

## Конические особые точки и векторные поля

*С. Н. Бурьян*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Бурьян С. Н.* Конические особые точки и векторные поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 649–661. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.407>

В статье рассматривается несколько примеров механизмов, чьи конфигурационные пространства являются гладкими многообразиями с одной особой точкой: две пересекающиеся (или касающиеся) кривые на двумерном торе, четыре кривые с общей точкой на четырехмерном торе, двумерный конус (касп) в  $\mathbb{R}^6$ . Основной задачей в статье является вычисление (ко)касательного пространства над особой точкой с использованием различных теоретических подходов. Вне особых точек движение указанных механизмов описывается в рамках классической механики. Но в окрестности особой точки такие понятия, как касательный и кокасательный векторы требуют концептуально нового определения. В статье используется подход теории дифференциальных пространств. В случае конической особой точки для вычисления (ко)касательного пространства использованы две различные дифференциальные структуры: алгебра функций, локально постоянных вблизи вершины конуса, и алгебра сужений гладких функций с объемлющего пространства на конус. В первом случае касательное и кокасательное пространства в вершине конуса оказываются нулевыми. Во втором — алгебра функций на кокасательном расслоении состоит из функций, локально постоянных на кокасательном слое над особой точкой.

*Ключевые слова:* особая точка, многообразия с коническими особенностями, дифференциальные пространства.

**1. Введение.** В общем случае механическая система представляет собой систему материальных точек и распределенных тел, на перемещения которых наложены ограничения (связи). Конфигурационное пространство системы представляет собой гладкое многообразие  $M$ . Так, положения шарнирного механизма задаются координатами вершин и углами поворота стержней. Если конфигурационное пространство шарнирного механизма содержит особые точки, то для описания его движения невозможно применить понятия дифференциальной геометрии и классической механики. Для постановки задач по кинематике в этом случае необходимо использовать методы геометрии сингулярных пространств.

Существует несколько подходов к построению дифференциальной геометрии на множествах, на которых не задана структура гладкого многообразия. В дифференциальном исчислении над коммутативными алгебрами [1, 2] все понятия дифференциальной геометрии, такие как точки, касательные векторы, векторные поля, формулируются через алгебру функций. В полученных алгебраических терминах уже нет понятия «гладкости». Другие теории, такие как дифференциальные простран-

ства [3, 4] и пространства Фрëлихера [5], кроме алгебры функций рассматривают и исходное точечное пространство, на котором задана топология.

В работе [6] рассматривался случай, когда конфигурационное пространство механической системы вблизи особой точки представляет объединение двух гладких кривых. В данной статье на основе этого механизма делается построение механизмов, конфигурационные пространства которых представляют собой четыре гладкие кривые, конус или касп. Если динамику на объединении нескольких кривых можно (формально) разбить на несколько движений отдельно по каждой кривой, то для конуса или каспа такого представления не существует. Для особых точек рассматривается множество векторов скоростей гладких кривых, проходящих через особую точку. При изучении кинематики механизмов применяются методы дифференциальных пространств. Рассматриваются две дифференциальные структуры на конусе, их (ко)касательные пространства в особой точке и фазовое пространство  $T^*X$ .

**2. Конфигурационные пространства с особыми точками.** Рассмотрим несколько примеров механических систем с особенностями конфигурационного пространства. Они получаются на основе сингулярного маятника. Конфигурационные пространства этих механизмов представляют собой две пересекающиеся (или касающиеся) кривые, четыре пересекающиеся (или касающиеся кривые), конус или касп.

**2.1. Сингулярный маятник.** Рассмотрим плоский двойной маятник  $ABC$  со стержнями  $AB$  и  $BC$ . Точка  $A$  зафиксирована (неподвижный шарнир), а точка  $C$  движется только по заданной кривой  $\gamma$  (например, эллипсу) [7]. Трение в модели не учитывается. Назовем этот механизм *сингулярным маятником*. Каждое возможное положение механизма задается парой углов  $(\varphi, \psi)$  отклонений стержней  $AB$  и  $BC$  от вертикальной прямой. Условие того, что точка  $C$  движется только по заданной кривой  $\gamma$ , задает дополнительное соотношение на углы  $\varphi$  и  $\psi$  (рис. 1). Угол  $u$  измеряет отклонение прямой  $AC$  от оси  $AX$  (с учетом знака угла).

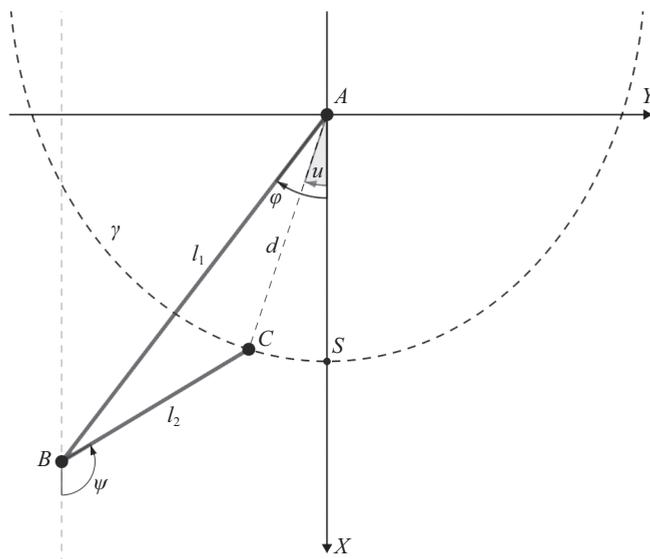


Рис. 1. Сингулярный маятник.

