УДК 519.224 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4
MSC 60D05, 60F05, 60G70

# Предельные теоремы для обобщенных периметров случайных вписанных многоугольников. I*

*Е. Н. Симарова*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
Санкт-Петербургский международный математический институт им. Леонарда Эйлера,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, 14 линия В. О., 29Б

**Для цитирования:** *Симарова Е. Н.* Предельные теоремы для обобщенных периметров случайных вписанных многоугольников. I // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 678–687. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.409

Недавно Лао и Майер (2008) рассмотрели $U$-max-статистики, где вместо усреднения значений ядра по всевозможным подмножествам рассматривается максимум ядра. Такие статистики часто появляются в стохастической геометрии. Их предельные распределения связаны с распределениями экстремальных значений. В данной статье мы начинаем изучение предельных теорем для обобщенного периметра (суммы степеней сторон) случайного вписанного многоугольника и связанных с ним $U$-max-статистик. В ней описаны экстремальные значения обобщенного периметра, а также получены предельные теоремы для тех случаев, когда степени сторон, участвующие в определении обобщенного периметра, не превосходят 1.

*Ключевые слова*: $U$-max-статистики, пуассоновская аппроксимация, распределение на окружности, обобщенный периметр.

**1. Введение.** В данной работе будет рассмотрено предельное поведение так называемых $U$-max-статистик, появляющихся в стохастической геометрии. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, а вещественнозначная симметричная борелевская функция $h(x_1, \ldots, x_m)$, называемая ядром степени $m$, определена на пространстве $\mathfrak{X}^m$.

$U$-max-статистики определяются следующим образом:

$$H_n = \max_J h(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}),$$

где $n \geq m$, а множество $J = \{(i_1, \ldots, i_m) : 1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n\}$ — это множество упорядоченных $m$-элементных перестановок с множеством индексов из набора $\{1, \ldots, n\}$. $U$-min-статистики определяются аналогично.

$U$-max-статистики были введены независимо Лао и Майером в своих диссертациях [1] и [2]. Ими был разработан метод изучения предельного поведения $U$-max-статистик с помощью пуассоновской аппроксимации из монографии [3]. Их основная предельная теорема из [4] выглядит следующим образом.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2019-1619).

**Теорема 1.** *Рассмотрим $U$-max-статистики $H_n = \max_J h(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$, введенные выше, и определим для каждого $z \in \mathbb{R}$ следующие функции:*

$$p_z = \mathbb{P}\{h(\xi_1, \ldots, \xi_m) > z\}, \;\; \lambda_{n,z} = \binom{n}{m} p_z,$$
$$\tau_z(r) = \frac{\mathbb{P}\{h(\xi_1, \ldots, \xi_m) > z, h(\xi_{1+m-r}, \xi_{2+m-r}, \ldots, \xi_{2m-r}) > z\}}{p_z}.$$

*Тогда для всех $n \geq m$ и для всех $z \in \mathbb{R}$ верно неравенство*

$$|\mathbb{P}(H_n \leq z) - e^{-\lambda_{n,z}}| \leq$$
$$\leq \left(1 - e^{-\lambda_{n,z}}\right) \cdot \left[ p_z \left( \binom{n}{m} - \binom{n-m}{m} \right) + \sum_{r=1}^{m-1} \binom{m}{r} \binom{n-m}{m-r} \tau_z(r) \right].$$

Сильвермэн и Браун в работе [5] предложили условия, при которых общая теорема, доказанная в [4], приводит в пределе к невырожденному закону Вейбулла.

**Теорема 2.** *В условиях теоремы 1, если для некоторой последовательности преобразований $z_n : T \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}$ для каждого $t \in T$ выполнены условия*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n,z_n(t)} = \lambda_t > 0, \tag{1}$$
$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-1} p_{z_n(t)} \tau_{z_n(t)}(m-1) = 0, \tag{2}$$

*справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(H_n \leq z_n(t)\right) = e^{-\lambda_t}$ для любого $t \in T$.*

**Замечание 1.** Если $m \geq 2$, то условие (2) можно заменить на следующее:

$$\lim_{n\to\infty} n^{2m-r} \mathbb{P}\{h(\xi_1, \ldots, \xi_m) > z_n(t), h(\xi_{1+m-r}, \xi_{2+m-r}, \ldots, \xi_{2m-r}) > z_n(t)\} = 0 \tag{3}$$

