УДК 517.911 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4
MSC 34A12

# О задаче Коши, поставленной на границе области определения обыкновенного дифференциального уравнения*

*В. В. Басов, Ю. А. Ильин*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Басов В. В., Ильин Ю. А.* О задаче Коши, поставленной на границе области определения обыкновенного дифференциального уравнения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 636–648. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.406

Работа посвящена вопросу существования у обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка решения задачи Коши с начальной точкой, расположенной на границе области определения уравнения. Такая постановка отличается от принятой в классической теории, где начальная точка всегда является внутренней. Ставится задача отыскания таких условий на правую часть уравнения и границу области определения, которые бы гарантировали как существование, так и отсутствие решения у данной граничной задачи Коши. В предыдущей статье, посвященной этому же вопросу, авторы для решения поставленной задачи использовали стандартный метод ломаных Эйлера и описали все случаи, когда с помощью этого метода удается получить желаемый ответ. Однако метод ломаных, имея определенные достоинства (конструктивность, возможность использования компьютера), требует для своей реализации, чтобы и уравнение, и область его определения удовлетворяли определенным ограничениям, что неизбежно сужает класс допустимых уравнений. В настоящей статье мы предпринимаем попытку максимально расширить полученные ранее результаты и для этой цели используем совершенно другой подход. Исходное уравнение доопределяется таким образом, что граничная задача становится обычной внутренней задачей Коши, для которой применяется стандартная теорема Пеано. Для ответа на вопрос о том, будет ли решение модифицированной задачи Коши являться решением исходной граничной задачи, применяются так называемые теоремы сравнения и дифференциальные неравенства. Данная статья представляет собой самостоятельное исследование, не опирающееся на нашу предыдущую работу. Ради цельности изложения для ранее полученных результатов даются новые доказательства, которые основываются на новом подходе. В результате мы расширили класс рассматриваемых уравнений, сняли прежние требования выпуклости и гладкости граничных кривых, добавили случаи, которые невозможно было рассмотреть с помощью метода ломаных. Проделанная работа закрывает определенный пробел в литературе по вопросу существования или отсутствия решений у граничной задачи Коши.

*Ключевые слова*: задача Коши, граница области определения, граничная начальная точка, верхнее и нижнее решения задачи Коши, интегральная воронка, теоремы сравнения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00388).

**1. Постановка задачи.** В статье рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

для скалярного дифференциального уравнения, определенного на некотором связном множестве $G \subset \mathbb{R}^2$ с непустой внутренностью, $f \in C(G)$. В классических теоремах существования решения задачи Коши, таких как теорема Пеано, предполагается, что начальная точка $(t_0, x_0)$ есть внутренняя точка множества $G$.

В настоящей работе изучается вопрос о существовании решения задачи (1) в случае, когда $(t_0, x_0) \in G \cap \partial G$, т. е. $(t_0, x_0)$ лежит на границе $G$.

В предыдущей статье авторов [1], посвященной этому же вопросу, для доказательства существования решения задачи (1) был применен метод ломаных Эйлера. В настоящей статье мы изучаем вопрос о существовании решения граничной задачи Коши в максимально общем случае и применяем другой подход, при котором исходная система доопределяется таким образом, что граничная задача Коши становится обычной внутренней задачей. Вопрос о том, будет ли решение этой новой задачи лежать в исходной области определения $G$, исследуется с помощью теорем сравнения и дифференциальных неравенств. По сравнению с [1] нам удалось убрать требования определенной выпуклости границ, убрать требование гладкости границ; получить результаты (теорема 11, условия (A)) для случаев, в которых принципиально невозможно применять метод ломаных (случаи отсутствия общего промежутка существования у решений граничной задачи Коши, см. замечание 1 к теореме 2).

Напомним некоторые факты из теории дифференциальных уравнений и неравенств, которые используются в дальнейшем. Формулировку теоремы Пеано приведем в форме граничной задачи Коши, как это делается в книге [2], поскольку ниже мы будем ссылаться именно на такую формулировку.

**Теорема 1 (Пеано).** *Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна в прямоугольнике $P = \{(t, x) |\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$; $|f(t, x)| \leqslant M$ в $P$; $h = \min(a, b/M)$. Тогда задача Коши с начальными данными $(t_0, x_0)$ имеет на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ по крайней мере одно решение $\varphi(t)$.*

**Примечание.** Отметим, что в условиях теоремы Пеано на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ определено любое решение задачи Коши.

**Теорема 2 (Пеано, Осгуд)** [2, 3]. *В условиях теоремы Пеано у задачи Коши существуют два таких решения $\varphi^*(t)$* (верхнее) *и $\varphi_*(t)$* (нижнее)*, что для любого другого ее решения $\varphi(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ выполняются неравенства $\varphi_*(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi^*(t)$.*

Сектор, заключенный между графиками $\varphi^*$ и $\varphi_*$, называют *сектором неединственности* или *интегральной воронкой.* Единственность решения задачи Коши эквивалентна тому, что $\varphi^* \equiv \varphi_*$ на некотором отрезке $[t_0, t_0 + \delta] \subset [t_0, t_0 + h]$.

**Замечание 1.** Важно отметить, что если начальная точка берется на границе $G$, как это делается в настоящей статье, то теорема 2, а также примечание к теореме 1 становятся, вообще говоря, неверными!

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение $\dot{x} = (3/2)x^{1/3}$, суженное на множество $G = \{(t, x) | t \in [0, 1], -t^2 \leqslant x \leqslant t^2\}$, с начальной точкой $O = (0, 0)$. Интегральные кривые выходят из точки $O$ с горизонтальной касательной и далее расходятся веером к границе $\partial G$, как показано на рис. 1. Общего отрезка существования, верхнего и нижнего решений нет (верхним и нижним решениями должны быть функции $x = \pm t^{3/2}$, но они не попадают в $G$).

