УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4
MSC 60F99

Дискретизация задачи о парковке*

Н. А. Крюков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Крюков Н. А.* Дискретизация задачи о парковке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 662–677. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.408

В настоящей работе приведено исследование естественной дискретизации задачи Реньи, известной под названием «задача о парковке». Пусть l, n, i — целые числа, причем $l \geq 2$, $n \geq 0$ и $0 \leq i \leq n-l$. На отрезок $[0, n]$ будем помещать открытый интервал $(i, i+l)$, где i — случайная величина, с равной вероятностью принимающая значения $0, 1, 2, ..., n-l$ для всех $n \geq l$. Если $x < l$, то говорим, что интервал не помещается. После размещения первого интервала образуются два свободных отрезка $[0, i]$ и $[i+l, n]$, которые заполняются интервалами длины l по тому же правилу независимо друг от друга, и т. д. По окончании процесса заполнения отрезка $[0, n]$ интервалами между двумя любыми соседними интервалами расстояние будет не больше $l-1$. Пусть $\xi_{n,l}$ обозначает суммарную длину разместившихся интервалов. Асимптотическое поведение математических ожиданий данной последовательности случайных величин уже изучалось ранее. Данная статья ставит своей целью продолжение изучения поведения математических ожиданий $E\{\xi_{n,l}\}$ при $n \to \infty$, а также изучение поведения дисперсий $D\{\xi_{n,l}\}$ при n, стремящемся к бесконечности.

Ключевые слова: случайное заполнение, дискретная задача о «парковке», асимптотическое поведение моментов.

1. Введение. Задача случайного заполнения отрезка впервые была рассмотрена в работе Реньи [1] в следующем виде. На отрезке $[0, x]$ для $x > 1$ случайным образом размещается интервал $(t, t+1)$ единичной длины, тем самым разбивая изначальный отрезок на два отрезка меньшей длины: $[0, t]$ и $[t+1, x]$. Если какой-либо из них имеет длину меньше единицы, он исключается из дальнейшего рассмотрения. Остальные, в свою очередь, продолжают заполняться по вышеописанному правилу. По окончании данного процесса подсчитывается количество размещенных на изначальном отрезке интервалов. Оно обозначается за N_x. Для $0 \leqslant x < 1$ значение N_x принимается равным нулю. Выражение «случайным образом» в вышеописанной задаче означает, что t является равномерно распределенной на $[0, x-1]$ случайной величиной. Более того, любое следующее случайное размещение отрезка не зависит от предыдущих.

В работе Реньи [1] было показано, что при любом $n \geqslant 1$

$$E\{N_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O(x^{-n}), \qquad (x \to +\infty). \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00393).

Для константы λ также было получено следующее выражение:

$$\lambda = \int\limits_0^\infty e^{-2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt. \tag{2}$$

Позднее в работе Дворецкого и Роббинса [2] было дано уточнение скорости сходимости в соотношении (1):

$$E\{N_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right), \qquad (x \to +\infty). \tag{3}$$

Также было изучено поведение дисперсии той же последовательности случайных величин и было доказано что существует положительная константа λ_2, такая что верно соотношение

$$D\{N_x\} = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right), \qquad (x \to +\infty). \tag{4}$$

В работах [3] и [4] рассматривался дискретный аналог вышеописанной задачи. В нем величина x принимает только целые значения (будем в таком случае обозначать длину переменной n вместо x) и случайная величина t распределена равномерно на наборе целых чисел $\{0, \ldots, n-1\}$. Однако отрезки длиной 1 также исключаются из рассмотрения наравне с отрезками нулевой длины. В статье [3] были явно вычислены первые три момента случайных величин N_n, а в работе [4] было получено асимптотическое поведение моментов больших порядков, а также асимптотическая нормальность данной последовательности случайных величин.