для любого $r \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Основная область применения понятия $U$-max-статистик в настоящее время относится к стохастической геометрии — речь идет о максимальных площадях, периметрах, объемах и сходных метрических характеристиках фигур, построенных по множеству случайных точек на плоскости или в пространствах большей размерности. Вид геометрической фигуры определяет ядро $h$. Лао и Майер рассматривали ядра только невысоких степеней, в основном они изучали треугольники. Королева и Никитин перешли в [6] к $U$-max-статистикам более сложной природы. В частности, они рассматривали максимальный периметр среди всех периметров выпуклых $m$-угольников, случайные вершины которых выбираются среди $n$ независимых и равномерно распределенных на окружности точек. Данная работа обобщает и развивает результаты [6].

**2. Обобщенный периметр многоугольника.** Рассмотрим обобщение понятия периметра. Пусть $d_i$, $i = 1, \ldots, m$, — стороны вписанного $m$-угольника с вершинами $U_1, \ldots, U_m$ и пусть $h(U_1, \ldots, U_m) = \sum_{i=1}^m d_i$ — его периметр. Мы предлагаем рассматривать при $y \in \mathbb{R}$ величину $h_y(U_1, \ldots, U_m) = \sum_{i=1}^m d_i^y$ и называем ее обобщенным периметром многоугольника.

Хорошо известно, что среди всех выпуклых вписанных многоугольников наибольший периметр (и площадь) имеет правильный многоугольник (см., например, [7, зад. 57 а]). Этот факт был известен по крайней мере Лежандру [8].

Оказывается, что это свойство сохраняется и для обобщенных периметров при $0 < y < 1$, а при $y < 0$, напротив, на правильном многоугольнике достигается минимум обобщенного периметра. Мы не нашли в литературе доказательства этого факта, который представляет самостоятельный интерес. Поэтому мы приведем здесь его доказательство.

**Лемма 1.** *Пусть даны $m$ точек $V_1, \ldots, V_m$, лежащих на единичной окружности. Тогда при $y < 0$ функция $h_y(V_1, \ldots, V_m)$ достигает минимума только в вершинах правильного $m$-угольника, и ее минимальное значение равно $2^y m \sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)$.*

*Аналогично, при $y \in (0, 1)$ функция $h_y$ достигает своего максимума только в вершинах правильного $m$-угольника, и ее максимальное значение снова равно $2^y m \sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай отрицательного $y$. Не умаляя общности, будем считать, что точки $V_1, \ldots, V_m$ расположены на окружности в заданном порядке. Тогда функция $h_y$ записывается как $h_y(V_1, \ldots, V_m) = \sum_{j=1}^{m} |V_j V_{j+1}|^y$, где $V_{m+1} = V_1$.

Обозначим также $\gamma_i = \angle V_i O V_{i+1}$, где $i \in \{1, \ldots, m\}$. Легко понять, что $|V_i V_{i+1}| = 2 \sin\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)$, где $i \in \{1, \ldots, m\}$. Отсюда следует, что

$$h_y(V_1, \ldots, V_m) = 2^y \sum_{i=1}^{m} \left(\sin\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\right)^y.$$

Можно считать, что $\gamma_i \in (0, 2\pi)$, иначе значение функции $h_y = \infty$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin^y x$ при $x \in (0, \pi)$. Найдем ее первые две производные:

$$f'(x) = y \sin^{y-1} x \cos x, \quad f''(x) = y \sin^{y-2} x (y \cos^2 x - 1). \tag{4}$$

Ясно, что для отрицательных $y$ данная функция строго выпукла на $(0, \pi)$. Тогда по неравенству Йенсена для любых $y_1, \ldots, y_n \in (0, \pi)$ получаем

$$\alpha_1 f(y_1) + \ldots + \alpha_n f(y_n) \geq f(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n)$$

при условии, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$. Заметим, что

$$h_y(V_1, \ldots, V_m) = 2^y \sum_{i=1}^{m} \left(\sin\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\right)^y \geq 2^y m f\left(\frac{\gamma_1 + \ldots + \gamma_m}{2m}\right) = 2^y m f\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

При этом из-за строгой выпуклости равенство достигается только в случае, когда все $\gamma_i$ равны. Таким образом, в случае $y < 0$ функция $h_y(V_1, \ldots, V_m)$ достигает минимума, равного $2^y m f\left(\frac{\pi}{m}\right) = 2^y m \sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)$ только в вершинах правильного $m$-угольника.