**Теорема 3 (строгая теорема сравнения).** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть функция* $\psi(t) \in C^1([t_0, t_0+h])$ *такова, что* $\psi(t_0) = x_0$ *и* $\psi'(t) < f(t, \psi(t))$ *(или* $\psi'(t) > f(t, \psi(t))$*). Тогда на* $(t_0, t_0+h]$ *выполняется неравенство* $\psi(t) < \varphi(t)$ *(или* $\psi(t) > \varphi(t)$*), где* $\varphi(t)$ *— любое решение задачи Коши из теоремы 1.*

Доказательство теоремы 3 см. в [3, п. 1.2] или [4, § 1.4]. Геометрический смысл неравенства $\psi'(t) < f(t, \psi(t))$ заключается в том, что угловой коэффициент касательной к кривой $\psi(t)$ меньше углового коэффициента $f(t, \psi(t))$ поля направлений уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ в точке $(t, \psi(t))$, т. е. график $\psi$ располагается более «полого», чем поле направлений, см. рис. 2, *а*. В случае неравенства $\psi'(t) > f(t, \psi(t))$ график $\psi$ располагается «круче» поля направлений, см. рис. 2, *б*.

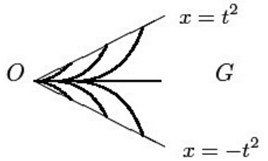

*Рис. 1.*

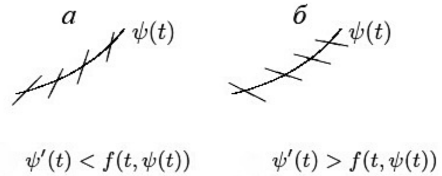

*Рис. 2.*

**Теорема 4 (нестрогая теорема сравнения).** *Пусть в условиях теоремы 3 строгие неравенства заменены на нестрогие:* $\psi'(t) \leqslant f(t, \psi(t))$ *(или* $\psi'(t) \geqslant f(t, \psi(t))$*). Тогда на* $[t_0, t_0+h]$ *выполняются неравенства* $\psi(t) \leqslant \varphi^*(t)$ *(или* $\psi(t) \geqslant \varphi_*(t)$*), где* $\varphi^*(t)$ *и* $\varphi_*(t)$ *— верхнее и нижнее решения из теоремы 2.*

Доказательство теоремы 4 см. в [2, гл. 3], в [3, п. 1.4] и в [4, § 1.4]. Примеры показывают, что результат теоремы 4 в общем случае не улучшается. Отметим, что у теорем 3 и 4 имеются и «левосторонние» варианты для $[t_0 - h, t_0)$, в которых итоговые неравенства заменяются на противоположные.

Мы докажем существование или отсутствие решения задачи Коши вправо от начальной точки, т. е. на отрезке $[t_0, t_0 + h]$. Вопрос о существовании решения влево от начальной точки сводится к этому случаю заменой времени $t$ на $-t$.

Поскольку граница $\partial G$ множества $G$ в общем случае может быть устроена достаточно плохо, необходимо сделать какие-то конструктивные предположения о ее структуре. Мы будем считать, что $\partial G$ в окрестности начальной точки состоит из гладких кривых[1]. Такое предположение естественно для случая, когда $f$ составлена из элементарных функций, что чаще всего и бывает в приложениях. Более того, мы предполагаем, что в окрестности нашей начальной точки $(t_0, x_0) \in \partial G$ пересечение $S = G \cap P$, где прямоугольник $P$ взят из теоремы 1 и числа $a$ и $b$ выбраны достаточно малыми, представляет собой «сектор» одного из следующих типов:

1-й тип: $S = \{(t, x) | \ t \in [t_0, t_0 + a], \ \alpha(t) \leqslant x \leqslant x_0 + b\}$ (рис. 3, *а*);

2-й тип: $S = \{(t, x) | \ t \in [t_0, t_0 + a], \ x_0 - b \leqslant x \leqslant \beta(t)\}$ (рис. 3, *б*);

3-й тип: $S = \{(t, x) | \ t \in [t_0, t_0 + a], \ \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t), \ \alpha(t) < \beta(t)$ при $t > t_0\}$ (рис. 3, *в*), где $\alpha(t), \beta(t) \in C^1([t_0, t_0 + a])$, $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = x_0$, на концах отрезка производные берутся односторонние и допускается, что $\alpha'(t_0)$ и $\beta'(t_0)$ могут равняться $\pm\infty$.

На самом деле не запрещается, чтобы $G \cap P$ состояло сразу из нескольких секторов $S_1, S_2, \ldots$ указанных типов, как изображено, например, на рис. 4. В таком случае надо просто рассматривать каждый сектор по отдельности и применять к

[1]В разделе 3 мы ослабим это условие.

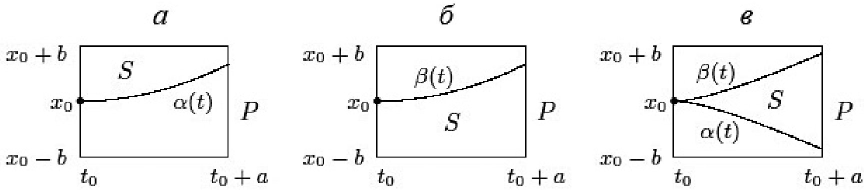


*Рис. 3.*

нему результаты из раздела 2. При этом может случиться, что в каком-то секторе решение будет существовать, а в другом — нет.

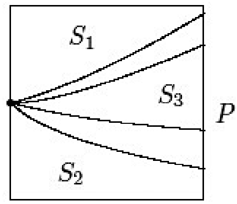


*Рис. 4.*

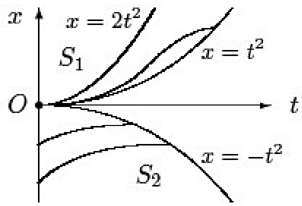


*Рис. 5.*

**Пример 2.** Для уравнения $\dot{x} = 4\sqrt{|x| - t^2}$ с начальной точкой $(0,0)$ имеем два сектора: $S_1 = \{t \geqslant 0,\ x \geqslant t^2\}$ и $S_2 = \{t \geqslant 0,\ x \leqslant -t^2\}$. В $S_1$ существует решение $x = 2t^2$, а в $S_2$ решения, выходящего из $(0,0)$, быть не может, так как $\dot{x} \geqslant 0$ и решения возрастают (рис. 5).