Еще один дискретный аналог этой задачи был рассмотрен в работе [5]. В нем случайная величина t также была распределена только на целых числах, однако размещался интервал не единичной длины, а заранее заданной натуральной длины l. Случайная величина t, соответственно, была равномерно распределена на множестве $\{1, \ldots, n-l\}$, а из рассмотрения исключались все отрезки, длина которых меньше длины размещаемого интервала. При помощи производящих функций в этой статье было получено следующее асимптотическое поведение математических ожиданий $E\{N_n\}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E\{N_n\}}{ln} = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx.$$

В последнее время задачи о случайном заполнении отрезка вновь привлекают внимание математиков. Они были недавно рассмотрены в ряде статей, в том числе [6–10]. В работах [6, 7] рассматривались дискретные варианты задачи, в то время как [8–10] обращали внимание на непрерывные аналоги.

В данной работе продолжается изучение поставленной в [5] задачи.

2. Основные результаты. Пусть n, l — два натуральных числа. Будем случайно помещать на отрезок $[0, n]$ интервалы длины l таким образом, чтобы начало и конец интервала были целыми числами. В случае $n < l$ такое невозможно, и процесс считается завершенным. Иначе поместим интервал $(t, t+l)$, где t — случайная величина, равномерно распределенная на множестве $\{0, \ldots, n-l\}$. Он разбивает изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+l, n]$, которые заполняются независимо по аналогичному правилу. Как только процесс завершается, что означает, что все оставшиеся свободными отрезки имеют длину меньше чем l, обозначим за $\xi_{n,l}$ суммарную длину расположенных интервалов.

Более формально задачу можно поставить следующим образом. Зафиксируем некоторое натуральное число $l \geqslant 2$ и рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_{n,l}$:

$$\xi_{0,l} = \ldots = \xi_{l-1,l} = 0, \tag{5}$$

$$\xi_{n,l} := l + \xi^*_{\nu_n,l} + \xi^*_{n-\nu_n-l,l} \quad \text{при} \quad n \geq 3, \tag{6}$$

где $\xi^*_{\nu_n,l}$ и $\xi^*_{n-\nu_n-l,l}$ — независимые копии случайных величин $\xi_{\nu_n,l}$ и $\xi_{n-\nu_n-l,l}$ соответственно, а ν_n — независимая случайная величина, не зависящая от ξ^*_m, равновероятно принимающая значения $0, \ldots, n-l$.

Теорема 1. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,l}$ и любого $T > 1$ верно соотношение*

$$E\{\xi_{n,l}\} = l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l + o(T^{-n}), \qquad (n \to +\infty), \tag{7}$$

где константа λ_l имеет вид

$$\lambda_l = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\, dx. \tag{8}$$

Приблизительные значения констант λ_l таковы:

$$\lambda_2 = \frac{e^2 - 1}{2e^2},$$

$$\lambda_3 \approx 0.274551,$$

$$\lambda_4 \approx 0.200973,$$

$$\lambda_5 \approx 0.158455.$$

Заметим, что данная теорема является уточнением полученного в книге [5] результата (теорема 3.1, стр. 21). В теореме 3.1 из книги [5] представлено выражение для $E\{\xi_{n,l}\}$ с точностью $O(1/n)$, в то время как в обозначенной выше теореме точнось выражения для $E\{\xi_{n,l}\}$ равна $o(e^{-n})$.

Теорема 2. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,l}$ верно соотношение*

$$D\{\xi_{n,l}\} = K_0(n-l) + o(1). \tag{9}$$

где константа K_0 имеет вид

$$K_0 = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \times$$

$$\times \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l \right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz-$$

$$-4e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}}\int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\frac{z-z^l}{1-z}\left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}}dy}{(1-z)}-\frac{(1-z)(\lambda_l l^2-l)+\lambda_l lz}{(1-z)}\right)^2 dz,$$

и константы Z_{l-1}, Z_0 *и* L_n *определены следующим образом:*

$$Z_{l-1}=\frac{l^3}{6}\left(\lambda_l^2(14l^2-9l+1)+\lambda_l(6-18l)+6\right),$$

$$Z_0=(l\lambda_l-l)^2,$$
$$L_n=(l\lambda_l n+l^2\lambda_l-l)^2.$$

Замечание. Константа K_0 конечна, так как по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}}dy}{(1-z)}-\frac{\lambda_l lz}{(1-z)}=\lambda_l l^2-l.$$

2.1. Доказательство теорем.