Случай $0 < y < 1$ разбирается аналогично. Если $y \in (0, 1)$, то $f''(x) < 0$, поэтому функция строго вогнута. По сходным соображениям функция $h_y$ достигает своего максимума только в вершинах правильного $m$-угольника. □

Предположим, что точки $U_1, \ldots, U_n$ независимо и равномерно распределены на единичной окружности $S_1$. Тогда верны следующие две предельные теоремы, являющиеся основными результатами работы.

**Теорема 3.** *Обозначим* $H^y_{n,m} = \min\limits_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} h_y(U_{i_1},\ldots,U_{i_m})$. *Тогда при* $y<0$ *для любого* $t>0$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{n^{\frac{2m}{m-1}}\left(H^y_{n,m}-m2^y\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^y\right)\le t\right\}=1-e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K_1(y)}},$$

*где* $K_1(y)=m^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(-2^{y-1}y\pi\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}$.

**Теорема 4.** *Обозначим* $G^y_{n,m} = \max\limits_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} h_y(U_{i_1},\ldots,U_{i_m})$. *Тогда при* $y\in(0,1)$ *для любого* $t>0$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{n^{\frac{2m}{m-1}}\left(m2^y\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^y-G^y_{n,m}\right)\le t\right\}=1-e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K_2(y)}},$$

*где* $K_2(y)=m^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(2^{y-1}y\pi\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^{y-2}\left(1-y\cos^2\frac{\pi}{m}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}$.

## 3. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 3 схоже с соответствующим доказательством в работе [6], но содержит ряд отличий. Рассмотрим точки $U_1,\ldots,U_m\in S_1$. Из леммы 1 следует, что минимум функции $h_y$ равен $2^y m\sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)$ и достигается только в вершинах правильного $m$-угольника. Обозначим $\beta_i=\angle U_1OU_{i+1}$ (в направлении против часовой стрелки). Аналогично работе [6] при $z>2^y m\sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)$ получаем, что

$$\mathbb{P}\{h_y(U_1,\ldots,U_m)<z\}=(m-1)!\,\mathbb{P}\{h_y(U_1,\ldots,U_m)<z,\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{m-1}\}.\quad(5)$$

В дальнейшем мы будем считать, что $U_1,\ldots,U_m$ лежат на окружности именно в таком порядке при обходе против часовой стрелки.

Назовем углы вида $\angle U_iOU_{i+1}$ центральными. Рассмотрим самый маленький и самый большой центральные углы. Пусть это будут углы $\frac{2\pi}{m}+2\varphi_1$ и $\frac{2\pi}{m}-2\varphi_2$, где $\varphi_1,\varphi_2>0$.

**Лемма 2.** *Предположим, что выполнено неравенство* $h_y(U_1,\ldots,U_m)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s$. *Тогда существуют константы* $C,D>0$, *зависящие только от* $y$, *такие, что при* $0<s<D$ *верно* $\varphi_1,\varphi_2<C\sqrt{s}$. *Иными словами, при малых* $s$ *центральные углы отличаются от* $\frac{2\pi}{m}$ *на* $O(\sqrt{s})$.

Доказательство. Рассмотрим другой многоугольник, у которого те же центральные углы, но указанные два угла соседние. Тогда длины сторон многоугольника и значение функции $h_y$ не меняются, и верно следующее неравенство:

$$2^y m\sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)\le h_y(U_1,\ldots,U_m)<2^y m\sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)+s.$$

Заменим центральные углы $\frac{2\pi}{m}+2\varphi_1$ и $\frac{2\pi}{m}-2\varphi_2$ на два одинаковых угла $\frac{2\pi}{m}+\varphi_1-\varphi_2$. От такой замены значение функции могло уменьшиться не более чем на $s$, поэтому

$$2^y\left(\sin^y\left(\frac{\pi}{m}+\varphi_1\right)+\sin^y\left(\frac{\pi}{m}-\varphi_2\right)-2\sin^y\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right)<s.\quad(6)$$