**2. Основные теоремы.** Итак, рассмотрим задачу Коши (1), где $(t_0, x_0) \in G \cap \partial G$, и относительно $S = G \cap P$ справедливы предположения, сделанные в разделе 1. Сведем эту задачу к «обычной» задаче Коши из теоремы 1, доопределив $f$ до непрерывной функции $\tilde{f}$, заданной уже на всем прямоугольнике $P$. Сделать это можно, например, следующим образом. Если $S$ есть сектор 1-го типа, то положим

$$\tilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x), \text{ если } \alpha(t) \leqslant x \leqslant x_0 + b; \\ f(t,\alpha(t)), \text{ если } x_0 - b \leqslant x \leqslant \alpha(t). \end{cases}$$

Для сектора 2-го типа поступим аналогично:

$$\tilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,\beta(t)), \text{ если } \beta(t) \leqslant x \leqslant x_0 + b; \\ f(t,x), \text{ если } x_0 - b \leqslant x \leqslant \beta(t). \end{cases}$$

Наконец, для сектора 3-го типа возьмем

$$\tilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,\beta(t)), \text{ если } \beta(t) \leqslant x \leqslant x_0 + b; \\ f(t,x), \text{ если } \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t); \\ f(t,\alpha(t)), \text{ если } x_0 - b \leqslant x \leqslant \alpha(t). \end{cases}$$

К задаче Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}(t,x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

применима уже обычная теорема Пеано (теорема 1). Так как $f \equiv \tilde{f}$ на $S$, то решение задачи Коши (2), график которого лежит в $S$, будет также и решением задачи (1).

Таким образом, задача (1) имеет решение тогда и только тогда, когда задача (2) имеет решение $\varphi$, располагающееся в $S$. Последнее в свою очередь означает, что должны выполняться неравенства $\varphi(t) \geqslant \alpha(t)$ и (или) $\varphi(t) \leqslant \beta(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h \leqslant t_0 + a$. Для проверки такого рода неравенств, в которых решения дифференциального уравнения сравниваются с известными функциями $\alpha$ и $\beta$, удобно использовать теоремы сравнения.

Начнем с самой простой ситуации, когда и $\alpha'(t_0)$, и $\beta'(t_0)$ не равны $f(t_0, x_0)$ (заметим, что если $\alpha'(t_0), \beta'(t_0) = \pm\infty$, то это условие выполнено). Для этого случая имеется полный ответ на вопрос о существовании решения задачи (1).

**Теорема 5.** *Пусть* $\alpha'(t_0) \neq f(t_0, x_0), \beta'(t_0) \neq f(t_0, x_0)$. *Тогда необходимым и достаточным условием существования решения задачи Коши* (1) *будет:*

*1) в случае сектора 1-го типа условие* $\alpha'(t_0) < f(t_0, x_0)$*;*

*2) в случае сектора 2-го типа условие* $\beta'(t_0) > f(t_0, x_0)$*;*

*3) в случае сектора 3-го типа условие* $\alpha'(t_0) < f(t_0, x_0) < \beta'(t_0)$*.*

Доказательство теоремы 5. Пусть $\varphi$ есть произвольное решение задачи Коши (2). Ясно, что $\varphi'(t_0) = \tilde{f}(t_0, x_0) = f(t_0, x_0)$.

Рассмотрим случай, когда $S$ есть сектор 1-го типа. Неравенство $\alpha'(t_0) < f(t_0, x_0)$ означает, что $\alpha'(t_0) < \varphi'(t_0)$. По элементарной теореме из анализа из этого следует, что $\alpha(t) < \varphi(t)$ на некотором полуотрезке $(t_0, t_0 + h]$. Таким образом, решение $\varphi$ располагается в $S$, а значит будет решением и задачи Коши (1).

Если же $\alpha'(t_0) > f(t_0, x_0) = \varphi'(t_0)$, то $\alpha(t) > \varphi(t)$ на $(t_0, t_0 + h]$. То есть ни одно из решений задачи Коши (2) не попадает в $S$, и поэтому задача Коши (1) решений не имеет.

Оставшиеся пункты 2 и 3 доказываются столь же просто. □

Теорема 5 имеется в работе [1], но там она не выделяется в виде отдельного утверждения.

Перейдем теперь к случаям, когда хотя бы одно из чисел $\alpha'(t_0)$ и $\beta'(t_0)$ равно $f(t_0, x_0)$. Результат будет зависеть от типа сектора $S$, и поэтому мы рассмотрим их по отдельности. Для каждого типа мы докажем по две теоремы: первая объясняет геометрическую природу существования или отсутствия решения задачи Коши (1), а во второй приводятся проверяемые коэффициентные условия. Во вторых теоремах используется нестрогая теорема сравнения (теорема 4), поэтому признаки существования или отсутствия решения у задачи (1) будут только достаточными. Везде дальше через $\varphi^*$ и $\varphi_*$ будем обозначать верхнее и нижнее решения задачи Коши (2).

**Теорема 6.** *Пусть $S$ есть сектор 1-го типа. Неравенство $\varphi^* \geqslant \alpha$ является необходимым и достаточным условием существования решения задачи Коши* (1).

Доказательство теоремы 6. Если $\varphi^* \geqslant \alpha$, то само $\varphi^*$ и будет решением (1), так как оно лежит в $S$. Обратно, если (1) имеет решение $\varphi$, то оно так же будет решением задачи (2), и при этом $\varphi \geqslant \alpha$. По определению верхнего решения тогда должно выполняться $\varphi^* \geqslant \varphi \geqslant \alpha$. □

**Теорема 7.** *Пусть $S$ есть сектор 1-го типа и* $\alpha'(t_0) = f(t_0, x_0)$. *Если для* $\forall t \in [t_0, t_0 + a]$ *выполняется неравенство*

$$\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)), \tag{3}$$

*то задача Коши* (1) *имеет решение.*

Доказательство. Пусть неравенство (3) выполнено. Это означает, что поле направлений на кривой $\alpha$ устроено так, как показано на рис. 2, *а*. Очевидно

$f(t,\alpha(t)) = \tilde{f}(t,\alpha(t))$. Тогда по нестрогой теореме сравнения (теореме 4) имеем $\alpha(t) \leqslant \varphi^*(t)$, $t \in [t_0, t_0+h]$, и поэтому по теореме 6 решение задачи Коши (1) существует. □

**Замечание 2.** Если неравенство (3) нарушается, то ничего сказать нельзя. Задача Коши может как иметь, так и не иметь решения, и это зависит от дополнительных свойств функции $f$ в секторе $S$. В частности, даже если выполняется глобально противоположное к (3) неравенство $\alpha'(t) > f(t,\alpha(t)),\ t \in (t_0, t_0+a]$, решение задачи Коши может как существовать, так и отсутствовать.