**Теорема [7].** Конфигурационное пространство сингулярного маятника лежит на двумерном торе (с координатами  $(\varphi, \psi)$ ) и представляет в общем случае две гладкие кривые  $s_1$  и  $s_2$  без общих точек. Можно подобрать кривую  $\gamma$  так, что кривые  $s_1$  и  $s_2$  имеют единственную общую точку  $\omega$ . Геометрически точка  $\omega$  соответствует следующей конфигурации механизма: стержни  $AB$  и  $BC$  сонаправлены (и направлены параллельно оси  $AX$ ) при  $u = 0$ .

Заметим, что локально возможно устроить любую степень касания кривых  $s_1$  и  $s_2$  в общей точке  $\omega$ .

**2.2. Двойной сингулярный маятник.** Модифицируем сингулярный маятник, добавив к нему симметричный маятник. Заметим, что сингулярный маятник можно построить следующим образом: к точке  $C$  на заданной кривой  $\gamma$  и неподвижной точке  $A$  «крепится» двойной маятник  $ABC$ . Аналогично можно добавить симметрично еще один двойной маятник  $ADC$ . Второй маятник может иметь те же длины стержней  $|AB|$  и  $|BC|$  или другие. При двух одинаковых (симметричных) маятниках  $ABC$  и  $ADC$  получаем механизм, похожий на «ножницы» (рис. 2). Получаем *двойной сингулярный маятник*. Конфигурационное пространство двойного сингулярного маятника представляет собой четыре гладкие кривые с общей точкой.

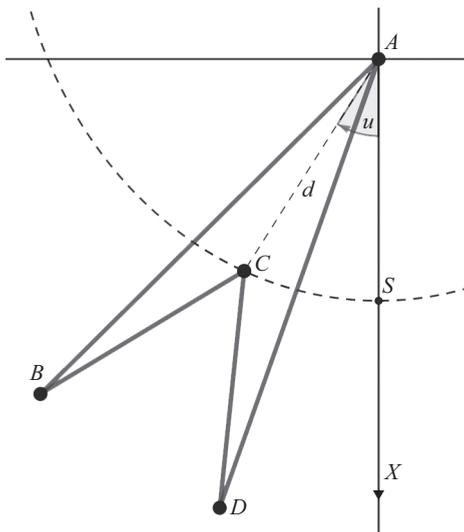


Рис. 2. Двойной сингулярный маятник.

**2.3. Вращающийся сингулярный маятник.** Конфигурационные пространства сингулярного и двойного сингулярного маятников являются одномерными многообразиями с особыми точками. Возможно построить и двумерные многообразия с особыми точками. Например, пусть вертикальная ось сингулярного маятника неподвижна, а плоскость маятника  $\Pi$  вращается вокруг оси  $AX$ . Каждому положению плоского маятника вне особой точки соответствует дополнительная степень свободы: вращение маятника вокруг вертикальной оси (рис. 3). Назовем этот механизм *вращающимся сингулярным маятником*. Вершины  $B(x_1, y_1, z_1)$  и  $C(x_2, y_2, z_2)$  теперь расположены в  $\mathbb{R}^3$ . Конфигурационное пространство маятника в координатах  $(\varphi, \psi, \xi)$  представляет собой поверхность вращения. Углы  $\varphi$  и  $\psi$  соответствуют

отклонениям стержней  $AB$  и  $BC$  от вертикальной оси (координаты на торе), а  $\xi$  есть угол поворота маятника в плоскости, ортогональной вертикальной оси  $AX$ . При повороте на угол  $\xi = \pi$  маятник переходит в симметричное положение, оставаясь в той же плоскости. Координаты маятника в пространстве  $\mathbb{R}^{3+3}$  имеют следующий вид (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \varphi; & x_2 &= l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi; \\ y_1 &= l_1 \sin \varphi \cos \xi; & y_2 &= (l_1 \sin \varphi + l_1 \sin \psi) \cos \xi; \\ z_1 &= l_1 \sin \varphi \sin \xi; & z_2 &= (l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \psi) \sin \xi. \end{aligned} \quad (1)$$

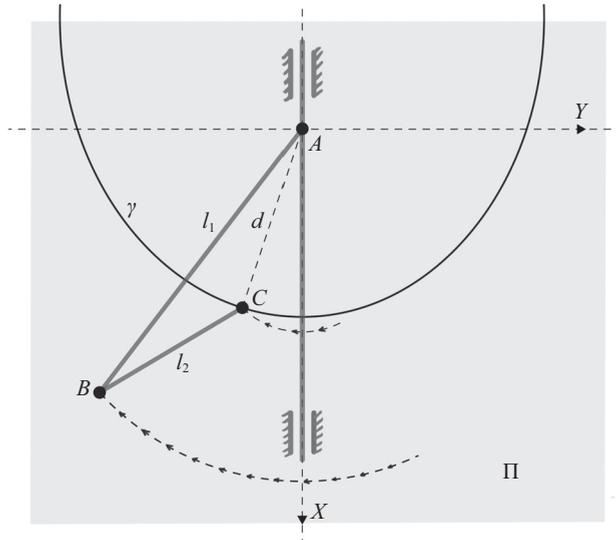


Рис. 3. Вращающийся сингулярный маятник.

