МАТЕМАТИКА

УДК 517.97
MSC 58E25

К вопросу компактности решений операторных неравенств, доставляемых частотной теоремой Лихтарникова — Якубовича*

М. М. Аникушин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Аникушин М. М.* К вопросу компактности решений операторных неравенств, доставляемых частотной теоремой Лихтарникова — Якубовича // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 622–635. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.405

В работе исследуется вопрос компактности решений операторных неравенств, возникающих в связи с частотной теоремой Лихтарникова — Якубовича для C_0-полугрупп. В работе получено описание операторного решения через решение некоторой сопряженной задачи, ранее известное в рамках предположений некоторой регулярности исходной задачи. Таким образом, получается связать компактность операторного решения с некоторой регулярностью полугруппы в общем случае. Мы также получаем теоремы, удобные для доказательства некомпактности операторных решений уравнений или неравенств Ляпунова, в которые вырождается операторное уравнение Риккати в некоторых случаях, возникающих в приложениях. На примере C_0-полугруппы, порожденной скалярным уравнением с запаздывающим аргументом, которое рассматривается в некотором гильбертовом пространстве, показано, что решение операторного неравенства не может быть компактным. Полученные результаты связаны с развитием автором одного метода нелокальной редукции для коциклов в гильбертовом пространстве и его приложениями.

Ключевые слова: частотная теорема, неравенство Ляпунова, компактный оператор, уравнения с запаздыванием.

*Данная работа выполнена при поддержке стипендией имени В. А. Рохлина для молодых математиков Санкт-Петербурга.

1. Введение. Пусть $\mathbb{H}$ и Ξ суть гильбертовы пространства над $\mathbb{C}$. Скалярные произведения и нормы в этих пространствах будем обозначать одинаково через $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ соответственно (это не приведет к недопониманию). Рассмотрим в $\mathbb{H}$ неограниченный линейный оператор $A\colon \mathcal{D}(A)\subset\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$ и предположим, что A является генератором C_0-полугруппы $G(t)$, $t\geq 0$, в $\mathbb{H}$ (см. [1]). Рассмотрим некоторый ограниченный оператор $B\in\mathcal{L}(\Xi,\mathbb{H})$. Уравнение

$$\dot{v}=Av+B\xi \tag{1.1}$$

будем называть *системой управления*. Хорошо известно, что для всякого $T>0$, всякой *функции управления* $\xi\in L^2(0,T;\Xi)$ и $v_0\in\mathbb{H}$ уравнение (1.1) имеет единственное решение (в обобщенном смысле[1]) $v(t)=v(t,v_0,\xi)$, $t\in[0,T]$, удовлетворяющее $v(0)=v_0$. Это решение является, вообще говоря, лишь непрерывной $\mathbb{H}$-значной функцией и дается формулой

$$v(t)=G(t)v_0+\int_0^t G(t-s)B\xi(s)ds. \tag{1.2}$$

Для всякого оператора $C\in\mathcal{L}(\mathbb{H},\Xi)$ оператор $A+BC$ будет генератором некоторой C_0-полугруппы $G_C(t)$, $t\geq 0$ (см. теорему 7.5 в [1]). Пару операторов (A,B) будем называть

1) *L_2-стабилизируемой*, если найдется оператор $C\in\mathcal{L}(\mathbb{H},\Xi)$ такой, что $G_C(t)v_0\in L_2(0,+\infty;\mathbb{H})$ для всех $v_0\in\mathbb{H}$;

2) *экспоненциально стабилизируемой*, если найдется $C\in\mathcal{L}(\mathbb{H},\Xi)$ такой, что для некоторых констант $M>0$ и $\varepsilon>0$ выполнено $\|G_C(t)\|\leq Me^{-\varepsilon t}$ для всех $t\geq 0$;

3) *L_2-управляемой*, если для всякого $v_0\in\mathbb{H}$ найдется функция $\xi\in L_2(0,+\infty;\Xi)$ такая, что $v(\cdot,v_0,\xi)\in L_2(0,+\infty;\mathbb{H})$.

Рассмотрим непрерывную эрмитову форму на $\mathbb{H}\times\Xi$:

$$F(v,\xi):=(F_1v,v)+2\operatorname{Re}(F_2v,\xi)+(F_3\xi,\xi), \tag{1.3}$$

где $F_1^*=F_1\in\mathcal{L}(\mathbb{H},\mathbb{H})$, $F_2\in\mathcal{L}(\mathbb{H},\Xi)$ и $F_3^*=F_3\in\mathcal{L}(\Xi,\Xi)$. Введем в рассмотрение величину

$$\alpha_2:=\inf\frac{F(v,\xi)}{|v|^2+|\xi|^2}, \tag{1.4}$$

где инфимум берется по всем тройкам $(\omega,v,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{H}\times\Xi$ таким, что $i\omega(v,w)=(v,A^*w)+(B\xi,w)$ выполняется для всех $w\in\mathcal{D}(A^*)$. Если оператор A не имеет спектра на мнимой оси и операторы $(A-i\omega I)^{-1}B$ равномерно по $\omega\in\mathbb{R}$ ограничены по норме пространства $\mathcal{L}(\Xi;\mathbb{H})$, то мы также рассмотрим величину

$$\alpha_3:=\inf_{\omega\in\mathbb{R}}\inf_{\xi\in\Xi}\frac{F((i\omega I-A)^{-1}B\xi,\xi)}{|\xi|^2}. \tag{1.5}$$

[1]От англ. mild solution.

Следующая теорема изначально была доказана А. Л. Лихтарниковым и В. А. Якубовичем в [2] (см. теорему 3) и спустя несколько лет была переоткрыта[2] Ж. К. Луисом и Д. Векслером в [3] (см. теорему 2).

Теорема 1. *Пусть пара (A, B) L_2-управляема. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Найдется самосопряженный ограниченный оператор $P^* = P \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ такой, что для некоторого $\delta > 0$ неравенство*

$$2\,\mathrm{Re}(Av + B\xi, Pv) + F(v, \xi) \geq \delta\left(|v|^2 + |\xi|^2\right) \tag{1.6}$$

   выполняется для всех $v \in \mathcal{D}(A)$ и $\xi \in \Xi$.