Доказательство теоремы 1. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1 из книги [5], однако в конце уделяется больше внимания анализу полученной производящей функции.

Зафиксируем некоторое натуральное значение $l\geqslant 2$. Пусть $X_{n,l}=\mathbb{E}(\xi_{n,l})$. Опустим для удобства второй индекс и будем писать далее X_n вместо $X_{n,l}$ и ξ_n вместо $\xi_{n,l}$. Очевидно, что из начальных условий (5) на последовательность ξ_n следуют начальные условия на X_n:

$$X_0=\ldots=X_{l-1}=0. \tag{10}$$

А из соотношения (6) следует рекуррентное соотношение на эту последовательность:

$$X_{n+1}=l+\frac{1}{n+2-l}\sum_{i=0}^{n+1-l}\left(X_i+X_{n+1-i-l}\right).$$

Его можно переписать в следующем виде:

$$X_{n+1}=l+\frac{2}{n+2-l}\sum_{i=0}^{n+1-l}X_i. \tag{11}$$

Определим новую последовательность S_n:

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}X_i. \tag{12}$$

Из (10) и (11) получаются следующие условия на последовательность S_n:

$$S_0=\ldots=S_{l-1}=0, \tag{13}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{2}{n+2-l} S_{n+1-l} + l,\ n \geq l-1. \tag{14}$$

Найдем производящую функцию этой последовательности. Для этого перепишем уравнение (14) в следующем виде:

$$(n+1)S_{n+1} - (l-1)S_{n+1} = nS_n - (l-2)S_n + 2S_{n+1-l} + ln - (l^2 - 2l).$$

Домножим его на z^{n+1} и сложим все полученные выражения по n от $l-1$ до бесконечности:

$$\sum_{n=l}^{\infty} nS_n z^n - (l-1)\sum_{n=l}^{\infty} S_n z^n = z^2 \sum_{n=l-1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-2)z \sum_{n=l-1}^{\infty} S_n z^n +$$
$$+ 2z^l \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n + lz \sum_{n=l-1}^{\infty} nz^n - (l^2-2l)\sum_{n=l}^{\infty} z^n. \tag{15}$$

Зная начальные условия (13), все суммы в выражении (15) можно заменить на суммы по всем неотрицательным целым n:

$$z\sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-1)\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-2)z \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n +$$
$$+ 2z^l \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n + lz^l \frac{l+2z-1-lz}{(1-z)^2} - (l^2-2l)\frac{z^l}{1-z},$$

что равносильно следующему:

$$z\sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-1)\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-2)z \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n +$$
$$+ 2z^l \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n + \frac{lz^l}{(1-z)^2}. \tag{16}$$

Определим производящую функцию последовательности S_n

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n \tag{17}$$

и напишем ее производную

$$G'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1}.$$

Подставив данные выражения в уравнение (16), получим следующее дифференциальное уравнение на функцию $G(z)$:

$$zG'(z) - (l-1)G(z) = z^2G'(z) - (l-2)zG(z) + 2z^lG(z) + \frac{lz^l}{(1-z)^2},$$

$$(z-z^2)G'(z) - (2z^l - z(l-2) + l - 1)G(z) = \frac{lz^l}{(1-z)^2}. \tag{18}$$

Обозначим правую часть этого равенства за $g(z)$. Решим сначала однородное уравнение, соответствующее уравнению (18):

$$(z-z^2)H'(z)-(2z^l-(l-2)z+(l-1))H(z)=0,$$

$$(\ln(H(z)))'=\frac{2z^l-(l-2)z+(l-1)}{z-z^2}=-2\frac{1-z^{l-1}}{1-z}+\frac{l-1}{z}+\frac{3}{1-z},$$

$$\ln(H(z))=c^*-2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}+(l-1)\ln(z)-3\ln(1-z)$$

