МЕХАНИКА

УДК 539.42, 539.375
MSC 74R15, 74J40, 74H10

О математическом моделировании процессов высокоскоростного нагружения материалов на кафедре физической механики СПбГУ

В. А. Морозов, В. И. Богатко, А. Б. Яковлев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Морозов В. А., Богатко В. И., Яковлев А. Б.* О математическом моделировании процессов высокоскоростного нагружения материалов на кафедре физической механики СПбГУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 699–713. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.411

Вопросы исследования ударно-волновых процессов в конструкционных материалах являются актуальными, но проведение натурных исследований чрезвычайно затруднительно и дорогостояще, а подчас и даже невозможно воспроизвести. Поэтому в основном все исследования по этой тематике сводятся к различным вариантам моделирования процессов высокоскоростного нагружения материалов в лабораторных условиях. В работе рассмотрены следующие направления математического моделирования высокоскоростного нагружения материалов, проводившиеся на кафедре физической механики СПбГУ: моделирование ударно нагружаемых сред с использованием динамики дислокаций; моделирование высокоскоростного нагружения сред с учетом релаксационных явлений в приповерхностной области; моделирование распространения короткого упругопластического импульса в среде в условии воздействия слабого магнитного поля; построение математических моделей деформирования и разрушения тонких металлических колец магнитно-импульсным методом; моделирование движения трещин при кратковременных импульсных нагружениях.

Ключевые слова: математическое моделирование, высокоскоростное нагружение, динамика дислокаций, упругопластический импульс, магнито-импульсный метод, релаксационные явления, движение трещин.

1. Введение. Интерес к исследованию процессов высокоскоростного нагружения материалов в значительной степени определяется потребностями практики. Дело в том, что потребности современной промышленности предъявляют высокие требования к точности прогноза прочностных характеристик различных материалов, работающих в условиях, быстро изменяющихся во времени. Актуальными и достаточно сложными являются вопросы исследования ударно-волновых процессов в конструкционных материалах.

Однако проведение натурных исследований чрезвычайно затруднительно и дорогостояще, а подчас их даже невозможно воспроизвести. Поэтому в основном все исследования по этой тематике сводятся к различным вариантам моделирования процессов высокоскоростного нагружения материалов в лабораторных условиях.

Моделированию процессов высокоскоростного нагружения материалов как в экспериментальных исследованиях, так и в теоретических расчетах уже не один десяток лет уделяется серьезное внимание сначала в Ленинградском, а затем Санкт-Петербургском государственном университете на кафедре физической механики математико-механического факультета, созданной 50 лет тому назад по инициативе члена-корреспондента АН СССР С. В. Валландера. Большое внимание развитию данного направления уделял первый заведующий кафедрой Б. В. Филиппов. Такие исследования позволяют получить информацию об уравнениях состояния твердого тела в широком диапазоне давлений и скоростей нагружения материала, в том числе и при его фазовых превращениях.

Особенностью ударного нагружения твердых тел, как показывают эксперименты, является синергетическое формирование вихре-волновых структур в среде во время прохождения волны за счет необратимых процессов на мезоскопическом масштабном уровне. Эти процессы аналогичны генерации турбулентных структур в жидкости, что подтверждает общность неравновесных процессов переноса в разных средах при их динамическом нагружении.

При малых скоростях деформации и напряжениях, не превышающих предел прочности, процесс деформации кристаллических твердых тел может с достаточной степенью точности быть описан классической механикой сплошной среды, а эволюция микроструктуры — дислокационно-дисклинационной динамикой. При высоких скоростях деформации и напряжениях выше предела текучести (то есть в условиях ударного нагружения) процесс деформации предлагается описывать с учетом нелокальности и неравновесности [1].

Таким образом, при быстром и сверхбыстром нагружении твердых тел ($t \sim 10^{-7}$–10^{-9} с) существует принципиальное отличие в поведении материалов от квазистатического нагружения. Следует отметить два существенных момента.

Во-первых, при нагружении короткими импульсами начинают все более и более проявляться инерционные свойства материалов, выражающиеся в неравновесности и нестационарности ударно-волнового процесса вблизи поверхности нагружения. За время релаксации происходит перераспределение энергии по соответствующим степеням свободы твердого тела, вызывающее в свою очередь изменение напряженного состояния среды. Наблюдается неадекватный отклик материала в силу инерциальных свойств среды уже на уровне атомной структуры. Начинают проявляться коллективные эффекты.