**2.4. Пространственный сингулярный маятник.** Рассмотрим другую модификацию сингулярного маятника. Например, точка  $A$  и кривая  $\gamma$  лежат в одной (неподвижной) плоскости  $\Pi$ , а вершина  $C$  маятника  $ABC$  может свободно двигаться по кривой  $\gamma$ . Двухзвенник  $ABC$  может свободно вращаться вокруг оси  $AC$  при фиксированном положении вершины  $C$ . Назовем этот механизм *пространственным сингулярным маятником*. Единственная особая точка этого механизма соответствует особой точке сингулярного маятника: стержни  $AB$  и  $BC$  должны быть сонаправлены при  $u = 0$ . Вне особой точки у механической системы есть две степени свободы (рис. 4). Расстояние  $|AC|(u) = d(u)$  является гладкой функцией угла  $u$ . Если  $u = 0$  соответствует (локально) минимальному или максимальному значению  $d(u)$ , то должно выполняться  $d'(0) = 0$ .

Найдем зависимость координат точек  $B(x_1, y_1, z_1)$  и  $C(x_2, y_2, z_2)$  от углов  $u$ ,  $\theta$  и  $\xi$ . Заметим, что при вращении вокруг оси  $AX$   $x$ -координаты точек  $B$  и  $C$  не меняются. Поскольку точка  $A$  и кривая  $\gamma$  лежат в общей плоскости  $\Pi$ , то прямая  $AC$  также лежит в плоскости  $\Pi$ . Угол  $u$  измеряет отклонение прямой  $AC$  от вертикальной прямой  $AX$  в плоскости  $\Pi$ . Угол  $\theta$  измеряет отклонение стержня  $AB$  от прямой  $AC$  в плоскости  $ABC$ . За угол  $\xi$  обозначен угол поворота точки  $B$  относительно прямой  $AC$ , лежащей в плоскости  $\Pi$  (рис. 4). Для того чтобы определить угол  $\xi$ , можно

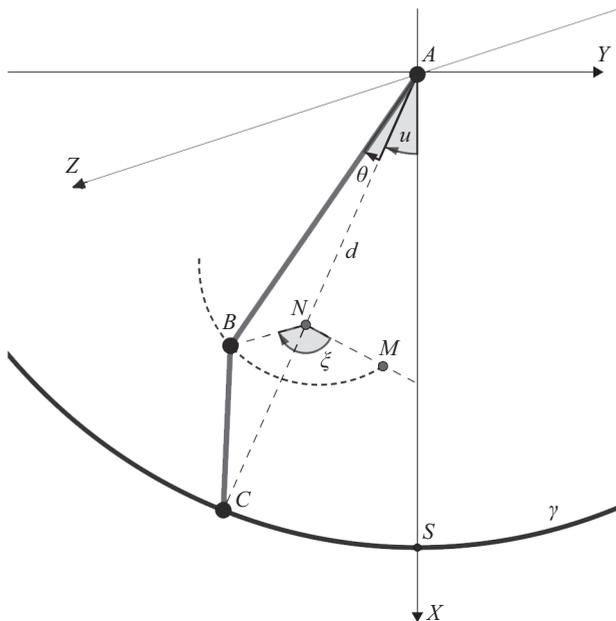


Рис. 4. Пространственный сингулярный маятник.

построить плоскость  $\Pi_1$ , проходящую через точку  $B$ , ортогональную прямой  $AC$ . Пусть  $\Pi_1$  пересекает  $AC$  в точке  $N$ . Из точки  $N$  в плоскости  $\Pi$  проведем прямую  $NM$ , перпендикулярную прямой  $AC$ . Тогда угол  $\xi$  есть угол между прямыми  $NM$  и  $NB$ .

**Утверждение.** Конфигурационное пространство пространственного сингулярного маятника имеет особенность типа конической (или каспидальной) особой точки.

**Доказательство.** Найдем координаты точки  $B$ . Заметим, что ее координаты можно получить при трех вращениях вокруг определенных осей. Если повернуть прямую  $AC$  на угол  $-u$  (рис. 4) вокруг точки  $A$  в плоскости  $\Pi$ , то прямая  $AC'$  будет параллельна оси  $AX$ . Точка  $C$  перейдет в  $C'$ , а точка  $B$  перейдет в  $B'$ . Если затем повернуть точку  $B'$  на угол  $-\xi$  вокруг оси  $AC'$  (или  $AX$ ), то точка  $B''$  будет лежать в плоскости  $\Pi$  (плоскости  $Oxy$ ).

Действуя в обратном порядке, получаем следующую последовательность шагов. Рассмотрим точку  $B'' = (l_1 \cos \theta, l_1 \sin \theta, 0)$  в плоскости  $\Pi$ . Повернем точку  $B''$  на угол  $\xi$  в плоскости, ортогональной оси  $AX$  и проходящей через точку  $B''$ . Затем выполним поворот прямой  $AC'$  в плоскости  $\Pi$  на угол  $u$  относительно оси  $AX$ . Получим координаты вершин  $B$  и  $C$ :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= l_1 \cos \theta \cos u - l_1 \cos \xi \sin u \sin \theta; & x_2 &= d(u) \cos u; \\
 y_1 &= l_1 \cos \theta \sin u + l_1 \cos \xi \cos u \sin \theta; & y_2 &= d(u) \sin u; \\
 z_1 &= l_1 \sin \xi \sin \theta; & z_2 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

При  $u = 0$  также и угол  $\theta$  равен нулю. В формулах (2) при  $u = 0, \theta = 0$  и любом значении угла  $\xi$  получим одни и те же координаты точек  $B$  и  $C$ . Их значения:

$B = (l_1, 0, 0)$  и  $C = (d(0), 0, 0)$ . От угла  $\xi$ , с которым пространственный маятник движется к особой точке, зависит вектор скорости механической системы в особой точке. Действительно, вектор скорости при  $u \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow 0$  определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)|_{(u=0, \theta=0)} &= (0, l_1 + l_1 \theta'(0) \cos \xi, l_1 \theta'(0) \sin \xi, d'(0), d(0), 0) \dot{u}(0) = \\ &= [(0, l_1, 0, d'(0), d(0), 0) + l_1 \theta'(0) \cdot (0, \cos \xi, \sin \xi, 0, 0, 0)] \dot{u}(0). \end{aligned} \quad (3)$$

Значит, вектор скорости точки  $B$  в особой точке зависит от предельного значения  $\xi$ . В общем случае конфигурационное пространство  $X$  имеет коническую особую точку: направления касательных векторов из (3) при заданном значении  $\dot{u}(0)$  образуют окружность в  $\mathbb{R}^6$ , а значению  $\dot{u}(0) = 0$  соответствует одна точка  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

Если  $\theta'(0) = 0$  и  $d'(0) = 0$ , то выражение для касательного вектора (3) упрощается:

$$(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)|_{(u=0, \theta=0)} = (0, l_1, 0, 0, d(0), 0) \cdot \dot{u}(0)$$

и не зависит от угла  $\xi$ . Следовательно,  $X$  имеет особенность типа каспа в особой точке при  $\theta'(0) = 0$ ,  $d'(0) = 0$ , так как векторы скоростей всех гладких кривых на  $X$  имеют только одно направление в особой точке.  $\square$

Возможно также модифицировать пространственный сингулярный маятник, чтобы различать угол  $\xi$ , с которым точка  $B$  приходит в особую точку (ей соответствует значение угла  $u = 0$ ). Например, к стержню  $AB$  можно добавить дополнительный стержень  $DE$ . При этом точка  $D$  расположена на отрезке  $AB$ , а сам стержень  $DE$  крепится так, что он всегда содержится в плоскости, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Предполагается, что стержень  $AB$  не может вращаться вокруг своей оси. Тогда при разных углах  $\xi$ , с которыми вершина  $B$  приходит в особую точку, мы будем получать геометрически разные конфигурации модифицированного пространственного сингулярного маятника.

Движение сингулярного маятника можно разделить на два независимых движения, при которых координаты вершин меняются гладко. Но для механизма с каспидальной особой точкой уже не выделить конечное множество возможных одномерных движений. Для рассмотрения кинематики пространственного сингулярного маятника необходимо применять методы геометрии сингулярных пространств.

**3. Дифференциальные структуры на конусе.** Для того чтобы определить дифференциальное уравнение геометрическими методами, нужно построить *векторное поле* на *фазовом пространстве* системы. Этим понятиям в случае пространства с особенностями нужно дать точное определение. В случае гладких многообразий эти определения должны совпадать со стандартными понятиями дифференциальной геометрии: касательные векторы, векторные поля и т. д. Обобщения основаны на том, что многие понятия дифференциальной геометрии могут быть сформулированы, например, в алгебраических терминах, которые не используют понятие «гладкости».

**3.1. Дифференциальные пространства.** Приведем несколько вычислений для *дифференциальных пространств* на конусе (или каспе). Вначале опишем необходимый «словарь» терминов.

Рассмотрим топологическое пространство  $X$  и алгебру функций  $F$  на нем. Для  $f \in F$  определена *гладкая оболочка*  $sc(F)$  (или гладкое замыкание) алгебры  $F$ :

$$sc(F) = \{g(f_1, \dots, f_k), f_i \in F, g \in C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}.$$

Взятие второй гладкой оболочки не меняет алгебру:  $sc(sc(F)) = sc(F)$ .

**Определение.** Пара  $(X, F)$  называется *дифференциальным пространством*, если: 1) алгебра  $F$  совпадает со своим гладким замыканием:  $F = sc(F)$ ; 2) функция  $f$  содержится в алгебре  $F$  тогда и только тогда, когда для любой точки  $x \in X$  существует открытая окрестность  $U_x$  и функция  $g \in F$ , такая что  $f|_{U_x} = g|_{U_x}$  (каждая локальная функция из  $F$  содержится в  $F$ ).

**Определение.** Пусть  $(X, F)$  и  $(Y, G)$  — дифференциальные пространства. Отображение  $h : X \rightarrow Y$  называется *гладким*, если для любой функции  $f \in G$  композиция  $h \circ f$  лежит в множестве функций  $F$ .

**Определение.** Пусть  $(X, F)$  — дифференциальное пространство и точка  $x \in X$ . Линейный оператор  $\Delta : F \rightarrow \mathbb{R}$  называется *касательным вектором в точке  $x \in X$* , если для него выполняется тождество Лейбница:

$$\Delta(fg) = \Delta(f)g(x) + f(x)\Delta(g).$$

Множество всех касательных векторов в точке  $x \in X$  — касательное пространство  $T_x X$ . Касательное пространство  $T_x X$  имеет естественную линейную структуру. Также касательные векторы можно получить с помощью гладких кривых.

**Определение.** Кривая  $c : \mathbb{R} \rightarrow X$  называется *гладкой*, если для любой функции  $f \in F$  композиция  $f \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  является гладкой функцией.

Вектор скорости гладкой кривой в точке  $x$

$$\Delta_{c,x}(f) = (f \circ c)'(0)$$

является касательным вектором в операторном смысле,  $\Delta_{c,x} \in T_x X$ .

**Определение.** Пусть  $(X, F)$  — дифференциальное пространство. Линейный оператор  $\Delta : F \rightarrow F$  называется (*операторным*) *векторным полем*, если для него выполняется тождество Лейбница:

$$\Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g).$$

Множество векторных полей алгебры  $F$  (или дифференцирований алгебры  $F$ ) обозначим как  $D(F)$ . Для векторного поля  $V \in D(F)$  значение поля в точке  $v = V_x(f) = V(f)|_x$  определяет касательный вектор  $v \in T_x X$ .