Рассмотрим одно из слагаемых. Разложение по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа дает

$$\sin^y\left(\frac{\pi}{m}\pm\varphi_i\right)=\sin^y\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\pm$$
$$\pm\, y\left(\sin\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right)^{y-1}\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}y\left(\sin\theta_i\right)^{y-2}\left(y\cos^2\theta_i-1\right)\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)^2,$$

где $i\in\{1,2\}$, а $\theta_i\in[\frac{\pi}{m}-\varphi_2,\frac{\pi}{m}+\varphi_1]$. Следовательно, в силу (6) справедливо неравенство

$$s>2^y\left(\sin^y\left(\frac{\pi}{m}+\varphi_1\right)+\sin^y\left(\frac{\pi}{m}-\varphi_2\right)-2\sin^y\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right)=$$
$$=2^{y-2}\left(\frac{1}{2}y\left(\sin\theta_1\right)^{y-2}\left(y\cos^2\theta_1-1\right)+\frac{1}{2}y\left(\sin\theta_2\right)^{y-2}\left(y\cos^2\theta_2-1\right)\right)\left(\varphi_1+\varphi_2\right)^2.$$

Заметим, что при $y<1$ и $x\in(0,\pi)$ верно, что $(\sin x)^{y-2}\geq 1$, а $y\cos^2 x-1<0$ и справедлива оценка $|y\cos^2 x-1|>\min(|y-1|,1)$. Значит, для $y<0$ константа при $(\varphi_1+\varphi_2)^2$ может быть оценена снизу как $C_1(y)>0$. Следовательно, $C_1(y)\left(\varphi_1+\varphi_2\right)^2<s$, а тогда $\varphi_1+\varphi_2<\frac{1}{\sqrt{C_1(y)}}\sqrt{s}$, что доказывает лемму 2. □

Далее нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 3.** *В условиях теоремы 1 верно, что*

$$\lim_{s\to 0}s^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\left\{h_y(U_1,\dots,U_m)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s\right\}=\frac{\Gamma(m+1)}{K_1(y)}.$$

Доказательство. Введем обозначения $\alpha_k=\beta_k-\frac{2\pi k}{m},\alpha_0=0,\alpha_m=0$. Напомним, что $\beta_i$ равномерно и независимо распределены на отрезке $[0,2\pi]$. Это означает, что $\alpha_k$ независимы и равномерно распределены на отрезках $[-\frac{2\pi k}{m},2\pi-\frac{2\pi k}{m}]$ соответственно. В новых обозначениях функция $h_y$ записывается следующим образом:

$$h_y(U_1,\dots,U_m)=2^y\sum_{k=1}^{m}\left(\sin\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\alpha_k-\alpha_{k-1}}{2}\right)\right)^y.$$

Если при малых $s$ выполняется условие $h_y(U_1,\dots,U_m)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s$, то по лемме 2 $\alpha_k=O(\sqrt{s})$. Это позволяет разложить каждое из слагаемых по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в точке $\frac{\pi}{m}$. Воспользуемся (4), а также формулой третьей производной для $\sin^y(x)$. Для сокращения записи положим $\Delta_k:=\frac{\alpha_k-\alpha_{k-1}}{2}$. Получится, что

$$2^y\sum_{k=1}^{m}\sin^y\left(\frac{\pi}{m}+\Delta_k\right)=2^y m\sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)+2^y y\left(\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)^{y-1}\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sum_{k=1}^{m}\Delta_k+$$
$$+2^{y-1}y\left(\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)^{y-2}\left(y\cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right)-1\right)\sum_{k=1}^{m}\left(\Delta_k\right)^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{2^{y-1}}{3}y\left(\sin\left(\eta_k\right)\right)^{y-3}\cos\left(\eta_k\right)\left(y^2\cos^2\left(\eta_k\right)-3y+2\right)\left(\Delta_k\right)^3,$$

где $\eta_k \in [\frac{\pi}{m}-2C\sqrt{s}, \frac{\pi}{m}+2C\sqrt{s}]$ по лемме 2.