2. $\alpha_2 > 0$.

   Кроме того, если α_3 корректно определено (в указанном выше смысле), то условие 2 эквивалентно $\alpha_3 > 0$.

В данной работе исследуется вопрос компактности оператора P, возникающего в условиях теоремы 1. Такой вопрос возник в ходе развития автором одного метода нелокальной редукции для коциклов в гильбертовом пространстве [5], который приводит к абстрактному обобщению [6] теории Пуанкаре — Бендиксона, развитой Р. А. Смитом для некоторых параболических задач [7] и задач с запаздыванием. В работах [5] и [6] оператор P используется для построения так называемых квадратичных конусов высшего ранга, которые в совокупности с неравенством типа (1.6) позволяют строить инвариантные топологические многообразия при некоторых предположениях компактности[3]. В приложениях к нелинейным эволюционным уравнениям компактность оператора P влечет компактность разрешающих операторов за любое положительное время, что характерно для параболических задач и случая, когда оператор A ограничен (ввиду сглаживающих свойств соответствующих полугрупп). В то же время для уравнений с запаздыванием, рассматриваемых в подходящем гильбертовом пространстве, полугруппа обладает запаздывающим сглаживанием. Ниже мы покажем, что для таких уравнений оператор P, вообще говоря, не компактен. Полученные здесь результаты также можно рассматривать с точки зрения изучения взаимосвязей между свойствами полугруппы и свойствами решений операторных неравенств с участием генератора полугруппы (см., например, [8–10]).

Для нас существенным является то обстоятельство, что оператор P (или, более точно, одно из таких операторных решений) в теореме 1 можно получить как решение *операторного уравнения Риккати*:

$$(Av + B\xi, Pv) + \mathcal{F}(v, \xi) = |\mathcal{F}_3^{1/2}(\xi - hv)|^2,\ v \in \mathcal{D}(A), \xi \in \Xi. \tag{1.7}$$

[2]Тем не менее работа [3] содержит ряд полезных замечаний, как, например, утверждение леммы 10, из которого следует, что в частотной теореме для вырожденного случая частотное условие содержится в условии полуограниченности соответствующего функционала и его не надо требовать отдельно, как это сделано в [2]. Хотя к тому времени это обстоятельство, по всей видимости, было уже широко известно в связи с, например, работой [4].

[3]В конечномерной.

Здесь $\mathcal{F}(v,\xi) := (\mathcal{F}_1 v, v) + 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{F}_2 v, \xi) + (\mathcal{F}_3\xi, \xi)$, где $\mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \Xi)$ и $\mathcal{F}_3^* = \mathcal{F}_3 \in \mathcal{L}(\Xi)$, есть некоторая другая эрмитова форма[4]. Рассмотрим квадратичный функционал

$$J[v(\cdot), \xi(\cdot)] = \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(v(t), \xi(t))dt, \tag{1.8}$$

который непрерывен на $L_2(0,+\infty;\mathbb{H})\times L_2(0,+\infty;\Xi)$. Пара $(v(\cdot),\xi(\cdot)) \in L_2(0,+\infty;\mathbb{H})\times L_2(0,+\infty;\Xi)$, где $v(t) = v(t, v_0, \xi)$ для некоторого $v_0 \in \mathbb{H}$, называется *процессом* [2, 11]. Через $\mathfrak{M}_{v_0}$ мы обозначим множество всех процессов $(v(\cdot),\xi(\cdot))$, где $v(t) = v(t, v_0, \xi)$ (*процесс, проходящий через* v_0). Тогда $\mathfrak{M}_{v_0}$ в силу (1.2) есть замкнутое аффинное подпространство в $L_2(0,+\infty;\mathbb{H})\times L_2(0,+\infty;\Xi)$. Заметим, что условие L_2-управляемости в теореме 1 в точности означает, что множество $\mathfrak{M}_{v_0}$ не пусто при любом $v_0 \in \mathbb{H}$. Как показано в [2], при $\alpha_2 > 0$ (для формы $\mathcal{F}$) для всех v_0 существует единственный минимум $(v^0(\cdot, v_0), \xi^0(\cdot, v_0))$ (*оптимальный процесс*) функционала J на $\mathfrak{M}_{v_0}$, этот минимум является квадратичной формой на $\mathbb{H}$ и оператор этой квадратичной формы есть решение P уравнения (1.7):

$$J[v^0(\cdot, v_0), \xi^0(\cdot, v_0)] = (Pv_0, v_0). \tag{1.9}$$

Одним из результатов данной работы является описание оператора P через решение сопряженной задачи[5].

Теорема 2. *При вышеуказанных условиях для всякого $T > 0$ и $v_0 \in \mathbb{H}$ выполнено $Pv_0 = -\eta^0(0)$, где $\eta^0(t) = \eta^0(t, v_0)$ для $t \in [0, T]$ есть решение сопряженной задачи*

$$\begin{aligned} &\dot\eta(t) = -A^*\eta(t) + \mathcal{F}_1 v^0(t, v_0) + \mathcal{F}_2^*\xi^0(t, v_0), \\ &\eta(T) = -Pv^0(T, v_0). \end{aligned} \tag{1.10}$$

В работе [11] подобное описание дано в рамках предположений некоторой регулярности билинейной формы расширения оператора A. Здесь мы будем следовать основной идее из [11], но без использования регулярности. Соответствующая теорема из [11] позволяет установить компактность в некоторых параболических задачах с управлением на границе (см. [12, 10]). Как известно для таких задач, решение (1.10) сглаживается и потому $\eta^0(0) = -Pv_0$ лежит в некотором более узком пространстве $\mathbb{H}_1$, компактно вложенном в $\mathbb{H}$. Отсюда сразу же вытекает компактность оператора P (см. предложение 1 ниже). Наша теорема 2 позволяет это сделать для некоторых параболических задач, не прибегая к постановке из [11], которая к тому же не всегда возможна.