Ковекторы в сингулярном случае можно рассматривать как дифференциалы функций из алгебры.

**Определение.** Пусть функция  $f \in F$ . *Дифференциалом функции  $f$  в точке  $x \in X$*  называется линейное отображение  $df : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ , действующее по правилу

$$df_x(v) = v(f).$$

Множество всех дифференциалов (или ковекторов) в точке  $x \in X$  обозначим как  $T_x^* X$ . Для дифференциального пространства  $(X, F_X)$  его касательное расслоение  $TX = \cup_{x \in X} T_x X$  также может быть наделено структурой дифференциального пространства. В качестве алгебры функций на касательном расслоении можно взять прообразы функций при проекции  $\pi : TX \rightarrow X$  и дифференциалы функций:

$$F_{TX} = sc(\{\pi \circ f, f \in F_X\} \cup \{df, f \in F_X\}). \quad (4)$$

Кокасательное пространство  $T^*X = \cup_{x \in X} T_x^*X$  также может быть наделено структурой дифференциального пространства:

$$F_{T^*X} = sc(\{\pi \circ f, f \in F_X\} \cup \{V^*, V \in D(F_X)\}). \quad (5)$$

Оператор  $V^*$  действует на ковектор  $df$  в точке  $x \in X$  следующим образом:

$$(V^*(df))(x) = V_x(df).$$

**Принцип локализации** [2]. Пусть  $(X, F)$  — дифференциальное пространство. Предположим, что существует функция  $\eta \in F$  со следующими свойствами: можно найти две окрестности  $U_1$  и  $U_2$  точки  $x, x \in U_1 \subset U_2 \subset U$ , такие что  $\eta = 1$  в окрестности  $U_1$  и  $\eta = 0$  вне окрестности  $U_2$ . Тогда значение векторного поля  $\Delta : F \rightarrow F$  можно вычислять «локально»:  $\Delta(f)|_x = \Delta(f|_{U_1})|_x$ .

Пусть в окрестности  $U$  точки  $x$  алгебра  $F|_U$  изоморфна алгебре  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  для некоторого  $n$ . По принципу локализации векторные поля вне особых точек совпадают с векторными полями для гладких многообразий. Мы будем пользоваться этим фактом, чтобы сначала вычислить векторные поля вне особой точки, а затем найти условия на коэффициенты векторных полей.

Исследуем теперь две дифференциальные структуры на конусе  $X$ .

**3.2. Постоянные функции вблизи вершины.** Рассмотрим алгебру функций  $A_c$ , которые локально постоянны вблизи вершины конуса (такие функции на конусе рассматриваются, например, в [4, с. 5–12]):

$$A_c = \{f|_X \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \exists U_0 : f|_{U_0} \equiv \text{const}\}.$$

**Утверждение.** Векторные поля для дифференциального пространства  $(X, A_c)$  обращаются в ноль в особой точке. Касательное пространство  $T_0X$  и кокасательное пространство  $T_0^*X$  имеют размерность ноль.

**Доказательство.** Рассмотрим векторные поля для дифференциального пространства  $(X, A_c)$ . Существует гладкая функция  $\eta_\varepsilon$ , равная единице в  $(\varepsilon/2)$ -окрестности вершины конуса и равная 0 вне шара  $B_\varepsilon(s)$  для любого  $\varepsilon > 0$ . По принципу локализации векторные поля вне особой точки — обычные гладкие векторные поля. В обратную сторону: если есть гладкое вне вершины конуса векторное поле  $\Delta$ , то для функции  $f \in A_c$  есть окрестность  $U$  вершины конуса, такая что  $f|_U = \text{const}$ . Тогда

$$\Delta(f)|_s = \Delta(f|_U)|_s = \Delta(0)|_s = 0.$$

Если определить для каждого векторного поля  $\Delta \in D(A_c)$  значение в особой точке нулем, мы получим оператор  $\Delta : A_c \rightarrow A_c$ : у любой функции есть окрестность, в которой она постоянна и при дифференцировании локально становится нулевой.

Касательное пространство в особой точке равно нулю, так как касательные векторы также локализуемы:

$$\Delta_x(f) = \Delta_x(f|_U) = \Delta_x(c) = 0.$$

Это значит, что касательное пространство в особой точке нулевое. Тогда и кокасательное пространство  $T_s^*X$  также нулевое. Структура функций на кокасательном расслоении такова:

$$V^*(df) = V_x(f) = V_x(f|_U) = 0.$$

Значит, касательное и кокасательное пространства для конуса в особой точке нулевые.  $\square$

Гладкая кривая на  $X$  может пройти вершину конуса только с нулевым вектором скорости или с нулевым импульсом. Но тогда ее состояние в вершине конуса совпадает с состоянием покоя.

**3.3. Функции на конусе.** Рассмотрим теперь алгебру  $A = C^\infty(\mathbb{R}^3)|_X$  сужений гладких функций с объемлющего пространства  $\mathbb{R}^3$  на конус  $X$ .