Поскольку линейный член пропадает, условие $h(U_1,\ldots,U_m) < 2^y m \sin^y\left(\frac{\pi}{m}\right)+s$ эквивалентно соотношению

$$2^{y-1}y\left(\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)^{y-2}\left(y\cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right)-1\right)\sum_{k=1}^{m}\left(\Delta_k\right)^2+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{2^{y}}{6}y\left(\sin\left(\eta_k\right)\right)^{y-3}\cos\left(\eta_k\right)\left(y^2\cos^2\left(\eta_k\right)-3y+2\right)\left(\Delta_k\right)^3 < s.$$

Это, в свою очередь, равносильно неравенству

$$4\sum_{k=1}^{m}\left(\Delta_k\right)^2+\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{m}\frac{2^{y}}{6}y\left(\sin\left(\eta_k\right)\right)^{y-3}\cos\left(\eta_k\right)\left(y^2\cos^2\left(\eta_k\right)-3y+2\right)\left(\Delta_k\right)^3 < \frac{s}{D}, \quad (7)$$

где

$$D = 2^{y-3}y\left(\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)^{y-2}\left(y\cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right)-1\right). \quad (8)$$

Рассмотрим коэффициент при $k$-м слагаемом третьего порядка, равный

$$2^y\cdot\frac{1}{6}y\left(\sin\left(\eta_k\right)\right)^{y-3}\cos\left(\eta_k\right)\left(y^2\cos^2\left(\eta_k\right)-3y+2\right).$$

Так как $|\eta_k-\frac{\pi}{m}|<2C\sqrt{s}$, то при малых $s$ он будет по модулю меньше, чем

$$\frac{2^y}{6}y\left(\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right)^{y-3}\cdot 1\cdot\max\left(|y^2-3y+2|,|-3y+2|\right) := T,$$

поэтому левую часть (7) можно оценить следующим образом:

$$4\sum_{k=1}^{m}\left(\Delta_k\right)^2+\frac{1}{D}\sum_{k=1}^{m}\frac{2^{y}}{6}y\left(\sin\left(\eta_k\right)\right)^{y-3}\cos\left(\eta_k\right)\left(y^2\cos^2\left(\eta_k\right)-3y+2\right)\left(\Delta_k\right)^3 \le$$
$$\le 4\sum_{k=1}^{m}\left(\Delta_k\right)^2+\frac{T}{D}\sum_{k=1}^{m}\left(|\Delta_k|\right)^3 \le 4\sum_{k=1}^{m}\left(\Delta_k\right)^2+\frac{T}{D}\max|\Delta_k|\sum_{k=1}^{m}\left(\Delta_k\right)^2 \le$$
$$\le\left(1+\frac{TC}{2D}\sqrt{s}\right)\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right)^2.$$

Стало быть, будем иметь

$$\mathbb{P}\left\{h_y\left(U_1,\ldots,U_m\right) < 2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s, \beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{m-1}\right\}\ge$$
$$\ge\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right)^2 < \frac{s}{D(1+\frac{TC}{2D}\sqrt{s})}, |\alpha_k|<2C\sqrt{s}\right\}.$$

Аналогично можно получить неравенство

$$\mathbb{P}\left\{h_y\left(U_1,\ldots,U_m\right)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s,\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{m-1}\right\}\leq$$
$$\leq\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right)^2<\frac{s}{D(1-\frac{TC}{2D}\sqrt{s})},|\alpha_k|<2C\sqrt{s}\right\}.$$

Рассмотрим квадратичную форму $Q(\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha_k-\alpha_{k-1}\right)^2=\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k^2-\sum_{k=2}^{m-1}\alpha_k\alpha_{k-1}$. Применим рассуждения из работы [6] и с помощью ортогонального преобразования заменим эту квадратичную форму на квадратичную форму $W(Y)=\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_k Y_k^2$, где $\lambda_k=1-\cos\frac{\pi k}{m}, k=1,\ldots,m-1$. Ясно, что все $\lambda_k>0$, поэтому условие $W(Y)<s$ влечет за собой условие $Y_k=O(\sqrt{s})$, откуда следует, что $\alpha_k=O(\sqrt{s})$. Это означает, что существует константа $L$, зависящая только от квадратичной формы $Q$, такая что $\alpha_k<L\sqrt{s}$. Можно считать, что $L\leq 2C$, поэтому условие на малость $\alpha_k$ можно убрать из под знака вероятности. Преобразуя предыдущие соотношения, получаем неравенство