При $\xi = 0$ в (1.7) мы получаем *операторное уравнение Ляпунова*:

$$2\,\mathrm{Re}(Av, Pv) = (Qv, v),\ v \in \mathcal{D}(A), \tag{1.11}$$

где $Q^* = Q := h^*\mathcal{F}_3 h - \mathcal{F}_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$ удовлетворяет условию $(Qv, v) + (F_1 v, v) \geq \delta|v|^2$. В приложениях (в частности, в [5, 6, 9]) часто оказывается, что P есть решение уравнения Ляпунова с коэрцитивным[6] оператором Q (например, если $F_1 = 0$, то

[4]Оператор P из теоремы 1 можно, например, получить как решение уравнения Рикатти (1.7) с формой $\mathcal{F}(v,\xi) = F(v,\xi) - \frac{\alpha_2}{2}(|v|^2 + |\xi|^2)$.

[5]По всей видимости, впервые использование сопряженных задач в исследовании вопросов оптимального управления было начато Ж. Л. Лионсом [12].

[6]То есть таким Q, что $(Qv, v) \geq \delta_0|v|^2$ для некоторого $\delta_0 > 0$.

можно положить $\xi = 0$ в (1.7) для получения такого уравнения). В этом направлении мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть полугруппа $G(t)$ экспоненциально устойчива. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Для некоторой последовательности $v_k \in \mathbb{H}$, где $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходящейся к нулю, найдется $C > 0$ такое, что выполнено*

$$\int_0^{+\infty} |G(t)v_k|^2 dt \geq C > 0 \text{ при всех } k = 1, 2, \ldots. \tag{1.12}$$

2. *При любом коэрцитивном операторе $Q = Q^*$ решение $P = P^*$ уравнения Ляпунова (1.11) не компактно.*

В случае, если полугруппа не обязательно экспоненциально устойчивая, можно проделать следующее. Пусть $\mathbb{H}^s \subset \mathbb{H}$ есть $G(t)$-инвариантное подпространство такое, что $G(t)v_0 \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех $v_0 \in \mathbb{H}^s$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 1 теоремы 3, где соответствующая последовательность v_k лежит в $\mathbb{H}^s$. Тогда при любом $\delta > 0$ решение $P = P^*$ неравенства Ляпунова*

$$2\,\mathrm{Re}(Av, Pv) \geq \delta |v|^2 \tag{1.13}$$

не компактно.

Теоремы 3 и 4 доказываются в разделе 3, а в разделе 4 мы приводим пример их приложения для уравнений с запаздывающим аргументом.

Следует отметить, что для параболических задач удается показать, что оператор P не только компактен, но и имеет след[7] [10]. Это также имеет место для случая ограниченного оператора A (см. [13]). При исследовании уравнений с запаздыванием общего вида теорема 1 неприменима, так как в форму F могут входить δ-функционалы, которые неограничены в L_2 и потому форма F не является непрерывной в соответствующем гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Обобщение частотной теоремы, полностью охватывающей случай уравнений с запаздыванием, недавно получено автором в [14]. Условие L_2-управляемости во многих приложениях частотной теоремы является труднопроверяемым (упомянутые обобщения результатов Р. А. Смита, который не использовал подобное условие, но использовал частотное неравенство, подсказывают, что от этого условия следует избавиться). В этом направлении результаты получены в недавней работе А. В. Проскурникова [15] для частотной теоремы Лихтарникова — Якубовича, а их обобщение представлено в [14]. Использование квадратичных конусов (полученных с использованием частотной теоремы) для изучения почти периодических ОДУ (в частности, размерностных характеристик почти периодических решений) представлено в [16–19].

2. Доказательство теоремы 2. Далее мы везде предполагаем, что пара (A, B) L_2-управляема (т. е. множество процессов $\mathfrak{M}_{v_0}$ не пусто при любом $v_0 \in \mathbb{H}$) и для формы $\mathcal{F}$ из (1.7) и α_2 из (1.4) (с F, замененным на $\mathcal{F}$) выполнено условие $\alpha_2 > 0$.

Запишем функционал J из (1.8) как $J[w] = (Hw, w)$ для подходящего оператора $H^* = H \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{W})$, где $w \in \mathbb{W} = L_2(0, +\infty, \mathbb{H}) \times L_2(0, +\infty, \Xi)$. В силу леммы 1 из [2]

[7] От. англ. trace-class operator.

при заданном $v_0 \in \mathbb{H}$ оптимальный процесс $w^0 = (v^0(\cdot, v_0), \xi^0(\cdot, v_0))$ удовлетворяет условию ортогональности

$$(Hw^0, w) = 0 \text{ для всех } w \in \mathfrak{M}_0. \tag{2.1}$$

В расширенном виде равенство (2.1) выглядит как

$$\int_0^{+\infty} \big[(\mathcal{F}_1 v^0(t, v_0), v(t)) + (\mathcal{F}_2 v^0(t, v_0), \xi(t)) + \\ + (\mathcal{F}_2^* \xi^0(t, v_0), v(t)) + (\mathcal{F}_3 \xi^0(t, v_0), \xi(t))\big]\, dt = 0 \tag{2.2}$$

для всех $(v(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathfrak{M}_0$. Из (2.2) сложно получить какую-либо информацию об оптимальном процессе, так как неизвестна свобода в выборе ξ: в случае экспоненциально устойчивой полугруппы всякой функции управления $\xi \in L_2(0, +\infty; \Xi)$ соответствует $v(\cdot, v_0, \xi) \in L_2(0, +\infty; \mathbb{H})$, но в общем случае это не так. Обойти это обстоятельство можно следующим образом. Для данного $T > 0$ рассмотрим множество $\mathfrak{M}_{v_0}^T$ всех пар $(v, \xi) \in L_2(0, T; \mathbb{H}) \times L_2(0, T; \Xi)$, где $v(t) = v(t, v_0, \xi)$ при $t \in [0, T]$. Заметим, что решение $v\colon [0, T] \to \mathbb{H}$ непрерывно и $\mathfrak{M}_{v_0}^T$ есть замкнутое аффинное подпространство в $L_2(0, T; \mathbb{H}) \times L_2(0, T; \Xi)$, заданное подходящим сдвигом $\mathfrak{M}_0^T$.