**Утверждение.** Для дифференциального пространства  $(X, A)$  операторное касательное пространство  $T_0X$  и кокасательное пространство  $T_0^*X$  имеют размерность 3.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вложение конуса в пространство  $\mathbb{R}^3$  дает описание касательного пространства в вершине конуса. Действительно, ограничение  $pr : C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow A$  является сюръективным. Тогда отображение касательных пространств  $d|pr| : T_0A \rightarrow T_0\mathbb{R}^3$  инъективно (см. [2, с. 160–165]). Следовательно, размерность касательного пространства в вершине конуса не более, чем 3. Из вершины конуса можно выпустить три кривые:  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , касательные векторы  $\gamma'_1(0), \gamma'_2(0), \gamma'_3(0)$  которых не компланарны в особой точке. Касательный вектор каждой кривой даст операторный касательный вектор  $\Delta_{\gamma_i,0}, i = 1, 2, 3$ . Стандартные координатные касательные векторы

$$\frac{\partial}{\partial x}|_0, \frac{\partial}{\partial y}|_0, \frac{\partial}{\partial z}|_0$$

выражаются через векторы  $\Delta_{\gamma_i,0}$  и являются линейно независимыми касательными векторами в вершине конуса. Значит, касательное пространство  $T_0X$  трехмерно.

Для дифференциала  $df$  функции  $f$  из алгебры  $A$  и любого касательного вектора  $v \in T_0A$  будет выполняться следующее соотношение:

$$d_0f(v) = v(f) = \left( c_1 \frac{\partial}{\partial x}|_0 + c_2 \frac{\partial}{\partial y}|_0 + c_3 \frac{\partial}{\partial z}|_0 \right) f = \frac{\partial f}{\partial x}(0) d_0x(v) + \frac{\partial f}{\partial y}(0) d_0y(v) + \frac{\partial f}{\partial z}(0) d_0z(v).$$

Тогда ковекторы  $d_0x, d_0y, d_0z$  порождают кокасательное пространство  $T_0^*X$  и линейно независимы. Значит, кокасательное пространство в особой точке имеет размерность три.  $\square$

Так как алгебра  $A$  вне особой точки совпадает с алгеброй гладких функций на плоскости, то кокасательное пространство вне особой точки двумерное.

**Утверждение.** Для дифференциального пространства  $(X, A)$  векторные поля  $V \in D(A)$  обращаются в ноль в вершине конуса.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В общем случае для подмножества  $Y$  декартова пространства  $\mathbb{R}^N$  выполняется следующее условие. Для дифференциального пространства  $(Y, C^\infty(\mathbb{R}^N)|_Y)$  векторное поле  $V \in D(C^\infty(\mathbb{R}^N)|_Y)$  можно продолжить до гладкого векторного поля на объемлющем пространстве  $\mathbb{R}^N$  (см. [3]). Пространство  $\mathbb{R}^N$  наделяется стандартной дифференциальной структурой  $(\mathbb{R}^N, C^\infty(\mathbb{R}^N))$ .

Пусть векторное поле  $V$  является продолжением векторного поля  $W$  с конуса на пространство  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим три кривые  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$ , выходящие из вершины конуса

$S$ , такие что касательные векторы  $\gamma'_1(0)$ ,  $\gamma'_2(0)$ ,  $\gamma'_3(0)$  не компланарны. Для гладкого векторного поля в  $\mathbb{R}^3$ , касательного к конусу вне вершины, можно рассмотреть соответствующие касательные плоскости к конусу  $T_{\gamma_1(t)}$ ,  $T_{\gamma_2(t)}$  и  $T_{\gamma_3(t)}$  вдоль кривых  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ . В силу гладкости поля  $V$  при  $t \rightarrow 0$  касательный вектор  $V(0)$  должен содержаться в пересечении касательных плоскостей  $T_{\gamma_1(0)}$ ,  $T_{\gamma_2(0)}$  и  $T_{\gamma_3(0)}$ . Тем не менее пересечение  $T_{\gamma_1(0)} \cap T_{\gamma_2(0)} \cap T_{\gamma_3(0)}$  состоит только из одной точки — вершины конуса. Таким образом, вектор  $V(0)$  оказывается нулевым, поэтому и значение в вершине конуса исходного поля  $W(0)$  будет нулевым вектором.  $\square$

Соответственно, поскольку значение векторного поля  $W$ , касательного к конусу, нулевое в вершине конуса  $S$ , то и коэффициенты векторного поля  $W$ , такого что  $V|_X = W$ , стремятся к нулю при подходе к особой точке. Опишем теперь функции на  $T^*X$ .

**Утверждение.** *Функции на кокасательном расслоении  $T^*X$  обладают свойствами: 1) это гладкие функции на  $T^*X \setminus T_0^*X$ , значение которых постоянно в слое над особой точкой  $T_0^*X$ ; 2) это непрерывные функции при  $x \rightarrow 0$ .*

**Доказательство.** Вне особой точки алгебра функций  $A$  совпадает с алгеброй гладких функций на плоскости, поэтому вне вершины конуса кокасательное расслоение совпадает с обычным.

Рассмотрим порождающие функции алгебры  $F_{T^*X}$ . Согласно определению, это функции двух видов: поднятия функций  $f$  алгебры  $A$  при проекции  $\pi : T^*X \rightarrow X$  и функции  $V^*$  для  $V \in D(A)$ . Поднятия  $\pi \circ f$ ,  $f \in A$ , постоянны в слое  $T_0^*X$ . Для векторного поля  $V \in D(A)$  значение  $V(f)|_0$  равняется нулю. Тогда в точках  $w \in T_0^*X$  значения порождающих функций постоянны. Значит, в гладкой оболочке они постоянны на слое  $T_0^*X$ .