$$\mathbb{P}\left\{Q(\alpha)<\frac{s}{2D(1+\frac{TC}{2D}\sqrt{s})}\right\}\leq$$
$$\leq\mathbb{P}\left\{h_y(U_1,\ldots,U_m)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s,\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{m-1}\right\}\leq$$
$$\leq\mathbb{P}\left\{Q(\alpha)<\frac{s}{2D(1-\frac{TC}{2D}\sqrt{s})}\right\}. \qquad (9)$$

Оценим левую и правую части неравенства с помощью следующей леммы. Доказательство этой леммы аналогично рассуждениям из [6, стр. 104].

**Лемма 4.** *Для любого положительного $F>\delta>0$ и $0<s<Z(\delta)$ выполняется равенство*

$$\mathbb{P}\left\{Q(\alpha)<\frac{s}{F}\right\}=\frac{s^{\frac{m-1}{2}}}{(2\pi F)^{\frac{m-1}{2}}\,m\sqrt{m}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)},$$

*где $Z(\delta)$ — это некоторая положительная константа, зависящая только от $\delta$.*

Подставим в формулу (9) результат леммы 4. Тогда получаем двойное неравенство

$$\frac{s^{\frac{m-1}{2}}}{\left(4\pi D\left(1+\frac{TC}{2D}\sqrt{s}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\sqrt{m}}\leq$$
$$\leq\mathbb{P}\left\{h_y(U_1,\ldots,U_m)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s,\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{m-1}\right\}\leq$$
$$\leq\frac{s^{\frac{m-1}{2}}}{\left(4\pi D\left(1-\frac{TC}{2D}\sqrt{s}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\sqrt{m}}.$$

Уберем условия на упорядочивание углов с помощью условия (5), а также разделим на $s^{\frac{m-1}{2}}$. Это приведет к новому двойному неравенству

$$\frac{(m-1)!}{\left(4\pi D\left(1+\frac{TC}{2D}\sqrt{s}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\sqrt{m}}\le s^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\left\{h_y\left(U_1,\ldots,U_m\right)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s\right\}\le$$
$$\le\frac{(m-1)!}{\left(4\pi D\left(1-\frac{TC}{2D}\sqrt{s}\right)\right)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\sqrt{m}}.$$

Устремим $s$ к 0. Ясно, что верхняя и нижняя оценки смыкаются, поэтому

$$\lim_{s\to 0}s^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\left\{h_y\left(U_1,\ldots,U_m\right)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s\right\}=\frac{(m-1)!}{(4\pi D)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\sqrt{m}}.$$

Подставив значение $D$ из (8), получим результат леммы 3. □

Рассмотрим теперь при $t>0$ функцию $z_n(t)=2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+tn^{-\frac{2m}{m-1}}$. Тогда

$$\lambda_{n,z_n(t)}=\binom{n}{m}\mathbb{P}\left\{h_y\left(U_1,\ldots,U_m\right)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+tn^{-\frac{2m}{m-1}}\right\}.$$

Положим $s=tn^{-\frac{2m}{m-1}}$, тогда $n^m s^{\frac{m-1}{2}}=t^{\frac{m-1}{2}}$. Проверим условие (1) из теоремы 2:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{n,z_n(t)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}\mathbb{P}\left\{h_y\left(U_1,\ldots,U_m\right)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s\right\}=$$
$$=\frac{1}{m!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^m(n-m)!}n^m s^{\frac{m-1}{2}}s^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\left\{h_y\left(U_1,\ldots,U_m\right)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+s\right\}=$$
$$=\frac{1}{m!}t^{\frac{m-1}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(tn^{-\frac{2m}{m-1}}\right)^{-\frac{m-1}{2}}\mathbb{P}\left\{h_y\left(U_1,\ldots,U_m\right)<2^y m\sin^y\frac{\pi}{m}+tn^{-\frac{2m}{m-1}}\right\}=$$
$$=\frac{1}{m!}t^{\frac{m-1}{2}}\frac{\Gamma(m+1)}{K_1(y)}=\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K_1(y)}=:\lambda_t>0.$$

Последний предельный переход был осуществлен благодаря лемме 3. Теперь докажем, что выполняется и условие (3).

