n}(t) + d_{K_n/K_i} + \frac{p-1}{e_{K_n}} + \dots + \frac{p-1}{e_{K_{i+1}}}.$$
По [6, предложение 1.4] выполнено $d_{K_{i+1}/K_i} \le 1$; учитывая (1), получаем, что $d_{K_n/K_i} \le n-i$. Таким образом, в случае *а* правая часть не больше, чем
$$-(n-1) - \frac{p^{n-1}-1}{e_K} + (n-i) + \frac{p-1}{e_K}(1 + p + \dots + p^{n-i-1}) \le -(i-1).$$

В случае *б* правая часть не больше, чем

$$-d_{K_n/K_0} - \frac{p^{n-1}-1}{e_K} + d_{K_n/K_i} + \frac{p-1}{e_K}(1+p+\dots+p^{n-i-1}) \le -d_{K_i/K_0}.$$

В обоих случаях правая часть не превосходит $-d_{K_{i-1}/K_0}$, следовательно, для полей $K_0, K_1, \ldots, K_n$ выполнено условие предложения 5.2. $\square$

Литература

1. *Иванова О. Ю.* О связи классификации Курихары с теорией устранения ветвления // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 2. С. 130–153.

2. *Иванова О. Ю.* Классификация Курихары и расширения максимальной глубины для многомерных локальных полей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 6. С. 42–76.

3. *Ivanova O., Vostokov S., Zhukov I.* On two approaches to classification of higher local fields // Чебышёвский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 177–189.

4. *Востоков С. В., Жуков И. Б., Иванова О. Ю.* Инварианты Курихары и устранение высшего ветвления // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2020. В печати.

5. *Epp H.* Eliminating wild ramification // Invent. Math. 1973. Vol. 19. P. 235–249.

6. *Жуков И. Б., Коротеев М. В.* Устранение высшего ветвления // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 6. С. 153–177.

7. *Kurihara M.* On two types of complete discrete valuation fields // Compos. Math. 1987. Vol. 63. P. 237–257.

8. *Kurihara M.* Two types of complete discrete valuation fields. In: Geometry & Topology Monographs. 2000. Vol. 3. Invitation to higher local fields. P. 109–112. https://doi.org/10.2140/gtm.2000.3.109

9. *Hyodo O.* Wild ramification in the imperfect residue field case. In: Adv. Stud. Pure Math. 1987. Vol. 12. Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry. P. 287–314. https://doi.org/10.2969/aspm/01210287

10. *Жуков И. Б., Мадунц А. И.* Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия // Тр. С.-Петерб. мат. общ-ва. 1995. Т. 3. С. 4–46.

11. *Zhukov I.* Higher dimensional local fields. In: Geometry & Topology Monographs. 2000. Vol. 3. Invitation to higher local fields. P. 5–18. https://doi.org/10.2140/gtm.2000.3.5

12. *Жуков И. Б., Мадунц А. И.* Аддитивные и мультипликативные разложения в многомерных локальных полях // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 272. С. 186–196.

Статья поступила в редакцию 16 мая 2020 г.;
после доработки 17 июня 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Иванова Ольга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук; olgaiv80@mail.ru

Жуков Игорь Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; i.zhukov@spbu.ru

Comparison of classifications of 2-dimensional local fields, type II*

O. Yu. Ivanova, I. B. Zhukov

[1] St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
67, Bolshaya Morskaya ul., St. Petersburg, 190000, Russian Federation

[2] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ivanova O. Yu., Zhukov I. B. Comparison of classifications of 2-dimensional local fields, type II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 607–621. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.404 (In Russian)

*This work was supported by Russian Science Foundation (grant no. 16-11-10200).

The article contributes to the theory of elimination of wild ramification for 2-dimensional local fields. It continues the study of classification of complete discrete valuation fields introduced in the work of Masato Kurihara. The main object of study is a 2-dimensional local field K of mixed characteristic with a finite residue field of odd characteristic. If such a field is weakly unramified over its constant subfield k (the maximal usual local field inside it), i. e., if $e_{K/k} = 1$, its structure is well known. It is also known that any 2-dimensional local field can be turned into a standard one by means of a finite extension of its constant subfield (Epp's theorem). However, the estimate of the minimal degree of such extension is an open question in general. In Kurihara's article the 2-dimensional are subdivided into 2 types as follows. Consider a non-trivial linear relation between differentials of the two local parameters of the field. The field belongs to Type I, if the valuation of the coefficient by the uniformizer is less than that by the second local parameter, and to Type II otherwise. This paper is devoted to the fields of Type II. For them we consider the invariant Δ, the difference between valuations of coefficients in the above mentioned linear relation (it is non-positive for the fields of Type II). The minimal degree of the required extension of k cannot be less than $e_{K/k}$ for trivial reasons. However, such extension of degree $e_{K/k}$ does not exist in general. In this article it is proved that it exists if the absolute value of Δ is sufficiently large. The corresponding estimate for Δ depends only on $e_{K/k}$.

Keywords: higher local fields, wild ramification.

References

1. Ivanova O. Yu., "On connection of Kurihara's classification with the theory of elimination of ramification", *St. Petersburg Math. J.* **24**(2), 283–299 (2013).

2. Ivanova O. Yu., "Kurihara classification and maximal depth extensions for multidimensional local fields", *St. Petersburg Math. J.* **24**(6), 877–901 (2012).

3. Ivanova O. Yu., Vostokov S. V., Zhukov I. B., "On two approaches to classification of higher local fields", *Chebyshevskii Sbornik* **20**(2), 177–189 (2019).

4. Vostokov S. V., Zhukov I. B., Ivanova O. Yu., "Kurihara's invariants and elimination of wild ramification", *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, in press.

5. Epp H., "Eliminating wild ramification", *Invent. Math.* **19**, 235–249 (1973).

6. Zhukov I. B., Koroteev M. V., "Elimination of wild ramification", *St. Petersburg Math. J.* **11**(6), 1063–1083 (2000).

7. Kurihara M., "On two types of complete discrete valuation fields", *Compos. Math.* **63**, 237–257 (1987).

8. Kurihara M., "Two types of complete discrete valuation fields", in *Geometry & Topology Monographs, vol. 3. Invitation to higher local fields*, 109–112 (2000). https://doi.org/10.2140/gtm.2000.3.109

9. Hyodo O., "Wild ramification in the imperfect residue field case", in: *Adv. Stud. Pure Math., vol. 12. Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry*, 287–314 (1987). https://doi.org/10.2969/aspm/01210287

10. Zhukov I. B., Madunts A. I., "Multidimensial complete fields: topology and other basic constructions", *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society* **3**, 4–46 (1995).

11. Zhukov I., "Higher dimensional local fields" in: *Geometry & Topology Monographs, vol. 3. Invitation to higher local fields*, 5–18 (2000). https://doi.org/10.2140/gtm.2000.3.5

12. Zhukov I. B., Madunts A. I., "Additive and multiplicative decompositions in multidimensional local fields", *J. Math. Sci. (N. Y.)* **116**(1), 2987–2992 (2003).

Received: May 16, 2020
Revised: June 17, 2020
Accepted: June 18, 2020

Authors' information:

Olga Yu. Ivanova — olgaiv80@mail.ru
Igor B. Zhukov — i.zhukov@spbu.ru