Справедливость замечания 2 проиллюстрируем на примерах.

**Пример 3.** Покажем прежде всего, что если сколь угодно близко к $t_0$ неравенство (3) как выполняется, так и нарушается, то решения задачи Коши может не быть. Рассмотрим семейство кривых $x = t^3\sin(1/t) + C,\ C \in \mathbb{R}$, полагая $t^3\sin(1/t)\big|_{t=0} = 0$. Его дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{x} = 3t^2\sin(1/t) - t\cos(1/t) = f(t). \tag{4}$$

Единственным решением задачи Коши $x(0) = 0$ будет $x = t^3\sin(1/t)$. Рассмотрим теперь сужение этого уравнения на множество $G = \{(t,x)|\, t\geqslant 0,\ x\geqslant 0\}$. Это сужение можно выписать при желании явно[2], например в виде

$$\dot{x} = \big(3t^2\sin(1/t) - t\cos(1/t)\big)h(x) = f(t,x), \tag{5}$$

где $h(x) = 2x(x+|x|)^{-1}$ при $x > 0$, и $h(x) = 1$ при $x = 0$. В этом примере $\alpha(t) = 0$, и $\tilde{f}(t,x) = f(t)$. Поэтому единственным решением задачи Коши (2) с $(t_0,x_0) = (0,0) \in \partial G$ будет $x = t^3\sin(1/t)$, но эта кривая не лежит целиком в $G$. Неравенство (3) имеет вид $0 \leqslant f(t,0) = f(t)$, и оно сколь угодно близко к $t = 0$ как выполняется, так и нарушается.

Чтобы показать, что при выполнении неравенства $\alpha'(t) > f(t,\alpha(t)),\ t \in (t_0, t_0 + a]$ решение задачи Коши может как существовать, так и отсутствовать, воспользуемся примером 3 из [1]. В качестве $(t_0,x_0)$ берется $(0,0)$.

**Пример 4.** Рассмотрим следующие два уравнения:

$$(4.1)\quad \dot{x} = 4t\sqrt{x-2t^2} \qquad \text{и} \qquad (4.2)\quad \dot{x} = 6\sqrt{x-2t^2}$$

в секторе $S = \{(t,x)|t \geqslant 0, x \geqslant 2t^2\}$. Здесь $\alpha(t) = 2t^2$, и для обоих уравнений выполняется $\alpha'(t) = 4t > 0 = f(t,\alpha(t))$ при $t > 0$. Эти уравнения решаются, и поведение интегральных кривых изображено на рис. 6 (см. [1]).

У первого уравнения решений, выходящих из $(0,0)$, нет, а у второго их существует бесконечно много.

Для сектора 2-го типа справедливы теоремы, аналогичные теоремам 6 и 7.

**Теорема 8.** *Пусть $S$ есть сектор 2-го типа. Тогда для существования решения задачи Коши* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\varphi_* \leqslant \beta$.*

**Теорема 9.** *Пусть $S$ есть сектор 2-го типа, и $\beta'(t_0) = f(t_0,x_0)$. Если для $t \in [t_0, t_0+a]$ выполнено неравенство*

$$\beta'(t) \geqslant f(t,\beta(t)), \tag{6}$$

*то задача Коши* (1) *имеет решение.*

---

[2] В дальнейшем мы не всегда будем придерживаться такого формализма, если он, будучи технически очевидным, только излишне усложняет пример.

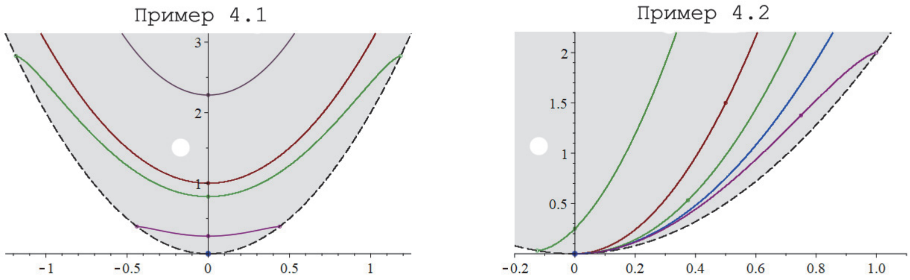


*Рис. 6.*

**Примечание.** Если неравенство (6) нарушается, то ничего сказать нельзя. В частности, даже если выполняется глобально противоположное к (6) неравенство $\beta'(t) < f(t, \beta(t))$, $t \in (t_0, t_0 + a]$, решение задачи Коши может как существовать, так и отсутствовать.

Отметим, что теоремы 7 и 9 были доказаны в [1] при дополнительном предположении, что функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ выпуклы вверх и вниз соответственно.

Перейдем к рассмотрению сектора 3-го типа. Здесь ситуация сложнее, и необходимые и достаточные условия написать уже не удается.

**Теорема 10.** *Пусть $S$ есть сектор 3-го типа. Тогда: 1) неравенства $\varphi^* \geqslant \alpha$ и $\varphi_* \leqslant \beta$ являются необходимыми условиями существования решения задачи Коши* (1)*; 2) если $\alpha \leqslant \varphi_* \leqslant \beta$ или $\alpha \leqslant \varphi^* \leqslant \beta$, то задача Коши* (1) *имеет решение.*

Утверждение 1 теоремы 10 означает, что если существует такая последовательность $t_k \downarrow t_0$[3], что $\varphi^*(t_k) < \alpha(t_k)$ или $\varphi_*(t_k) > \beta(t_k)$, то у задачи (1) решений нет.