**Лемма 5.** *Для любого $r\in\{1,\ldots,m-1\}$ выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}n^{2m-r}\mathbb{P}\{h_y(U_1,\ldots,U_m)<z_n(t),h_y(U_{1+m-r},\ldots,U_{2m-r})<z_n(t)\}=0.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\beta_i=\angle U_1OU_{i+1}$ при $i\in\{1,\ldots,2m-r-1\}$, $\gamma_i=\angle U_{m-r+1}OU_{i+1}$ при $i\in\{m-r+1,\ldots,2m-r-1\}$. Ясно, что при $i\ge m$ верно $\gamma_i=(\beta_i-\beta_{m-r})\mod 2\pi$. Пусть $I=(i_1,\ldots,i_{m-1})$ и $J=(j_1,\ldots,j_{m-1})$ — две перестановки $m-1$ элементов. Введем событие $Q=\{\beta_{i_1}<\ldots<\beta_{i_{m-1}},\gamma_{m-r+j_1}<\ldots<\gamma_{m-r+j_{m-1}}\}$ и оценим вероятность

$$\mathbb{P}\{[(h_y(U_1,\ldots,U_m)<z_n(t))\cap(h_y(U_{1+m-r},\ldots,U_{2m-r})<z_n(t))]\cap Q\}.\qquad(10)$$

По лемме 2 верно, что $|\beta_{i_k}-\frac{2\pi k}{m}|<2C\sqrt{s}$ при $i<m$. Аналогично получаем $|\gamma_{m-r+j_k}-\frac{2\pi k}{m}|<2C\sqrt{s}$. Обозначим через $l$ номер места, где стоит элемент $m-r$ в перестановке $I$, а через $t_i$ — номер места, на котором стоит $\gamma_i$ в перестановке $J$. Тогда при $i\ge m$ получается неравенство

$$\left|\beta_i-\frac{2\pi(l+t_i)}{m}\right|\le\left|\beta_i-\beta_{m-r}-\frac{2\pi t_i}{m}\right|+\left|\beta_{m-r}-\frac{2\pi l}{m}\right|<4C\sqrt{s}.$$

Поэтому вероятность (10), в силу распределения $\beta_i$, может быть оценена как $\left(\frac{4C\sqrt{s}}{2\pi}\right)^{m-1}\left(\frac{8C\sqrt{s}}{2\pi}\right)^{m-r}$. Просуммировав эту оценку по всем перестановкам и подставив $s = tn^{-\frac{2m}{m-1}}$, получим неравенство

$$n^{2m-r}\mathbb{P}\{h_y(U_1,\ldots,U_m) < z_n(t), h_y(U_{1+m-r},\ldots,U_{2m-r}) < z_n(t)\} \le$$
$$\le n^{2m-r}\,((m-1)!)^2\left(\frac{4C\sqrt{tn^{-\frac{2m}{m-1}}}}{2\pi}\right)^{m-1}\left(\frac{8C\sqrt{tn^{-\frac{2m}{m-1}}}}{2\pi}\right)^{m-r} = O(n^{-\frac{m-r}{m-1}}) = o(1). \square$$

Вернемся к доказательству теоремы 3. Мы можем воспользоваться теоремой 2, поскольку мы доказали выполнение ее условий. Тогда $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(H^y_{n,m} \ge z_n(t)\right) = e^{-\lambda_t}$ для любого $t \in T$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(H^y_{n,m} \ge 2^y m \sin^y\frac{\pi}{m} + tn^{-\frac{2m}{m-1}}\right) = e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K_1(y)}}.$$

Поэтому для любого $t > 0$ верно, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{n^{\frac{2m}{m-1}}\left(H^y_{n,m} - 2^y m \sin^y\frac{\pi}{m}\right) \le t\right\} = 1 - e^{-\frac{t^{\frac{m-1}{2}}}{K_1(y)}}.$$

Теорема 3 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3 и потому опущено. Условие $y \in (0,1)$ гарантирует, что у функции $(\sin x)^y$ строго отрицательная вторая производная на $[0,\pi]$ (можно считать, что в концах отрезка первые две производные доопределяются по непрерывности), поэтому строгая выпуклость заменяется строгой вогнутостью. Далее сохраняем рассуждения, поменяв знаки в вероятностях, поскольку теперь мы рассматриваем максимум, а не минимум. $\square$

**Замечание 2.** Указанные аргументы неприменимы для $y = 1$, так как вторая производная функции $\sin^y x$ не отделена от 0 на $[0,\pi]$. Но в [6] указан способ доказательства лемм 1 и 2 без этого факта. Поэтому получившаяся константа пригодна и для $y = 1$.