Лемма 1. *Для всякого $v_0 \in \mathbb{H}$ оптимальный процесс (v^0, ξ^0), где $\xi^0(\cdot) = \xi^0(\cdot, v_0)$ и $v^0(\cdot) = v^0(\cdot, v_0)$, при всех $(v(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathfrak{M}_0^T$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^T \big[\big(\mathcal{F}_1 v^0(t) + \mathcal{F}_2^* \xi^0(t), v(t)\big) + \big(\mathcal{F}_2 v^0(t) + \mathcal{F}_3 \xi^0(t), \xi(t)\big)\big]\, dt + (Pv^0(T), v(T)) = 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичный функционал, определенный[8] на $(v, \xi) \in \mathfrak{M}_{v_0}^T$:

$$J_T(v, \xi) = \int_0^T \mathcal{F}(v(t), \xi(t))dt + (Pv(T), v(T)). \tag{2.4}$$

Так как оптимальный процесс удовлетворяет свойству полугруппы[9] (см. лемму 3 в [2] или лемму 4 в [3]), то в силу (1.9) мы имеем равенство $J(v^0, \xi^0) = J_T(v^0, \xi^0)$.

Покажем, что оптимальный процесс (т. е. минимум функционала J из (1.8)) $(v^0, \xi^0) \in \mathfrak{M}_{v_0}$, рассматриваемый на промежутке $[0, T]$, является единственным минимумом функционала J_T на $\mathfrak{M}_{v_0}^T$. Предположим, что для некоторого процесса $(\widetilde{v}, \widetilde{\xi}) \in \mathfrak{M}_{v_0}^T$ выполнено $J_T(\widetilde{v}, \widetilde{\xi}) \le J_T(v^0, \xi^0)$. Рассмотрим функцию управления $\hat{\xi}$, определенную как

$$\hat{\xi}(t) = \begin{cases} \widetilde{\xi}(t), \ 0 \le t \le T, \\ \xi^0(t - T, \widetilde{x}(T)), \ t \ge T. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ясно, что $\hat{\xi} \in L_2(0, +\infty; \Xi)$ и $\hat{v}(\cdot) = v(\cdot, v_0, \hat{\xi}) \in L_2(0, +\infty; \mathbb{H})$, т. е. $(\hat{v}, \hat{\xi}) \in \mathfrak{M}_{v_0}$. Отсюда мы имеем

$$J(\hat{v}, \hat{\xi}) = J_T(\widetilde{v}, \widetilde{\xi}) \le J_T(v^0, \xi^0) = J(v^0, \xi^0). \tag{2.6}$$

[8]Заметим, что этот функционал не определен на всем пространстве $L_2(0, T; \mathbb{H}) \times L_2(0, T; \Xi)$, но это не существенно для дальнейшего.

[9]То есть $v^0(t + s, v_0) = v^0(t, v^0(s, v_0))$ и $\xi^0(t + s, v_0) = \xi^0(t, v^0(s, v_0))$ для всех $t, s \ge 0$.

В силу того, что (v^0,ξ^0) есть единственный минимум J на $\mathfrak{M}_{v_0}$, мы получаем $(\hat{v},\hat{\xi}) = (v^0,\xi^0)$ и, как следствие, $(\widetilde{v},\widetilde{\xi}) = (v^0,\xi^0)$ в смысле $L_2(0,T;\mathbb{H})\times L_2(0,T;\Xi)$.

Теперь пусть $(v,\xi)\in\mathfrak{M}_0^T$. Ясно, что $(v^0+v,\xi^0+\xi)\in\mathfrak{M}_{v_0}^T$ и

$$J_T(v^0+v,\xi^0+\xi) = J_T(v^0,\xi^0) + L_1(v^0,\xi^0,v) + L_2(v^0,\xi^0,\xi) + Q(v,\xi), \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned} L_1(v^0,\xi^0,v) &= 2\operatorname{Re}\left[\int_0^T \big(\mathcal{F}_1 v^0(t) + \mathcal{F}_2^*\xi^0(t), v(t)\big)\,dt + (Pv^0(T), v(T))\right],\\ L_2(v^0,\xi^0,\xi) &= 2\operatorname{Re}\left[\int_0^T \big(\mathcal{F}_2 v^0(t) + \mathcal{F}_3\xi^0(t), \xi(t)\big)\,dt\right],\\ Q(v,\xi) &= \int_0^T (\mathcal{F}_1 v(t), v(t))\,dt + \int_0^T (\mathcal{F}_3\xi(t),\xi(t))\,dt + (Pv(T), v(T)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из свойства минимума должно выполняться $L_1(v^0,\xi^0,v) + L_2(v^0,\xi^0,\xi) + Q(v,\xi) \ge 0$ при всех $(v,\xi)\in\mathfrak{M}_0^T$. Последнее возможно только в случае, когда линейная часть равна нулю, т. е.

$$L_1(v^0,\xi^0,v) + L_2(v^0,\xi^0,\xi) = 0 \text{ при всех } (v,\xi)\in\mathfrak{M}_0^T. \tag{2.9}$$

Но это в точности означает (с учетом комплексной структуры на $\mathfrak{M}_0^T$), что выполнено (2.3). □

С учетом (1.10), интегрируя по частям[10] в (2.3), мы получаем

$$\int_0^T \big(-B^*\eta(t) + \mathcal{F}_2 v^0(t) + \mathcal{F}_3\xi^0, \xi(t)\big)\,dt = 0 \tag{2.11}$$