**Замечание 3.** В остальных случаях о существовании решения задачи (1) без привлечения дополнительных свойств функции $f$ внутри сектора $S$ сказать ничего нельзя. В частности, даже если оба необходимых условия из п. 1 выполнены одновременно в следующем сильном варианте: $\varphi_* \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \varphi^*$ (это означает, что сектор $S$ целиком лежит внутри интегральной воронки задачи Коши (2)), то решение задачи Коши (1) может как существовать, так и отсутствовать.

Доказательство теоремы 10. В случае 1, если $\varphi$ есть решение задачи Коши (1), то $\varphi$ будет решением и задачи (2), и должны выполняться неравенства $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \varphi^*$ и $\varphi_* \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

В случае 2 сами $\varphi_*$ и $\varphi^*$ являются искомыми решениями задачи (1). □

Что касается замечания 3, то примеры, иллюстрирующие его справедливость, можно найти в [1] (см. пример 1 с $\sigma = \pm 1$). Поэтому мы ограничимся лишь двумя примерами для случая $\varphi_* \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \varphi^*$, упомянутого в замечании.

**Пример 5.** Возьмем классический пример Пеано неединственности $\dot{x} = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$. Имеем $\varphi_*(t) = 0$ и $\varphi^*(t) = t^3$. Если это уравнение сузить на сектор $S = \{(t, x) | t \in [0, 1], t^5 \leqslant x \leqslant t^4\}$, то задача Коши (1) не будет иметь решений, хотя сектор $S$ и лежит внутри интегральной воронки задачи Коши (2), образованной решениями $\varphi_*$ и $\varphi^*$.

**Пример 6.** Теперь возьмем уравнение из примера 1: $\dot{x} = (3/2)x^{1/3}$, $x(0) = 0$. Здесь $\varphi_*(t) = -t^{2/3}$ и $\varphi^*(t) = t^{2/3}$. Если сузить это уравнение на сектор $S =$

[3]Символ $\downarrow$ обозначает монотонное убывание.

$\{(t, x) | t \in [0, 1], -t^2 \leqslant x \leqslant t^2\}$, то $S$ также лежит внутри сектора неединственности, образованного $\varphi_*$ и $\varphi^*$, но теперь задача Коши (1) имеет решение $x = 0$.

**Теорема 11.** *Пусть $S$ есть сектор 3-го типа и хотя бы одно из чисел $\alpha'(t_0), \beta'(t_0)$ равно $f(t_0, x_0)$. Если выполняется одно из условий*

$$\text{(A)} \quad \alpha'(t) \geqslant f(t, \alpha(t)),\ \beta'(t) \leqslant f(t, \beta(t)),\ \forall t \in [t_0, t_0 + h] \quad \textit{(рис. 7, а)},$$

$$\text{(B)} \quad \alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)),\ \beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t)),\ \forall t \in [t_0, t_0 + h] \quad \textit{(рис. 7, б)},$$

*то задача Коши* (1) *имеет решение.*

**Замечание 4.** Если эти условия нарушаются, например так, как изображено на рис. 7, *в* или 7, *г*, то задача Коши может как иметь, так и не иметь решения.

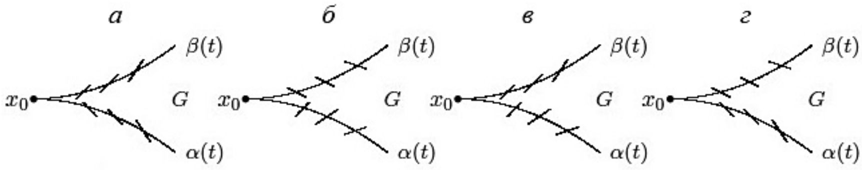


*Рис. 7.*

Случай (B) при дополнительных предположениях, что $\alpha$ выпукла вверх, а $\beta$ выпукла вниз, имеется в [1]. А случай (A) — как раз один из тех, в которых метод ломаных применить принципиально невозможно.

**Замечание 5.** Так как $\alpha(t) < \beta(t)$ на $(t_0, t_0 + h]$, то должно выполняться $\alpha'(t_0) \leqslant \beta'(t_0)$. Если выполнено условие (A), то необходимо $\alpha'(t_0) = \beta'(t_0) = f(t_0, x_0)$. Если же выполнено условие (B), то возможны варианты со строгим неравенством $\alpha'(t_0) < \beta'(t_0) = f(t_0, x_0)$ или $\alpha'(t_0) = f(t_0, x_0) < \beta'(t_0)$. В вариантах со строгим неравенством ничего доказывать не нужно, так как искомым решением задачи Коши (1) сразу будут соответственно нижнее или верхнее решения задачи Коши (2).

**Замечание 6.** Несложно видеть, что рис. 7, *а*, *б* и 7, *в*, *г* похожи на нормальные секторы Фроммера 1-го, 2-го и 3-го типов (см. [5, гл. 2, § 4], [6]), и заметить аналогию между существованием решения задачи Коши (1) и существованием $O$-кривых в секторах Фроммера. Случаи (A) и (B) теоремы 11 (рис. 7, *а*, *б*) означают, что граница $S$ есть множество точек нестрогого выхода и входа в $S$ (см. [2, гл. 3, § 8]). По сути это единственные общие случаи, когда только и можно доказать существование $O$-решения. Отметим, что мы доказываем теорему 11, не предполагая единственности решений уравнения $\dot{x} = \tilde{f}(t, x)$. Если такое предположение сделать (как это сделано в [5, 6]), то доказательство можно существенно упростить.