для некоторой вещественной константы c^*. Решениями этого уравнения является набор функций

$$H(z)=\frac{cz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^3}$$

при $c\in\mathbb{R}^+$. Тогда решение уравнения (18) представимо в виде произведения $H(z)K(z)$, где функция $K(z)$ является решением следующего уравнения:

$$(z-z^2)H(z)K'(z)=g(z),$$

$$\frac{cz^le^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}K'(z)=\frac{lz^l}{(1-z)^2},$$

$$cK'(z)=le^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}},$$

$$cK(z)=c_2+l\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx.$$

Перемножив функции $H(z)$ и $K(z)$, получим общее выражение для решения уравнения (18):

$$G(z)=\frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left(c_2+l\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx\right)}{(1-z)^3}.$$

Заметим, что исходя из начального условия (13) для S_{l-1} будем иметь

$$0=S_{l-1}=\left.\frac{G(z)}{z^{l-1}}\right|_{z=0}=c_2.$$

Таким образом, функция $G(z)$ равна

$$G(z)=\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^3}.$$

Теперь выразим производящую функцию последовательности X_n через функцию $G(z)$. Из формулы (12) следует, что

$$X_n=S_n-S_{n-1}. \tag{19}$$

Домножив равенство (19) на z^n и сложив по n от одного до бесконечности, получим соотношение

$$F(z) - X_0 = G(z) - S_0 - zG(z),$$

где $F(z)$ — производящая функция последовательности X_n. Так как $X_0 = S_0 = 0$, то их можно убрать. Тогда мы получим следующее выражение для функции $F(z)$:

$$F(z) = (1-z)G(z) = \frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2}. \qquad (20)$$

Теперь необходимо разложить функцию $F(z)$ в ряд. Для этого определим еще одну функцию

$$f(z) = z^{l-2}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx$$

и перепишем с ее помощью функцию (20):

$$F(z) = \frac{lz}{(1-z)^2}f(z). \qquad (21)$$

Мы знаем разложение функции $z/(1-z)^2$ в ряд:

$$\frac{lz}{(1-z)^2} = l\sum_{n=0}^{\infty} nz^n.$$

Пусть также функция $f(z)$ имеет разложение

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i.$$

Подставив эти разложения в формулу (21), получим следующее выражение для X_n:

$$X_n = l\sum_{i=0}^{n} c_i(n-i) = l\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\right)n - l\sum_{i=0}^{n} ic_i.$$

Заметим, что при $n \to \infty$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \to \sum_{i=0}^{\infty} c_i = f(1) = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}}\int_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx =: \lambda_l,$$

$$\sum_{i=0}^{n} ic_i \to \sum_{i=0}^{\infty} ic_i = f'(1) = 1 - l\lambda_l.$$

Изучим скорости вышеозначенных сходимостей. Для этого введем четыре вспомогательные функции

$$H_i(x) = e^{2x^i/i} = \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,k}x^k,$$

$$\bar{H}_i(x) = e^{-2x^i/i} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_{i,k} x^k,$$

$$W_i(x) = \prod_{j=1}^{i} H_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{i,k} x^k,$$

$$\bar{W}_i(x) = \prod_{j=1}^{i} \bar{H}_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{w}_{i,k} x^k.$$

Константы $h_{i,k}$ можно оценить следующим образом (здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть вещественного числа x):

$$|h_{i,k}| \leq \frac{2^{k/i} i^{-k/i}}{[k/i]!} \leq \frac{2^k}{[k/l]!}.$$

Теперь по индукции докажем, что

$$|w_{i,k}| \leq \frac{2^k (k+1)^{i-1}}{[k/2^i l]!}.$$

База для $i = 1$ доказана выше. Переход можно доказать следующим образом:

$$|w_{i+1,k}| \leq \sum_{j=0}^{k} |w_{i,j}|\, |h_{i+1,k-j}| \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{2^j (j+1)^i}{[j/2^i l]!} \frac{2^{k-j}}{[k-j/l]!} \leq$$
$$\leq 2^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(k+1)^{i-1}}{[k/2^{i+1} l]!} = \frac{2^k (k+1)^i}{[k/2^{i+1} l]!}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$|\bar{w}_{i,k}| \leq \frac{2^k (k+1)^{i-1}}{[k/2^i l]!}.$$