для всех $\xi\in L_2(0,T;\Xi)$ и, как следствие,

$$-B^*\eta + \mathcal{F}_2 v^0 + \mathcal{F}_3\xi^0 = 0. \tag{2.12}$$

[10] Здесь имеется в виду следующее. В силу теоремы 2 в [2] оптимальное управление ξ^0 удовлетворяет условию $\xi^0(t,v_0) = Cv^0(t,v_0,\xi^0)$ для некоторого оператора $C\in\mathcal{L}(\mathbb{H};\Xi)$. Поэтому для $v_0\in\mathcal{D}(A)$ обе функции $v^0(\cdot)$ и $\xi^0(\cdot)$ будут непрерывно дифференцируемыми. Отсюда следует, что если $v_0\in\mathcal{D}(A)$ и $\eta(T)=\eta_0\in\mathcal{D}(A^*)$, то решение $\eta(\cdot)$ сопряженной задачи также непрерывно дифференцируемо, $\eta(t)\in\mathcal{D}(A^*)$ для $t\in[0,T]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению в (1.10) в классическом смысле (теорема 6.5 на стр. 135 в [1]). Выберем, воспользовавшись всюду плотностью в $\mathbb{H}$ областей определения $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(A^*)$, некоторые последовательности $\mathcal{D}(A)\ni v_0^{(k)}\to v_0$, $\mathcal{D}(A^*)\ni\eta_0^{(k)}\to -Pv^0(T)$, $k=1,2,\ldots$, и соответствующие им оптимальные процессы $(v_k^0(\cdot),\xi_k^0(\cdot))$ и решения $\eta_k(\cdot)$ сопряженной задачи. Для них мы рассмотрим тождество (2.3) при непрерывно дифференцируемой $\xi(\cdot)$ (и, как следствие, такой же $v(\cdot)$). Таким образом, в (2.3) все участвующие функции непрерывно дифференцируемы и мы (после соответствующего интегрирования по частям) получаем

$$\int_0^T (\mathcal{F}_2 v_k^0(t) + \mathcal{F}_3\xi_k^0(t) - B^*\eta_k(t), \xi(t))dt + (Pv_k^0(T), v(T)) + (\eta_k(T), v(T)) = 0. \tag{2.10}$$

Так как оптимальный процесс непрерывно зависит от v_0 как отображение $\mathbb{H}\to L_2(0,+\infty;\mathbb{H})\times L_2(0,+\infty;\Xi)$ (лемма 1 в [2]), мы получаем, что $\eta_k(t)\to\eta(t)$ равномерно по $t\in[0,T]$. Переходя к пределу в (2.10) при $k\to\infty$, мы получаем (2.11).

Из (2.12) и коэрцитивности $\mathcal{F}_3$ следует, что функция $\xi^0(\cdot, v_0)$ непрерывна при любых $v_0 \in \mathbb{H}$.

Доказательство теоремы 2. Отображение $v_0 \mapsto (v^0(\cdot, v_0), \xi^0(\cdot, v_0))$ есть линейное непрерывное отображение из $\mathbb{H}$ в $L_2(0, +\infty; \mathbb{H}) \times L_2(0, +\infty; \Xi)$ (лемма 1 в [2]). С учетом того, что A есть генератор C_0-полугруппы, это отображение также непрерывно как отображение $\mathbb{H} \to C([0, T]; \mathbb{H}) \times L_2(0, T; \Xi)$. Так как A^* также является генератором C_0-полугруппы, то отображение $(v^0, \xi^0) \to \eta^0(0)$, где $\eta^0(0)$ есть решение задачи (1.10) с $\eta^0(T) = -Pv^0(T)$, линейно и непрерывно как отображение $C([0, T]; \mathbb{H}) \times L_2(0, T; \Xi) \to \mathbb{H}$. Таким образом, $\eta^0(0, v_0) = Mv_0$, где $M\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ есть ограниченный линейный оператор. Наша цель — показать, что $M = -P$. Так как мы находимся в комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, то достаточно показать совпадение квадратичных форм M и $-P$. Из (1.10) и (2.12) мы получаем, что

$$-(\eta^0(0, v_0), v_0) = -(\eta^0(T, v_0), v^0(T, v_0)) + J_T(v^0, \xi^0) = J(v^0, \xi^0) = (Pv_0, v_0) \qquad (2.13)$$

и, как следствие, $(Mv_0, v_0) = (-Pv_0, v_0)$ для всех $v_0 \in \mathbb{H}$. Теорема доказана.

Пусть $\mathbb{H}_1$ есть некоторое банахово пространство, непрерывно и компактно вложенное в $\mathbb{H}$. Мы будем использовать обозначение $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}$ и отождествлять элементы $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}$ при таком вложении.

Условие (REG). Предположим, что найдется $T > 0$ такой, что для всех $g \in C([0, T]; \mathbb{H})$ и $\eta_0 \in \mathbb{H}$ для решения η сопряженной задачи

$$\begin{aligned} &\dot{\eta}(t) = -A^*\eta(t) + g(t), \\ &\eta(T) = \eta_0 \end{aligned} \qquad (2.14)$$

мы имеем $\eta(0) \in \mathbb{H}_1$.

Замечание 1. Можно показать, что решение $\eta(t)$, где $t \in [0, T]$, задачи (2.14) дается формулой

$$\eta(t) = G^*(T - t)\eta(T) + \int_t^T G^*(s - t)g(s)ds, \qquad (2.15)$$

где $G^*(t)$ есть сопряженная к $G(t)$ полугруппа (или C_0-полугруппа, порожденная A^*).

Предложение 1. *Пусть выполнено условие (REG). Тогда оператор P в условиях теоремы 1 компактен.*

Доказательство. Действительно, оператор $P\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ограничен в силу теоремы 1, и в силу теоремы 2 и условия (REG) мы имеем $Pv \in \mathbb{H}_1$ при всех $v \in \mathbb{H}$. По теореме о замкнутом графике и в силу непрерывности вложения $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}$ оператор $P\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}_1$ ограничен. Так как вложение $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}$ компактно, то $P\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ компактный. □

Условие (REG) выполнено для некоторых параболических задач (см. [13, 14]).

Замечание 2. На практике системы управления, как правило, рассматриваются в вещественных гильбертовых пространствах и теорема 1 применяется к комплексификациям этих пространств и соответствующих операторов. Для получения решения операторных неравенств в исходных вещественных пространствах нужно проделать следующее. В данном случае оператор $P = P^*$ из теоремы 1 действует в комплексификации[11] $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ некоторого вещественного гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Заметим, что всякий оператор $P\colon \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ может быть представлен через (2×2)-матрицу

$$\begin{bmatrix} \widetilde{P} & L \\ -L & \widetilde{P} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