Доказательство теоремы 11. Начнем с условия (A). Покажем, что задача Коши (1) не просто имеет решение, а что ее решения целиком заполняют сектор $S$. Для этого рассмотрим расширенное уравнение

$$\dot{x} = \tilde{f}(t, x) \tag{7}$$

и покажем, что через любую точку $S$ можно провести такое решение (7), что при продолжении влево оно остается в $S$ и входит в точку $(t_0, x_0)$. Пусть $(t_1, x_1)$ произвольная точка из $S$. Если она не лежит на границе, т. е. выполняется $\alpha(t_1) < x_1 < \beta(t_1)$, то возьмем любое левостороннее решение $\varphi$ уравнения (7), проходящее через эту точку. Очевидно, что при достаточно малых $\delta$ на отрезке $[t_1 - \delta, t_1]$ будет выполняться неравенство $\alpha(t) < \varphi(t) < \beta(t)$. Если $(t_1, x_1)$ лежит на верхней границе $\beta$, т. е. $\alpha(t_1) < x_1 = \beta(t_1)$, то в качестве $\varphi$ возьмем левостороннее нижнее решение уравнения (7), проходящее через $(t_1, x_1)$. По левостороннему варианту нестрогой теоремы сравнения на достаточно малом отрезке $[t_1 - \delta, t_1]$ имеем $\alpha(t) < \varphi(t) \leqslant \beta(t)$. Наконец, если $(t_1, x_1)$ лежит на нижней границе $\alpha$, т. е. выполняется $\alpha(t_1) = x_1 < \beta(t_1)$, то в качестве $\varphi$ возьмем левостороннее верхнее решение, для которого на $[t_1 - \delta, t_1]$ будет выполняться $\alpha(t) \leqslant \varphi(t) < \beta(t)$. Во всех трех случаях решение $\varphi$ лежит в $S$ при $t \in [t_1 - \delta, t_1]$.

Продолжим решение $\varphi$ влево. Так как $\varphi$ начинается в компакте $S$, то, как известно из общей теории дифференциальных уравнений, $\varphi$ может быть продолжено до момента выхода на границу компакта. Таких моментов выхода может быть несколько, но для любого продолжения существует *последний* момент выхода, после которого решение уже не возвращается в компакт. Покажем, что мы можем продолжать $\varphi$ так, что этой последней точкой выхода будет $(t_0, x_0)$. В самом деле, пусть $(t_2, \varphi(t_2))$ есть какая-то точка выхода $\varphi$ на границу $S$, где $t_2 \in [t_0, t_1)$. Если это точка $(t_0, x_0)$, то все доказано. Если $(t_2, \varphi(t_2)) \neq (t_0, x_0)$, то $t_2 > t_0$, и точка лежит либо на кривой $\beta$, либо на кривой $\alpha$. В обоих случаях поступим так же, как и выше. В зависимости от того, лежит ли точка $(t_2, \varphi(t_2))$ на кривой $\beta$ или $\alpha$, продолжим решение $\varphi$ влево за эту точку соответственно либо левосторонним нижним, либо левосторонним верхним решением, выпущенным из $(t_2, \varphi(t_2))$. Такое продолжение будет по-прежнему оставаться в компакте $S$. Из этого следует, что у продолжаемого таким образом решения последняя точка выхода не может лежать на кривых $\beta$ и $\alpha$ при $t > t_0$. Значит, это будет точка $(t_0, x_0)$. Требуемое решение построено.

Перейдем к условию (B). Покажем, что задача Коши (2) имеет решение, целиком лежащее в $S$. Возьмем произвольную последовательность $t_k \downarrow t_0$ и рассмотрим точки $(t_k, \beta(t_k))$ на кривой $\beta$. Через каждую точку проведем вправо такое решение $\psi_k$ уравнения (7), которое будет располагаться целиком в $S$ при $t \in [t_k, t_0 + a]$. Такое продолжение строится совершенно аналогично случаю 1, только алгоритм надо «зеркально перевернуть»: если решение $\psi_k$ выходит на верхнюю границу $\beta$, то мы его продолжаем вправо нижним решением соответствующей задачи Коши, а если $\psi_k$ выходит на $\alpha$, то продолжаем его вправо верхним решением. Определим

$$\varphi_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \psi_k(t), & t \in [t_k, t_0 + a], \\ \beta(t_k), & t \in [t_0, t_k). \end{cases}$$

Графики всех $\varphi_k$ лежат в прямоугольнике $P$, поэтому эта последовательность равномерно ограничена. Положим $M = \max\limits_S |\tilde{f}(t, x)|$. Функция $\varphi_k$ кусочно-гладкая. При $t \in [t_k, t_0 + a]$ имеем $|\varphi_k'(t)| \leqslant M$, а при $t \in [t_0, t_k)$ очевидно $\varphi_k'(t) \equiv 0$. Таким образом, производные всех $\varphi_k$ равномерно ограничены, и стало быть эта последовательность равностепенно непрерывна. По лемме Арцела—Асколи из нее можно выбрать равномерно сходящуюся на $[t_0, t_0 + a]$ подпоследовательность. Будем считать, что $\varphi_k$ и есть уже эта подпоследовательность, и пусть $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$. Покажем, что $\varphi$ будет искомым решением задачи Коши (2), и стало быть решением задачи Коши (1). Хорошо известно, что равномерный предел решений дифференциального уравнения есть также его решение [2, гл. 2]. Для произвольного $\delta > 0$ возьмем $N$ такое, что $\forall k \geqslant N$ выполняется $t_k \in (t_0, t_0 + \delta)$. Тогда $\varphi_k|_{[t_0+\delta, t_0+a]} = \psi_k$. Поэтому $\psi_k \rightrightarrows \varphi$ на $[t_0 + \delta, t_0 + a]$ и, следовательно, $\varphi$ есть решение (7) на $[t_0 + \delta, t_0 + a]$ для любого $\delta > 0$. Из этого следует, что $\varphi$ будет решением на всем $[t_0, t_0 + a]$. Так как графики $\psi_k$ лежат в компакте $S$, то и предельный график $\varphi$ лежит в $S$. Наконец, $\varphi(t_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(t_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \beta(t_k) = x_0$. Теорема доказана. □

В качестве примеров, показывающих, что при невыполнении условий (A) или (B) решение у задачи Коши может как быть, так и не быть, ограничимся случаем, когда $S$ будет сектором 3-го типа (в терминологии замечания 6). Первым можно рассмотреть пример 5 из теоремы 10. Поведение поля направлений на границе $S$ соответствует рис. 7, *в*. Решение задачи Коши отсутствует.

Если для того же самого уравнения в качестве области определения взять $S = \{(t,x)|t \in [0,1], -t^4 \leqslant x \leqslant t^4\}$, то $S$ также соответствует рис. 7, *в*, но теперь задача Коши имеет решение $x = 0$.