Функция f может быть записана следующим образом:

$$f(z) = z^{l-2} \bar{W}_{l-1}(z) \int_0^z W_{l-1}(x) dx.$$

Для констант c_i в таком случае верна следующая оценка:

$$|c_{k+l-2}| = \sum_{i=0}^{k-1} |\bar{w}_{l-1,i}| \frac{|w_{l-1,k-i-1}|}{k-i} \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{2^i (i+1)^{l-2}}{[i/2^{l-1} l]!} \frac{2^{k-i-1} (k-i)^{l-2}}{[(k-i-1)/2^{l-1} l]!} \leq \frac{2^{k-1} k^{2l-2}}{[(k-1)/2^l l]!}.$$

Покажем, что $|c_k| = o(T^{-k})$ для любого положительного T:

$$\lim_{k\to\infty}|c_kT^k| \le \lim_{k\to\infty}\frac{T^k 2^{k+1-l}(k+2-l)^{2l-2}}{[(k+1-l)/2^l l]!} \le \lim_{c\to\infty}\frac{T^{c+l-1}2^c(c+1)^{2l-2}}{[c/2^l l]!} \le$$
$$\le \lim_{k\to\infty}\frac{T^{2^l lk+l-1}2^{2^l lk}(2^l lk+1)^{2l-2}}{k!} =$$
$$= T^{l-1}\lim_{k\to\infty}\frac{(T^{2^l l}+2^{2^l l})^k(2^l lk+1)^{2l-2}}{k!} = 0.$$

Таким образом, соотношение (7) выполнено.

Доказательство теоремы 2. Определим функцию

$$\delta(n) = E\{\xi_n\} - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l).$$

Согласно теореме 1, $\delta(n) = o(e^{-n})$, и значит ряд $\sum \delta(n)z^n$ абсолютно сходится на всей вещественной прямой. Как и в теореме 1, мы можем опустить индекс l. Определим вспомогательную последовательность

$$L_n = E\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^2\}.$$

Тогда для $n \geqslant l$ получим

$$L_n = E\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^2\} = E\{E\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^2|i\}\} =$$
$$= E\{E\{((\xi_{i-1} - (l\lambda_l(i-1) + l^2\lambda_l - l)) +$$
$$+ (\xi_{n+1-l-i} - (l\lambda_l(n+1-i-l) + l^2\lambda_l - l)))^2|i\}\} =$$
$$= E\left\{E\{(\xi_{i-1} - (l\lambda_l(i-1) + l^2\lambda_l - l))^2|i\}\right\} +$$
$$+ E\left\{E\{(\xi_{n+1-l-i} - (l\lambda_l(n+1-i-l) + l^2\lambda_l - l))^2|i\}\right\} +$$
$$+ 2E\left\{E\{(\xi_{i-1} - (l\lambda_l(i-1) + l^2\lambda_l - l))^2|i\}\times\right.$$
$$\left.\times E\{(\xi_{n+1-l-i} - (l\lambda_l(n+1-i-l) + l^2\lambda_l - l))^{2-j}|i\}\right\} =$$
$$= \frac{1}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l} L_i + L_{n-l-i} + 2\delta(i)\delta(n-l-i).$$

Определив новую последовательность

$$\alpha_n = 2\sum_{i=0}^{n-l}\delta(i)\delta(n-l-i),$$

мы получили рекуррентное соотношение для последовательности L_n при $n \geqslant l$:

$$L_n = \frac{2}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l} L_i + \alpha_n. \tag{22}$$

Для $n < l$ имеем

$$L_n = (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^2. \tag{23}$$

Определим последовательность $Z_n = \sum_{i=0}^n L_i$. Для этой последовательности, согласно соотношению (22), при $n \geqslant l$ верно соотношение

$$nZ_n - (l-1)Z_n - (n-1)Z_{n-1} + (l-2)Z_{n-1} = 2Z_{n-l} + (n+1-l)\alpha_2(n).$$

Вычислим производящую функцию для последовательности Z_n. Для этого домножим равенство, написанное выше, на z^n и сложим по $n \geqslant l$.