**Литература**


1. *Lao W.* Some weak limit laws for the diameter of random point sets in bounded regions. Ph.D. Thesis. Karlsruhe, 2010.
2. *Mayer M.* Random Diameters and Other $U$-max-Statistics. Ph.D. Thesis. Bern University, 2008.
3. *Barbour A. D., Holst L., Janson S.* Poisson Approximation. London: Oxford University Press, 1992.
4. *Lao W., Mayer M.* $U$-max-statistics // J. Multivariate Anal. 2008. Vol. 99. P. 2039–2052.
5. *Silverman F. B., Brown T.* Short distances, flat triangles, and Poisson limits // J. Appl. Probab. 1978. Vol. 15. P. 815–825.
6. *Koroleva E. V., Nikitin Ya. Yu.* $U$-max-statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons // J. Multivariate Anal. 2014. Vol. 127. P. 99–111.
7. *Yaglom I. M., Boltyanskii V. G.* Convex figures. Transl. by P. J. Kelly and L. F. Walton. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1961.
8. *Legendre A. M.* Elements of Geometry and Trigonometry: With Notes. Oliver & Boyd, 1822.



Статья поступила в редакцию 5 марта 2020 г.;
после доработки 18 мая 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

*Симарова Екатерина Николаевна* — аспирант; katerina.1.14@mail.ru

## Limit theorems for generalized perimeters of random inscribed polygons. I*

*E. N. Simarova*

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
Leonhard Euler International Mathematical Institute,
29B, 14 liniya V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

**For citation:** Simarova E. N. Limit theorems for generalized perimeters of random inscribed polygons. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 678–687. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.409 (In Russian)

Lao and Mayer (2008) recently developed the theory of $U$-max-statistics, where instead of the usual averaging the values of the kernel over subsets, the maximum of the kernel is considered. Such statistics often appear in stochastic geometry. Their limit distributions are related to distributions of extreme values. This is the first article devoted to the study of the generalized perimeter (the sum of side powers) of an inscribed random polygon, and of $U$-max-statistics associated with it. It describes the limiting behavior for the extreme values of the generalized perimeter. This problem has not been studied in the literature so far. One obtains some limit theorems in the case when the parameter $y$, arising in the definition of the generalized perimeter does not exceed 1.

*Keywords*: $U$-max-statistics, Poisson approximation, generalized perimeter, limiting behavior.

### References

1. Lao W., *Some weak limit laws for the diameter of random point sets in bounded regions* (Ph.D. Thesis, Karlsruhe, 2010).
2. Mayer M., *Random Diameters and Other U-max-Statistics* (Ph.D. Thesis, Bern University, 2008).
3. Barbour A. D., Holst L., Janson S., *Poisson Approximation* (Oxford University Press, London, 1992).
4. Lao W., Mayer M., “$U$-max-statistics”, *J. Multivariate Anal.* **99**, 2039–2052 (2008).
5. Silverman F. B., Brown T., “Short distances, flat triangles, and Poisson limits”, *J. Appl. Probab.* **15**, 815–825 (1978).
6. Koroleva E. V., Nikitin Ya. Yu., “$U$-max-statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons”, *J. Multivariate Anal.* **127**, 99–111 (2014).
7. Yaglom I. M., Boltyanskii V. G., *Convex figures* (Transl. by P. J. Kelly and L. F. Walton, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961).
8. Legendre A. M., *Elements of Geometry and Trigonometry: With Notes* (Oliver & Boyd, 1822).

Received: March 5, 2020
Revised: May 18, 2020
Accepted: June 18, 2020

Author’s information:

*Ekaterina N. Simarova* — katerina.1.14@mail.ru

*The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-15-2019-1619).