Приведем также пример 1 из [1]: $\dot{x} = 4\sigma\sqrt{2t^2 - |x|} + 6t$, где $\sigma = \pm 1$. Поведение интегральных кривых изображено на рис. 8.

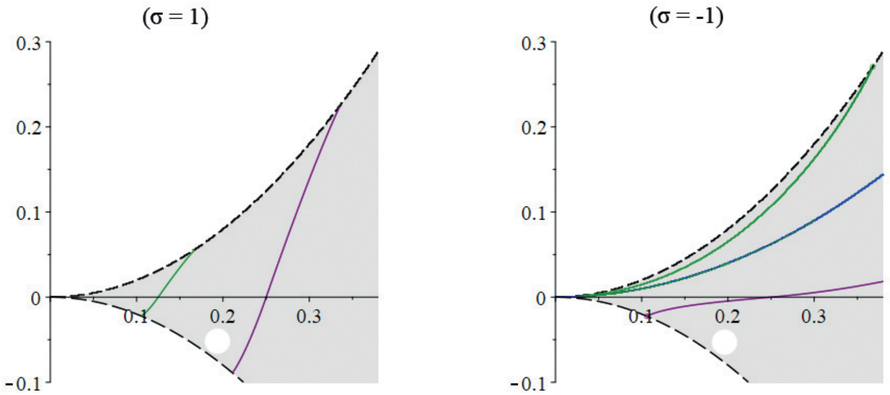


*Рис. 8.*

Область определения $S = \{(t,x)|t \geqslant 0, |x| \leqslant 2t^2\}$ и поведение поля направлений также соответствует рис. 7, *в*. При $\sigma = 1$ решения задачи Коши $x(0) = 0$ нет, а при $\sigma = -1$ таких решений будет бесконечно много.

**Замечание 7.** Из неравенств условия (A) теоремы 11 и теоремы 4 следует, что $\alpha \geqslant \varphi_*$ и $\beta \leqslant \varphi^*$, т. е. сектор $S$ лежит внутри интегральной воронки, образованной решениями $\varphi_*$ и $\varphi^*$. Однако, как показывают примеры к замечанию 3, это еще не влечет автоматически существование нужного решения задачи Коши.

**Замечание 8.** Можно показать, что при нашем способе расширения функции $f$ до $\tilde{f}$ в случае (B) теоремы 11 сектор $S$ *всегда* содержит внутри себя интегральную воронку задачи Коши (2), т. е. всегда выполняются неравенства $\alpha \leqslant \varphi_*$ и $\beta \geqslant \varphi^*$. Это совсем нетривиально, поскольку теорема сравнения 4 при условии (B) утверждает лишь, что $\alpha \leqslant \varphi^*$ и $\beta \geqslant \varphi_*$. Докажем, например, что $\alpha \leqslant \varphi_*$ (второе неравенство доказывается аналогично). В самом деле, для тех точек $(t,x) \in P$, что лежат под графиком $\alpha$, имеем по определению $\tilde{f}(t,x) = f(t,\alpha(t))$. Поэтому всякое решение уравнения $\dot{x} = \tilde{f}(t,x)$, лежащее под кривой $\alpha$, будет решением уравнения $\dot{x} = f(t,\alpha(t))$. Допустим, что существует $t_1 > t_0$ такое, что $\varphi_*(t_1) < \alpha(t_1)$. При этом $\varphi_*(t_0) = \alpha(t_0) = x_0$ и $\varphi_*'(t_0) = f(t_0,x_0) = f(t_0,\alpha(t_0)) \geqslant \alpha'(t_0)$. Значит существует такое $t_2 \in (t_0, t_1)$, что выполняется $\varphi_*(t_2) < \alpha(t_2)$ и $\varphi_*'(t_2) < \alpha'(t_2)$. Но тогда $\varphi_*'(t_2) = \tilde{f}(t_2, \varphi_*'(t_2)) = f(t_2, \alpha(t_2)) < \alpha'(t_2)$, что невозможно по условию. Получили противоречие. Таким образом, в случае (B) теоремы 11 интегральная воронка задачи Коши (2) всегда лежит внутри $S$. Пользуясь этим замечанием, можно дать другое доказательство пункта (B).

**3. Некоторые обобщения.** В этом разделе мы укажем на некоторые обобщения полученных выше результатов. Эти обобщения не затрагивают сути применяемого подхода и носят скорее формально-технический (или формально-теоретический) характер. Поэтому ради наглядности изложения мы доказали основные результаты для случая, наиболее актуального с точки зрения практики, а упомянутые обобщения приводим отдельно.

***3.1.*** Вместо обычных производных в применяемых дифференциальных неравенствах можно использовать правосторонние производные (как, например, в [2]). При этом в формулировках теорем 3, 4, 5, 7, 9 и 11 надо обычную производную везде заменить на правостороннюю, и все утверждения остаются в силе.

К еще большему обобщению мы придем, если воспользуемся производными числами Дини: верхними и нижними левым и правым $D^{\pm}$ и $D_{\pm}$[4], определение см. в [3, 4]. Изменения выглядят так. В строгой теореме сравнения можно писать любое фиксированное производное число Дини, см. [3, п. 1.2, замечание 1.2.2]. В теореме 4 неравенство $\psi'(t) \leqslant f(t, \psi(t))$ следует заменить на $D_{\pm}\psi(t) \leqslant f(t, \psi(t))$, а неравенство $\psi'(t) \geqslant f(t, \psi(t))$ на $D^{\pm}\psi(t) \geqslant f(t, \psi(t))$. Какое брать число Дини — левое или правое, значения не имеет. Утверждение теоремы остается в силе, см. [3, п. 1.4] или [4, § 1.4].

Это дает нам следующие обобщения. Так как числа Дини определены для *любой непрерывной* функции, то можно убрать требование гладкости граничных функций $\alpha$ и $\beta$. Достаточно, чтобы *сектор $S$ ограничивался непрерывными кривыми*! Тогда в формулировке теоремы 5 вместо $\alpha'(t_0)$ и $\beta'(t_0)$ надо писать правые верхнее $D^+$ или нижнее $D_+$ числа Дини в этих точках. В теоремах 7, 9 и 11 неравенство $\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t))$ можно заменить на $D_{\pm}\alpha(t) \leqslant f(t, \alpha(t))$, а неравенство $\beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t))$ на $D^{\pm}\beta(t) \geqslant f(t, \beta(t))$. При этом все утверждения остаются в силе.