$$\sum_{n=l}^{\infty} nZ_n z^n - (l-1)\sum_{n=l}^{\infty} Z_n z^n - \sum_{n=l-1}^{\infty} nZ_n z^{n+1} + (l-2)\sum_{n=l-1}^{\infty} Z_n z^{n+1} = \\ = 2\sum_{n=0}^{\infty} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n.$$

Определим усеченную слева производящую функцию $G(z) = \sum_{n=l}^{\infty} Z_n z^n$. Тогда

$$G'(z) = \sum_{n=l}^{\infty} nZ_n z^{n-1},$$

и следовательно,

$$zG'(z) - (l-1)G(z) - z^2G'(z) - (l-1)Z_{l-1}z^l + (l-2)zG(z) + (l-2)Z_{l-1}z^l = \\ = 2z^lG(z) + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n,$$

что можно переписать следующим образом:

$$(z-z^2)G'(z) - (2z^l - z(l-2) + l - 1)G(z) = Z_{l-1}z^l + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n.$$

Левая часть данного уравнения аналогична левой части уравнения (18). Значит, функция $G(z)$ также представима в виде произведения $H(z)K(z)$, где

$$H(z) = \frac{cz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^3},$$

а $K(z)$ удовлетворяет соотношению

$$(z-z^2)H(z)K'(z) = Z_{l-1}z^l + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n. \tag{24}$$

Преобразуем его следующим образом:

$$\frac{cz^le^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}K'(z) = Z_{l-1}z^l + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n,$$

$$\frac{ce^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}K'(z) = Z_{l-1} + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^n + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l},$$

$$\frac{ce^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)}K'(z) = (1-z)Z_{l-1} + 2(1-z)\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^n + (1-z)\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l},$$

$$\frac{ce^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)}K'(z) = (1-z)Z_{l-1} + 2Z_0 - 2Z_{l-1}z^l + \sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n + (1-z)\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l}.$$

Значит, производная решения уравнения (24) представима в виде

$$cK'(z) = e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l\right)Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n\right) +$$
$$+ e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left((1-z)^2\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l}\right). \qquad (25)$$

Изучим это представление. Первое слагаемое можно преобразовать, используя начальные значения (23) последовательности L_n:

$$\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n = \sum_{n=1}^{l-1}(l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^2 z^n,$$

$$Z_0 = L_0 = (l\lambda_l - l)^2,$$

$$Z_{l-1} = \sum_{n=0}^{l-1}(l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^2 = \frac{l^3}{6}\left(\lambda_l^2(14l^2 - 9l + 1) + \lambda_l(6 - 18l) + 6\right).$$

Для вычисления второго слагаемого напишем производящую функцию последовательности $\delta(n)$, используя производящую функцию (20) последовательности $E\xi_n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}E\{\xi_n\}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)z^n =$$
$$= \frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}(l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)z^n =$$
$$= \frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)^2}.$$

Тогда последнюю сумму в правой части равенства (25) можно записать следующим образом:

$$\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sum_{i=0}^{n}\delta(i)\delta(n-i)z^n =$$

$$= 2z\left(\left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2-l)+\lambda_l lz}{(1-z)^2}\right)^2\right)' +$$

$$+ 2\left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2-l)+\lambda_l lz}{(1-z)^2}\right)^2.$$

Таким образом, функция $cK(z)$ представима в виде

$$cK'(x) =$$
$$= C + \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left(\left((1-z)^2-2(1-z)z^l\right)Z_{l-1}+2(1-z)Z_0+(1-z)\sum_{n=1}^{l-1}L_nz^n\right)dz+$$
$$+2\int\limits_0^x ze^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left(\left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{k^i}{i}}dk}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2-l)+\lambda_l lz}{(1-z)}\right)^2\right)'dz+$$
$$+2\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2-l)+\lambda_l lz}{(1-z)}\right)^2dz.$$