где $\widetilde{P}, L \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$. Можно показать, что равенство $P = P^*$ эквивалентно следующим двум условиям: $\widetilde{P}^* = \widetilde{P}$ и $(Lv, v) = 0$ при всех $v \in \mathbb{H}$. Если операторы A и B из (1.1) действуют в вещественных гильбертовых пространствах $\mathbb{H}$ и Ξ с вещественной формой F, то теорема 1, примененная к $A^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}}$ и эрмитовому расширению $F^{\mathbb{C}}$ формы F, дает оператор $P = P^*\colon \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$. Легко проверить, что самосопряженный оператор $\widetilde{P}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, определенный в (2.16), удовлетворяет для всех $v \in \mathcal{D}(A)$ и $\xi \in \Xi$ неравенству

$$2(Av + B\xi, \widetilde{P}v) + F(v, \xi) \geq \delta(|v|^2 + |\xi|^2). \tag{2.17}$$

Также ясно, что $\widetilde{P}$ наследует компактность оператора P, если она имеет место. Легко видеть, что уравнение Ляпунова (1.11) в $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ переходит в уравнение

$$2(Av, \widetilde{P}v) = (\widetilde{Q}v, v) \text{ для } v \in \mathcal{D}(A) \tag{2.18}$$

в вещественном пространстве $\mathbb{H}$. Здесь $\widetilde{Q}$ есть диагональный элемент оператора $Q^* = Q \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^{\mathbb{C}})$, аналогичный $\widetilde{P}$ из (2.16).

3. Доказательство теорем 3 и 4. Результаты этой части применимы как в случае комплексного, так и вещественного гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Для определенности будем считать, что $\mathbb{H}$, как и раньше, рассматривается над полем $\mathbb{C}$.

Будем говорить, что квадратичная форма $V(v) := (Pv, v)$ оператора P *слабо непрерывна*, если из того, что v_k сходится к v слабо в $\mathbb{H}$, следует, что $V(v_k) \to V(v)$ при $k \to \infty$. В силу равенства $V(v_k - v) = V(v_k) - V(v) + o(1)$ (при условии, что имеется слабая сходимость v_k к v), слабую непрерывность достаточно проверять в нуле. Как известно, квадратичная форма компактного оператора слабо непрерывна. С использованием непрерывного функционального исчисления для самосопряженных операторов (см., например, [20]) нетрудно показать справедливость следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть $P = P^*$, причем $P \geq 0$ (т. е. $V(v) \geq 0$ при всех $v \in \mathbb{H}$). Тогда P компактен тогда и только тогда, когда его квадратичная форма слабо непрерывна.*

Нам также потребуется следующая лемма.

---

[11]Напомним, что *комплексификацией* вещественного гильбертова пространства $\mathbb{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{H}}$ называется внешняя прямая сумма $\mathbb{H}^{\mathbb{C}} := \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, снабженная умножением $(a + ib)(u, v) := (au - bv, av + bu)$ для $a, b \in \mathbb{R}$ и $u, v \in \mathbb{H}$ и скалярным произведением

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle := (u_1, u_2)_{\mathbb{H}} - i(u_1, v_2)_{\mathbb{H}} + i(v_1, u_2)_{\mathbb{H}} + (v_1, v_2)_{\mathbb{H}}.$$

Для линейного оператора $A\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ его комплексификация определяется как оператор $A^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{H}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$, действующий по правилу $A^{\mathbb{C}}(u, v) := (Au, Av)$.

Лемма 3. *Пусть полугруппа $G(t)$ экспоненциально устойчива. Тогда для всякого $Q = Q^*$ уравнение Ляпунова* (1.11) *имеет единственное решение $P = P^*$, задаваемое формулой*

$$Pv = -\int_0^{+\infty} G^*(t)QG(t)v dt. \tag{3.1}$$

Для вещественного случая лемма доказана в [21] (см. лемму 1 там). Доказательство для комплексного случая проводится аналогично. Кроме того, ее доказательство частично содержится в наших дальнейших рассуждениях.

Доказательство теоремы 3. Из леммы 3 и коэрцитивности формы оператора Q следует, что для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$ имеет место

$$C_1 \int_0^{+\infty} |G(t)v|^2 dt \le -(Pv, v) \le C_2 \int_0^{+\infty} |G(t)v|^2 dt. \tag{3.2}$$

Пусть v_k есть последовательность из условия 1 теоремы 3. Если P компактен, то $(Pv_k, v_k) \to 0$, что противоречит первому неравенству в (3.2) (для $v = v_k$) в силу (1.12).

Пусть теперь $P = P^*$ не компактен. Тогда по лемме 2 квадратичная форма оператора $-P \ge 0$ не слабо непрерывна и потому найдется последовательность v_k, сходящаяся слабо в $\mathbb{H}$ к нулю, и такая, что $-(Pv_k, v_k) \ge \delta > 0$ для некоторого δ и всех $k = 1, 2, \ldots$. Но тогда отсюда и из второго неравенства в (3.2) следует, что последовательность v_k обладает нужным в пункте 1 теоремы свойством.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим $V(v) := (Pv, v)$. Тогда для $v_0 \in \mathcal{D}(A)$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left[V(G(t)v_0)\right] = 2\operatorname{Re}(AG(t)v_0, PG(t)v_0) \ge \delta |G(t)v_0|^2. \tag{3.3}$$

Проинтегрировав (3.3) на $[0, t]$, получаем

$$V(G(t)v_0) - V(v_0) \ge \delta \int_0^t |G(s)v_0|^2 ds. \tag{3.4}$$

По непрерывности неравенство (3.4) распространяется для всех $v_0 \in \mathbb{H}$. Для $v_0 \in \mathbb{H}^s$ в (3.4) можно перейти к пределу при $t \to +\infty$ так, что

$$-(Pv_0, v_0) \ge \delta \int_0^{+\infty} |G(t)v_0|^2 dt. \tag{3.5}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.