Функции на кокасательном расслоении  $T^*X$  идут к константе при  $x \rightarrow 0$ . Действительно, функции вида  $\pi \circ f$ ,  $f \in A$ , стремятся к постоянному значению  $f(0)$  при  $x \rightarrow 0$  по части конуса без особенности  $T^*X \setminus T_0^*X$ . Действие «ковекторных» полей на дифференциалы функций  $V^*(df) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , так как коэффициенты векторных полей в объемлющем пространстве  $\mathbb{R}^3$  стремятся к нулю при  $x \rightarrow 0$ . Значит, функции  $f \in F_{T^*X}$  не только постоянны на слое  $T_0^*X$ , но и стремятся к этому значению при  $x \rightarrow 0$ .  $\square$

**3.4. Функции на раздутии конуса.** Рассмотрим отображение  $h : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , которое является параметризацией конуса  $X$ :

$$h : (x, \varphi) \rightarrow (x, \psi(x) \cos \varphi, \psi(x) \sin \varphi).$$

Здесь функция  $\psi(x)$  обозначает расстояние от точки  $(x, 0, 0) \in Ox$  до точки на конусе в плоскости, наклоненной под углом  $\varphi$  к плоскости  $Oxy$ . Вне множества  $\{0\} \times S^1$  отображение  $h$  является диффеоморфизмом на множество  $X \setminus 0$ . Если есть кривая движения механизма на конусе (которая является гладкой до особой точки и после нее), то она должна также подниматься до кривой на цилиндре, которая может быть разрывной только в точках на окружности  $\{0\} \times S^1$ . Сам цилиндр  $Cil = \mathbb{R} \times S^1$  с координатами  $(x, \varphi)$  можно рассматривать как раздутие конуса, которое должно нести больше информации, чем конус как множество точек: он содержит также и направления, с которыми кривые подходят к вершине конуса.

Рассмотрим дифференциальную структуру на цилиндре, полученную с помощью отображения  $h$ : это функции типа  $g = h^*(f)$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)|_X$ . Они обладают

следующим свойством:

$$g(x, \varphi)|_{S^1} = f(x, \psi(x) \cos \varphi, \psi(x) \sin \varphi)|_{x=0} = f(0, 0, 0) = \text{const.}$$

Значит, функции постоянны на окружности  $S^1$ . Если же  $X$  — касп ( $\psi'(0) = 0$ ), то

$$\frac{\partial g}{\partial x}|_{S^1} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \text{const.}$$

Рассмотрим в качестве модели сингулярности конуса цилиндр  $Cil$  и следующую алгебру функций на нем:

$$A_{S^1} = \{f \in C^\infty(Cil) : f|_{S^1} \equiv \text{const}\}.$$

Вычислим векторные поля для пространства  $(Cil, A_{S^1})$  в координатах  $x, y = \varphi$ .

**Утверждение.** Векторные поля  $\Delta$  для дифференциального пространства  $(Cil, A_{S^1})$  устроены следующим образом:

$$\Delta = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (6)$$

где  $a$  и  $b$  — гладкие,  $2\pi$ -периодичные по  $y$  функции на плоскости и  $a|_{S^1} \equiv 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим векторные поля для  $A_{S^1}$ . По принципу локальности вне особой точки векторные поля являются обычными векторными полями с гладкими коэффициентами. Соответственно, вне окружности  $S^1$  на цилиндре получаем, что векторное поле  $\Delta$  действует на функцию  $f \in A_{S^1}$  следующим образом:

$$\Delta(f) = a(x, y)f'_x + b(x, y)f'_y.$$

Произвольная функция  $f \in A_{S^1}$  по лемме Адамара может быть представлена в виде

$$f = c + xg(x, y), \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (7)$$

При  $f(x, y) = x$  получаем, что  $a(x, y) \in A_{S^1}$ . Рассмотрим функции  $g$ , которые представляют собой произведения координатных функций:  $g = k(x)m(y)$ . Функции  $k$  и  $m$  теперь могут быть произвольными гладкими. После подстановки в (6) получаем условие

$$ak(x)m(y) + bxk(x)m'(y) \in A_{S^1}.$$

Пусть функция  $k(x)$  положительна, тогда поделим на  $k(x)$  левую и правую части:

$$am(y) + bxm'(y) = h \in A_{S^1}.$$

Рассмотрим функцию  $m(y)$ , такую что  $m'(y) > 0$ . Тогда из последнего выражения следует, что  $bx = (h - am)/m'$  — гладкая функция. Значит, определено значение функции  $bx$  на  $S^1$ . Рассмотрим теперь функцию  $m(y)$  со свойствами

$$m(0) = 1; \quad m'(0) = 0; \quad m(1) = 2; \quad m'(1) = 0.$$

Пусть  $(am(y) + bxm'(y))|_{S^1} = c$ . Тогда мы получим, что

$$am(0) + bxm'(0) = c; \quad am(1) + (bx) \cdot m'(1) = c,$$

откуда следует, что  $a(0, 0) = c$  и  $2a(0, 1) = c$ . Так как  $a \in A_{S^1}$ , то необходимо, чтобы  $a|_{S^1} \equiv 0$ .