Заметим, что так как разложение функции $G(z)$ в ряд начинается с коэффициента с номером l, то $C = 0$. Таким образом,

$$G(z) = \frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^3}K_0(z),$$

где

$$K_0(x) = \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left(\left((1-z)^2-2(1-z)z^l\right)Z_{l-1}+2(1-z)Z_0+(1-z)\sum_{n=1}^{l-1}L_nz^n\right)dz+$$

$$+ 2\int\limits_0^x z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \left(\left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{k^i}{i}} dk}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 \right)' dz +$$

$$+ 2\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz.$$

Проинтегрировав по частям второе слагаемое в этом выражении, можно записать функцию K_0 в виде

$$K_0(x) = \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l\right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz +$$

$$+ 2x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \left(\frac{l x^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} dz}{(1-x)} - \frac{(1-x)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l x}{(1-x)} \right)^2 -$$

$$- 4\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \sum_{i=1}^{l} z^i \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz.$$

Домножив обе части выражения для функции $G(z)$ на $(1-z)$, получим

$$Z_l z^l + \sum_{n=l+1}^{\infty} L_n z^n = \frac{z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2} K_0(z).$$

Из этого соотношения, аналогично вычислению асимптотики математических ожиданий, получаем

$$L_n = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0(1) n - \left(z^{l-2} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} K_0(z) \right)' \Bigg|_{z=1} + o(1) =$$

$$= e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0(1) n - l e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0(1) - e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0'(1) + o(1).$$

Заметим, что из определения λ_l следует

$$K_0 := e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0(1) =$$

$$= e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l \right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz +$$

$$+ 2\left(\lambda_l l^2 - l + l \left(x^{l-2} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} dz \right)' \Bigg|_{x=1} \right)^2 -$$

$$-4e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \sum_{i=1}^{l} z^i \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz =$$

$$= e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l \right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz +$$

$$+ 2\left(\lambda_l l^2 - l + l\left((l-2)\lambda_l - 2(l-1)\lambda_l + 1 \right) \right)^2 -$$

$$-4e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \sum_{i=1}^{l} z^i \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz =$$

$$= e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l \right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz -$$

$$-4e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \frac{z - z^l}{1-z} \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz.$$

Также

$$K_0' := e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0'(1) =$$

$$= 2\left(x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \right)' \Bigg|_{x=1} \left(\lambda_l l^2 - l + l\left(l x^{l-2} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} dz \right)' \Bigg|_{x=1} \right)^2 +$$

$$+ 4x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \left(\lambda_l l^2 - l + l\left(l x^{l-2} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} dz \right)' \Bigg|_{x=1} \right) \times$$

$$
\times \left(\frac{l x^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{x^i}{i}} \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{z^i}{i}} dz}{(1-x)} - \frac{(1-x)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l x}{(1-x)} \right)' -
$$

$$
- 4l \left(\lambda_l l^2 - l + l \left(l x^{l-2} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{x^i}{i}} \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{z^i}{i}} dz \right)' \Bigg|_{x=1} \right)^2 = 0.
$$

Получаем выражение

$$
L_n = K_0(n-l) + o(1).
$$

Осталось заметить, что

$$
D\{\xi_n\} = E\{(\xi_n - E\{\xi_n\})^2\} = E\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l) - \delta(n))^2\} =
$$

$$
= L_n - 2\delta(n)E\{\xi_n\} + \delta^2(n) = L_n + o(e^{-n}).
$$

3. Благодарность. Автор благодарит кандидата физико-математических наук, доцента Сергея Михайловича Ананьевского за проявленную помощь в постановке задачи и комментарии по улучшению данной статьи.

Литература

1. *Rényi A.* On a one-dimensional problem concerning space-filling // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. 1958. Vol. 3. P. 109–127.

2. *Dvoretzky A., Robbins H.* On the "parking" problem // Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences. 1964. Vol. 9. P. 209–226.

3. *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.* Задача об эгоистичной парковке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 549–555. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402

4. *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.* Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 353–362. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301

5. *Pinsky R. G.* A One-Dimensional Probabilistic Packing Problem. In: Problems from the Discrete to the Continuous. Switzerland: Springer International Publishing. 2014. Chapter 3. P. 21–34.