4. Пример. Рассмотрим скалярное уравнение с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda x + bf(\sigma(t)), \\ \sigma(t) &= \int_{-\tau}^0 \rho(s)x(t+s)ds, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\lambda, \tau > 0$ суть некоторые параметры, $b = 1$, функция ρ непрерывна на $[-\tau, 0]$, а функция f непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $0 \le f'(\sigma) \le \mu_0$

при некотором $\mu_0 > 0$ и всех $\sigma \in \mathbb{R}$. Запишем уравнение (4.1) как эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times L_2(-\tau, 0; \mathbb{R})$. Рассмотрим оператор $A\colon \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, действующий по правилу

$$(x, \varphi) \mapsto \left(-\lambda x, \frac{d}{ds}\varphi\right) \text{ для } (x, \varphi) \in \mathcal{D}(A), \tag{4.2}$$

где $\mathcal{D}(A) = \{(x, \varphi) \in \mathbb{H} \mid \varphi \in W^{1,2}(-\tau, 0; \mathbb{R}) \text{ и } \varphi(0) = x\}$. Положим $\Xi = \mathbb{R}$ и определим оператор $B\colon \Xi \to \mathbb{H}$ как $B\xi := (b\xi, 0) \in \mathbb{H}$. Рассмотрим также оператор $C \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$, действующий как $C(x, \varphi) := \int_{-\tau}^{0} \rho(s)\varphi(s)ds$. Тогда уравнение (4.1) можно записать как эволюционное уравнение в $\mathbb{H}$:

$$\dot{v} = Av + Bf(Cv). \tag{4.3}$$

Для изучения этого уравнения можно применить (см. [5, 6]) частотную теорему к паре (A, B) (или паре $(A + \nu I, B)$, где $\nu > \lambda$) и квадратичной форме

$$F(v, \xi) = F(x, \varphi, \xi) = \xi\left(\mu_0 \int_{-\tau}^{0} \rho(s)\varphi(s)ds - \xi\right). \tag{4.4}$$

Как видно в этом случае $F_1 = 0$ (в терминологии (1.3)) и потому оператор P (в случае, когда выполнено условие 2 теоремы 1) является решением уравнения Ляпунова (вещественного) с некоторым коэрцитивным оператором Q (см. замечание 2). Чтобы показать некомпактность P, мы воспользуемся теоремами 3 и 4. Легко видеть, что полугруппа $G(t)$, порожденная оператором A, дается следующей формулой:

$$(x_0, \varphi_0) \overset{G(t)}{\mapsto} (x_0 e^{-\lambda t}, \varphi(t, \cdot)), \tag{4.5}$$

где

$$\varphi(t, s) := \begin{cases} x_0 e^{-\lambda(t+s)} \text{ при } t + s \geq 0, \\ \varphi_0(t + s) \text{ при } t + s < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Рассмотрим последовательность $v_k = (0, \varphi_k)$, где $\varphi_k(s) = \sin(\frac{2\pi k}{\tau}s)$ при $k = 1, 2, \ldots$. Ясно, что эта последовательность слабо сходится к нулю в $\mathbb{H}$. Как легко видеть,

$$\int_0^{+\infty} |G(t)v_k|^2 dt = \int_0^{\tau} \int_{-\tau}^{-t} \sin^2\left(\frac{2\pi k}{\tau}(s + t)\right) dsdt = \frac{\tau}{4} > 0. \tag{4.7}$$

Таким образом, выполнено условие 1 теоремы 3 и, как следствие, оператор P не может быть компактным. Теперь заметим, что оператор $A + \nu I$, где $\nu > \lambda$, является генератором C_0-полугруппы $e^{\nu t}G(t)$, для которой имеется устойчивое подпространство $\mathbb{H}^s = \{(x, \varphi) \in \mathbb{H} \mid x = 0\}$. Тогда для той же последовательности v_k имеем $v_k \in \mathbb{H}^s$ и

$$\int_0^{+\infty} e^{2\nu t}|G(t)v_k|^2 dt = \int_0^{\tau} e^{2\nu t} \int_{-\tau}^{-t} \sin^2\left(\frac{2\pi k}{\tau}(s + t)\right) dsdt \geq \frac{\tau}{4} > 0. \tag{4.8}$$

Поэтому теорема 4 применима в этом случае, т. е. частотная теорема, примененная к паре $(A + \nu I, B)$ и форме F, дает некомпактный оператор P. В данном случае некомпактность оператора P — проявление нерегулярности полугруппы $G(t)$, порожденной оператором A. В параболических задачах компактность оператора P тесно связана со «сглаживающим характером» полугруппы. В задачах с запаздыванием сглаживание хоть и присутствует, но имеет запаздывающий характер.

5. Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ф. Райтманну за полезные обсуждения по теме работы.

Литература

1. *Krein S. G.* Linear differential equations in Banach space. AMS, 1971.

2. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Частотная теорема для сильно непрерывных однопараметрических полугрупп // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1977. Т. 41, № 4. P. 895–911.

3. *Louis J.-Cl., Wexler D.* The Hilbert space regulator problem and operator Riccati equation under stabilizability // Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. 1991. Vol. 105, no. 4. P. 137–165.

4. *Аров Д. З., Якубович В. А.* Условия полуограниченности квадратичных функционалов на пространствах Харди // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1982. № 1. P. 11.

5. *Anikushin M. M.* A non-local reduction principle for cocycles in Hilbert spaces // J. Differ. Equations. 2020. Vol. 269, no. 9. P. 6699–6731.

6. *Anikushin M. M.* The Poincaré-Bendixson theory for certain semi-flows in Hilbert spaces. URL: https://arxiv.org/abs/2001.08627 (дата обращения: 25.10.2020).

7. *Smith R. A.* Orbital stability and inertial manifolds for certain reaction diffusion systems // Proceedings of the London Mathematical Society. 1994. Vol. 3, no. 1. P. 91–120.

8. *Datko R.* Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space // J. Math. Anal. Appl. 1970. Vol. 32, no. 3. P. 610–616.

9. *Triggiani R.* An optimal control problem with unbounded control operator and unbounded observation operator where the algebraic Riccati equation is satisfied as a Lyapunov equation // Applied Mathematics Letter. 1997. Vol. 10, no. 2. P. 95–102.

10. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Springer, 1976.

11. *Likhtarnikov A. L., Yakubovich V. A.* The frequency theorem for equations of evolutionary type // Sib. Math. J. 1976. Vol. 17, no. 5. P. 790–803.

12. *Lions J. L.* Optimal control of systems governed by partial differential equations. Springer-Verlag, 1971.

13. *Gusev S. V.* Extended Kalman — Yakubovich — Popov Lemma in a Hilbert Space and Fenchel Duality // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. 2005.

14. *Anikushin M. M.* Frequency theorem for the regulator problem with unbounded cost functional and its applications to nonlinear delay equations. URL: https://arxiv.org/abs/2003.12499v2 (дата обращения: 25.10.2020).