Итак, для функции  $f = xy$  мы получаем, что  $ay + bx \in A_{S^1}$ . Учитывая, что  $a|_{S^1} \equiv 0$ , получаем следствие  $bx \in A_{S^1}$ . Для функции  $f = xy^2$  получаем  $ay^2 + 2bxy \in A_{S^1}$ , откуда следует, что  $bxy \in A_{S^1}$ . Итак, выполняются два условия:  $bx \in A_{S^1}$  и  $(bx)y \in A_{S^1}$ . Если  $bx$  не равна нулю тождественно на  $S^1$ , то при умножении на  $y$  найдутся две точки, в которых значения  $(bx)y$  будут различаться. Значит,  $(bx)|_{S^1} = 0$ . Теперь, учитывая что  $bx \in A_{S^1}$ ,  $bx|_{S^1} = 0$ , получаем по лемме Адамара  $bx = 0 + xh(x, y)$ . Тогда  $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Итак, необходимо, чтобы  $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $a|_{S^1} = 0$ . Но эти условия являются и достаточными: если  $a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $a|_{S^1} = 0$ , то векторное поле (6) переводит функции из  $A_{S^1}$  в функции из  $A_{S^1}$ .  $\square$

Значит, векторные поля вида (6) описывают все векторные поля для алгебры  $A_{S^1}$ . Заметим, что коэффициент при производной по  $y$ -координате отличен от нуля на окружности  $S^1$ . Значит, векторные поля не обращаются в ноль в точках  $S^1$ . Но их действие как операторов приводит к нулевым значениям, т. е. их действие невозможно наблюдать.

**4. Заключение.** Для рассмотренного примера пространственного сингулярного маятника, конфигурационное пространство которого представляло собой конус или касп, рассматривались две структуры. В структуре с функциями, постоянными вблизи вершины конуса, кокасательное пространство в особой точке нулевое: при этом система не должна выйти из состояния покоя. Во второй структуре функции на кокасательном расслоении  $T^*X$  непрерывны и их значения постоянны в слое над особой точкой  $T_0^*X$ . Полученные результаты похожи на вычисления для одномерного случая [8].

Формулировка общих проблем построения дифференциального исчисления, таких как нулевое касательное или кокасательное пространство, является следующим шагом в исследовании проблем кинематики на сингулярных пространствах.

## Литература

1. *Виноградов А. М., Красильщик И. С.* Что такое гамильтонов формализм? // УМН. 1975. Т. 30. Вып. 1(181). С. 173–198.
2. *Неструев Дж.* Гладкие многообразия и наблюдаемые. М.: МЦНМО, 2000–2003.
3. *Śniatycki J.* Orbits of families of vector fields on subcartesian spaces. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0211212> (дата обращения: 25.10.2020).
4. *Kreck M.* Differential algebraic topology: from stratifolds to exotic spheres. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Vol. 110 of Graduate Studies in Mathematics.)
5. *Watts J.* Diffeologies, differential spaces, and symplectic geometry. Ph.D. thesis. 2012.
6. *Бурьян С. Н.* Особенности движения маятника с сингулярным конфигурационным пространством // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 541–551.
7. *Burian S. N., Kalnitsky V. S.* On the Motion of One-Dimensional Double Pendulum // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. Art. no. 030004.
8. *Бурьян С. Н.* Дифференциальные структуры Фрелихера на касающихся кривых // Записки ПОМИ. 2018. № 476. С. 34–49.

Статья поступила в редакцию 1 сентября 2019 г.;  
после доработки 8 июня 2020 г.;  
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Бурьян Сергей Николаевич — аспирант; burianserg@yandex.ru

## Conical singular points and vector fields

*S. N. Burian*

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Burian S. N. Conical singular points and vector fields. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 649–661. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.407> (In Russian)

In this article, several examples of mechanical systems which configuration spaces are smooth manifolds with a unique singular point are considered. Configuration spaces are the following: two smooth curves with a common point (or tangent) on the two-dimensional torus, four smooth curves on the four-dimensional torus with a common point, two-dimensional cone (cusp) in the space  $\mathbb{R}^6$ . The main problem in the article is the calculation of (co)tangent space at a singular point by using different theoretical approaches. Outside of the singular point, the motion could be described in the frames of classical mechanics. But in the neighborhood of the singular points the terms like “tangent vector” and “cotangent vector” must have new conceptual definitions. In this article, the approach of *differential spaces* is used. Two differential structures for the modeling conical singular point are studied in order to construct (co)tangent space at singular points: locally-constants functions near to the cone vertex and the algebra of the restrictions of smooth functions in the comprehensive Euclidean space on the cone. In the first case, tangent and cotangent spaces at the singular points are zero. In the second case, the value of the functions on the cotangent bundle is constant on the cotangent layer under the singular point.

*Keywords:* singular point, manifolds with conical singularities, differential spaces.

## References

1. Vinogradov A. M., Krasilshchik I. S., “What is Hamiltonian formalism?”, *Russian mathematical surveys* **30**, iss. 1(181), 173–198 (1975). (In Russian)
2. Nestruev J., *Smooth manifolds and observables* (Springer Science, Business Media, 2006).
3. Śniatycki J., “Orbits of families of vector fields on subcartesian spaces”. Available at: <https://arxiv.org/abs/math/0211212> (accessed: October 25, 2020).
4. Kreck M., *Differential algebraic topology: from stratifolds to exotic spheres* (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, vol. 110 of Graduate Studies in Mathematics).
5. Watts J., *Diffeologies, differential spaces, and symplectic geometry* (Ph.D. thesis, 2012).
6. Burian S. N., “Behaviour of the pendulum with a singular configuration space”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4(62)**, iss. 4, 541–551 (2017). (In Russian)
7. Burian S. N., Kalnitsky V. S., “On the Motion of One-Dimensional Double Pendulum”, *AIP Conference Proceedings* **1959**, 030004 (2018).
8. Burian S. N., “Differential structures of Frölicher spaces on tangent curves”, *Zapiski POMI* (476), 34–49 (2018). (In Russian)

Received: September 1, 2019

Revised: June 8, 2020

Accepted: June 18, 2020

Author’s information:

*Sergei N. Burian* — burianserg@yandex.ru