6. *Clay M. P., Simanyi N. J.* Rényi's parking problem revisited // Stochastics and Dynamics. 2016. Vol. 16, no. 2. https://doi.org/10.1142/S0219493716600066

7. *Geri L.* The Page-Rényi parking process // The Electronic Journal of Combinatorics. 2015. Vol. 22. Iss. 4. https://doi.org/10.37236/5150

8. *Ананьевский С. М.* Некоторые обобщения задачи о «парковке» // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 525–532. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401

9. *Ананьевский С. М.* Задача парковки для отрезков различной длины // Записки научн. семинаров ПОМИ РАН. 1996. Т. 228. Вероятность и статистика. С. 16–23.

10. *Ільєнко А. Б., Фатенко В. В.* Узагальнення задачі Реньї про паркування // Наукові вісті НТУУ «КПІ»: міжнародний науково-технічний журнал. 2017. № 4(114). С. 54–60.

Статья поступила в редакцию 20 февраля 2020 г.;
после доработки 11 мая 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Крюков Николай Алексеевич — аспирант; kryuknik@gmail.com

Discretization of the parking problem

N. A. Kryukov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kryukov N. A. Discretization of the parking problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 662–677. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.408 (In Russian)

The present work consider a natural discretization of Rényi's so-called "parking problem". Let l, n, i be integers satisfying $l \geq 2$, $n \geq 0$ and $0 \leq i \leq n-l$. We place an open interval $(i, i+l)$ in the segment $[0, n]$ with i being a random variable taking values $0, 1, 2, \ldots, n-l$ with equal probability for all $n \geq l$. If $n < l$ we say that the interval does not fit. After placing the first interval two free segments $[0, i]$ and $[i+l, n]$ are formed and independently filled with the intervals of length l according to the same rule, etc. At the end of the filling process the distance between any two adjacent unit intervals is at most $l-1$. Let $\xi_{n,l}$ denote the cumulative length of the intervals placed. The asymptotics behavior of expectations of the aforementioned random sequence have already been studied. This contribution has an aim to continue this investigation and establish the behavior of variances of the same sequence.

Keywords: random filling, discrete "parking" problem, asymptotic behavior of moments.

References

1. Rényi A., "On a one-dimensional problem concerning space-filling", *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **3**, 109–127 (1958).

2. Dvoretzky A., Robbins H., "On the "parking" problem", *Publ. of the Math. Inst. of Hungarian Acad. of Sciences* **9**, 209–226 (1964).

3. Ananjevskii S. M., Kryukov N. A., "The problem of selfish parking", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **51**, iss. 4, 322–326 (2018). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402

4. Ananjevskii S. M., Kryukov N. A., "On asymptotic normality in one generalization of the Rényi problem", *Vestnik of St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 3, 353–362 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301 (In Russian)

5. Pinsky R. G., *A One-Dimensional Probabilistic Packing Problem*. In: *Problems from the Discrete to the Continuous*, Chapter 3, 21–34 (Springer International Publishing, Switzerland, 2014).

6. Clay M. P., Simanyi N. J., "Rényi's parking problem revisited", *Stochastics and Dynamics* **16** (2) (2016). https://doi.org/10.1142/S0219493716600066

7. Geri L., "The Page-Rényi parking process", *The Electronic Journal of Combinatorics* **22** (4) (2015). https://doi.org/10.37236/5150

8. Ananjevskii S. M., "Generalizations of "Parking" Problem", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**, iss. 4, 299–304 (2016). https://doi.org/10.3103/S1063454116040026

9. Ananjevskii S. M., "The "parking" problem for segments of different length", *Journal of Mathematical Sciences* **93**, 259–264 (1999). https://doi.org/10.1007/BF02364808

10. Ilyenko A. B., Fatenko V. V., "Generalization of the Rényi's parking problem", *Scientific News NTUU «KPI»: international scientific and technical journal* (4(114)), 54–60 (2017). (In Ukrainian)

Received: February 20, 2020
Revised: May 11, 2020
Accepted: June 18, 2020

Author's information:

Nikolai A. Kryukov — kryuknik@gmail.com