***3.2.*** Результаты статьи [1] касались вопроса существования локального решения задачи Коши. Задача его продолжения не исследовалась. Метод теорем сравнения позволяет в ряде случаев эффективно отвечать на этот вопрос (в этом и состоит суть известного метода Чаплыгина). Предположим, что дифференциальные неравенства на $\alpha$ и $\beta$ из теорем 7, 9 и 11 выполняются не локально (в достаточно малом прямоугольнике $P$), а глобально на всей границе сектора $S$. Тогда в условиях теоремы 11 найдется такое решение задачи Коши (1), которое будет существовать на всем том промежутке, на котором выполняются условия (A) или (B). Хотя мы и ссылаемся на метод Чаплыгина, справедливость этого утверждения легко усматривается в самом приведенном выше доказательстве теоремы 11. Что касается теорем 7 и 9, то здесь ситуация ничем не отличается от случая обычной задачи Коши, и вопрос о продолжении решения следует изучать так же, как и в общей теории. Так в условиях теоремы 7 решение начальной задачи может уходить на бесконечность с вертикальной асимптотой, и тогда его максимальным промежутком существования $I$ будет $[t_0, T)$, может продолжаться неограниченно вправо, и тогда $I = [t_0, \infty)$, и, наконец, может выходить на границу $\alpha$ в точке $t_1$, и тогда $I = [t_0, t_1]$.

[4]Существуют другие обозначения: $D^- = {}^*D, D^+ = D^*, D_- = {}_*D, D_+ = D_*$.

**4. Заключение.** Результатами данной статьи закрывается имеющийся пробел в изучении вопроса существования или отсутствия решения граничной задачи Коши. В статье [1] было продемонстрировано применение метода ломаных Эйлера к решению этой задачи. В данной статье используется более общая техника теорем сравнения и дифференциальных неравенств, которая позволяет решить поставленную задачу в более общем виде. Полученные результаты могут быть использованы как в учебной деятельности, так и в прикладном анализе конкретных математических моделей.

### Литература


1. *Басов В. В., Ильин Ю. А.* О существовании решения граничной задачи Коши // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 2. С. 277–288. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.210

2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

3. *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities; theory and applications. Vol. I. New York: Academic Press, 1969.

4. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

5. *Андреев А. Ф.* Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003.

6. *Frommer M.* Die Integralkurven einer gewönlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung rationalen Unbestimmtheitsstellen // Math. Annalen. 1928. Bd. 98. S. 222–272 (Перевод: Успехи мат. наук. 1941. Вып. 9. С. 212–253).



Статья поступила в редакцию 23 марта 2020 г.;
после доработки 3 июня 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.



Контактная информация:

*Басов Владимир Владимирович* — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlvlbasov@rambler.ru
*Ильин Юрий Анатольевич* — канд. физ.-мат. наук, доц.; iljin_y_a@mail.ru


## On the Cauchy problem with an initial point lying on the boundary of ordinary differential equation's domain of definition*


*V. V. Basov, Yu. A. Iljin*

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation



**For citation:** Basov V. V., Iljin Yu. A. On the Cauchy problem with an initial point lying on the boundary of ordinary differential equation's domain of definition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 636–648. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.406 (In Russian)



In this paper we investigate the existence of solution of the initial-value problem with an initial point located at the boundary of the domain of definition for the first-order differential equation. This initial-value problem differs from the one accepted in classical theory, where the initial point is always internal for domain. Our aim is to find such conditions for the right-hand side of the equation and the boundary that would guarantee the existence or absence of this solution. In its previous article the authors used the standard Euler polygonal line method to solve this problem and described all cases when this method



*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 19-01-00388).

is used to get the desired answer. The polygonal line method, having certain advantages (constructibility, the ability to use a computer), requires for its implementation that both the equation and the domain of its definition meet certain restrictions, which inevitably narrows the class of acceptable equations. In this paper, we attempt to maximize the results obtained earlier, and for this purpose we use a completely different approach. The original equation is extended in such a way that the boundary initial-value problem becomes an ordinary internal initial-value problem, for which the standard Peano theorem is applied. To answer the question whether the solution of the modified initial-value problem is also the solution of the original boundary initial-value problem, so-called comparison theorems and differential inequalities are applied. This article is an independent study, not based on our previous work. For the sake of completeness, new proofs are given for previously obtained results, which are based on a new approach. As a result, we expanded the class of equations under consideration, removed the previous requirements for convexity and smoothness of boundary curves, and added cases that could not be considered using the polygonal line method. This work closes a certain gap that exists in the literature on the existence or absence of solutions to the boundary initial-value problem.

*Keywords*: boundary initial-value problem, boundary of domain of definition, boundary initial point, maximal and minimal solutions, nonuniqueness sector, differential inequality, comparison theorems.

## References

1. Basov V. V., Iljin Yu. A., “On the existence of a solution of the boundary initial-value problem”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **53**(2), 180–190 (2020).

2. Hartman P., *Ordinary Differential Equations* (SIAM, 2002, vol. 38 of Classics in Applied Mathematics).

3. Lakshmikantham V., Leela S., *Differential and integral inequalities; theory and applications* **I** (Academic Press, New York, 1969).

4. Krasnosel’skii M. A., *The operator of translation along the trajectories of differential equations* (Providence, R. I., 1968, vol. 19 of Translation of Mathematical Monographs).

5. Andreev A. F., *Introduction in local quality theory of differential equations* (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2003). (In Russian)

6. Frommer M., “Die Integralkurven einer gewönlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung rationalen Unbestimmtheitsstellen”, *Math. Annalen* **98**, 222–272 (1928).

Received: March 23, 2020
Revised: June 3, 2020
Accepted: June 18, 2020

Authors’ information:

*Vladimir V. Basov* — vlvlbasov@rambler.ru
*Yurii A. Iljin* — iljin_y_a@mail.ru