15. *Proskurnikov A. V.* A new extension of the infinite-dimensional KYP lemma in the coercive case // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, no. 11. P. 246–251.

16. *Kuznetsov N. V., Reitmann V.* Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation. Switzerland: Springer International Publishing AG, 2020.

17. *Anikushin M. M.* On the Smith reduction theorem for almost periodic ODEs satisfying the squeezing property // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. Vol. 15, no. 1. P. 97–108.

18. *Аникушин М. М., Райтманн Ф., Романов А. О.* Аналитические и численные оценки фрактальной размерности вынужденных квазипериодических колебаний в системах управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2019. Т. 87, № 2.

19. *Anikushin M. M.* On the Liouville Phenomenon in Estimates of Fractal Dimensions of Forced Quasi-Periodic Oscillations // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2019. Vol. 52, no. 3. P. 234–243.

20. *Helemskii A. Ya.* Lectures and exercises on functional analysis. Providence. RI: American Mathematical Society, 2006.

21. *Wexler D.* On frequency domain stability for evolution equations in Hilbert spaces via the algebraic Riccati equation // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1980. Vol. 11, no. 6. P. 969–983.

Статья поступила в редакцию 1 декабря 2019 г.;
после доработки 29 апреля 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

К о н т а к т н а я   и н ф о р м а ц и я:

Аникушин Михаил Михайлович — аспирант; demolishka@gmail.com

On the compactness of solutions to certain operator inequalities arising from the Likhtarnikov — Yakubovich frequency theorem*

M. M. Anikushin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Anikushin M. On the compactness of solutions to certain operator inequalities arising from the Likhtarnikov — Yakubovich frequency theorem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 622–635. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.405 (In Russian)

We study the compactness property of operator solutions to certain operator inequalities arising from the frequency theorem of Likhtarnikov — Yakubovich for C_0-semigroups. We show that the operator solution can be described through solutions of an adjoint problem as it was previously known under some regularity condition. Thus we connect some regularity properties of the semigroup with the compactness of the operator in the general case. We also prove several results useful for checking the non-compactness of operator solutions to Lyapunov inequalities and equations, into which the operator Riccati equation degenerates in certain cases arising in applications. As an example, we apply these theorems for a scalar delay equation posed in a proper Hilbert space and show that the operator solution cannot be compact. This results are related to the author recent work on a non-local reduction principle of cocycles (non-autonomous dynamical systems) in Hilbert spaces.

Keywords: frequency theorem, Lyapunov inequality, compact operator, delay equations.

References

1. Krein S. G., *Linear Differential Equations in Banach Space* (AMS, 1971).
2. Likhtarnikov A. L., Yakubovich V. A., “The frequency theorem for continuous one-parameter semigroups”, *Math. USSR-Izv.* **41**(4), 895–911 (1977). (In Russian)
3. Louis J.-Cl., Wexler D., “The Hilbert space regulator problem and operator Riccati equation under stabilizability”, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **105**(4), 137–165 (1991).
4. Arov D. Z., Yakubovich V. A., “Semiboundedness conditions for quadratic functionals on Hardy spaces”, *Vestn. Leningr. Univ., Ser. Mat. Mekh. Astron.* iss. 1, 7–13 (1982).
5. Anikushin M. M., “A non-local reduction principle for cocycles in Hilbert spaces”, *J. Differ. Equations* **269**(9), 6699–6731 (2020).
6. Anikushin M. M., “The Poincaré — Bendixson theory for certain semi-flows in Hilbert spaces”. Available at: https://arxiv.org/abs/2001.08627 (accessed: October 25, 2020).
7. Smith R. A., “Orbital stability and inertial manifolds for certain reaction diffusion systems”, *Proceedings of the London Mathematical Society* **3**(1), 91–120 (1994).
8. Datko R., “Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space”, *J. Math. Anal. Appl.* **32**(3), 610–616 (1970).
9. Triggiani R., “An optimal control problem with unbounded control operator and unbounded observation operator where the algebraic Riccati equation is satisfied as a Lyapunov equation”, *Applied Mathematics Letters* **10**(2), 95–102 (1997).
10. Barbu V., *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces* (Springer, 1976).
11. Likhtarnikov A. L., Yakubovich V. A., “The frequency theorem for equations of evolutionary type”, *Sib. Math. J.* **17**(5), 790–803 (1976).
12. Lions J. L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations* (Springer-Verlag, 1971).

*This work is supported by V. A. Rokhlin grant for young mathematicians of Saint Petersburg.

13. Gusev S. V., “Extended Kalman — Yakubovich — Popov Lemma in a Hilbert Space and Fenchel Duality”, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control* (2005).

14. Anikushin M. M., “Frequency theorem for the regulator problem with unbounded cost functional and its applications to nonlinear delay equations”. Available at: https://arxiv.org/abs/2003.12499v2 (accessed: October 25, 2020).

15. Proskurnikov A. V., “A new extension of the infinite-dimensional KYP lemma in the coercive case”, *IFAC-PapersOnLine* **48**(1), 246–251 (2015).

16. Kuznetsov N. V., Reitmann V., *Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation* (Springer International Publishing AG, Switzerland, 2020).

17. Anikushin M. M., “On the Smith reduction theorem for almost periodic ODEs satisfying the squeezing property”, *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **15**(1), 97–108 (2019).

18. Anikushin M. M., Reitmann V., Romanov A. O., “Analytical and numerical estimates of the fractal dimension of forced quasiperiodic oscillations in control systems”, *Differential Equations and Control Processes* **87**(2) (2019). (In Russian)

19. Anikushin M. M., “On the Liouville Phenomenon in Estimates of Fractal Dimensions of Forced Quasi-Periodic Oscillations”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **52**(3), 234–243 (2019).

20. Helemskii A. Ya., *Lectures and Exercises on Functional Analysis* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2006).

21. Wexler D., “On frequency domain stability for evolution equations in Hilbert spaces via the algebraic Riccati equation”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **11**(6), 969–983 (1980).

Received: December 1, 2019
Revised: April 29, 2020
Accepted: June 18, 2020

Author’s information:

Mikhail M. Anikushin — demolishka@gmail.com