Во-вторых, становится недостаточным рассмотрение процесса распространения волн напряжений в материале только в рамках механики сплошной среды. Необходимо учитывать структурные параметры материала, так как длины волн, возбуждаемых в твердых телах, становятся сравнимыми с характерными размерами структуры материала (трещины, границы зерен, дислокации и т. д.) и наблюдается взаимодействие волн со структурой. Становится общепринятым представление о том, что разрушение является процессом, протекающим на многих масштабных уровнях.

С математической точки зрения основная причина некорректности классических моделей механики сплошной среды при быстром нагружении заключается в аддитивном принципе их построения. Поскольку принцип аддитивности имеет место только для линейных систем, в области больших деформаций и скоростей деформаций этот принцип не работает [1].

Динамическое разрушение твердых тел характеризуется целым рядом принципиальных эффектов, не имеющих объяснения в рамках традиционных квазистатических представлений. Существовавшие ранее способы моделирования динамического деформирования и разрушения, а также тестирования динамических прочностных свойств материалов сводились к измерению скоростных зависимостей. Математическое моделирование в механике деформируемого твердого тела, как правило, опирается на данные экспериментальных исследований, особенно при построении определяющих уравнений.

В данной статье на примере решения конкретных задач будет показано, как общие закономерности устанавливались, проверялись и уточнялись в ходе математического моделирования, проводимого В. А. Морозовым, его коллегами и учениками. Авторы благодарны редколлегии журнала «Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия» за предложение написать эту обзорную статью.

В работе будут рассмотрены следующие направления математического моделирования высокоскоростного нагружения материалов: моделирование ударно нагружаемых сред с использованием динамики дислокаций; моделирование высокоскоростного нагружения сред с учетом релаксационных явлений в приповерхностной области; моделирование распространения короткого упругопластического импульса в среде в условии воздействия слабого магнитного поля; построение математических моделей деформирования и разрушения тонких металлических колец магнитно-импульсным методом; моделирование движения трещин при кратковременных импульсных нагружениях.

2. Моделирование ударно нагружаемых сред с использованием динамики дислокаций. Одним из способов описания ударного поведения материалов, касающихся изучения зависящих от скорости деформирования свойств материалов, является подход, основанный на использовании динамических свойств дислокаций в записи определяющего уравнения. Замкнутая система уравнений для описания упругопластических волн в случае одноосного нагружения (вдоль оси x) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \rho c^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -F, \end{aligned} \tag{1}$$

где u — скорость смещения частиц материала, ε — полная деформация в направлении распространения волны, σ — напряжение, ρ — плотность материала, c —

скорость звука (адиабатическая), t — время, F — функция релаксации, вид которой определяет зависимость скорости пластической деформации материала от плотности подвижных дислокаций и их скорости.

В работе [2] получено аналитическое решение системы (1) для функции релаксации F поликристаллического материала. Для этого третье уравнение системы (1) записывается через пластическую деформацию сдвига γ, связанную с нормальным напряжением σ и деформацией ε, что в свою очередь позволяет получить выражение для полной (упругой плюс пластической) деформации в направлении сдвига

$$\varepsilon = (\tau + B\gamma)/\ln\left[\frac{\gamma_t}{A\,(M\gamma + 1)}\right] + 2\gamma, \tag{2}$$

где $\gamma_t = \partial\gamma/\partial t$, $A = bv_* N_0$, $B = H/\mu$, $M = \alpha/N_0$, $\tau = \tau_0/\mu$, N_0 — начальная плотность дислокаций, H — константа упрочнения, v_* — скорость поперечных звуковых волн, α — коэффициент размножения дислокаций, b — значение вектора Бюргерса, τ_0 — характеристическое напряжение торможения, λ и μ — коэффициенты Ламэ.

Первые два уравнения системы (1) можно свести к одному уравнению второго порядка относительно σ и ε

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Так как (3) — это волновое уравнение, то подстановка в (3) выражений для γ и ε позволяет получить уравнение третьего порядка в частных производных относительно сдвиговой пластической деформации, решение которого ищется в виде $\gamma = f\,(x - at)$, а именно

$$M\gamma + 1 = M_0 \exp\left(-kx + \omega t\right), \tag{4}$$

где M_0 — амплитуда.

После подстановок и решения уравнения получаются следующие выражения:

$$\gamma = \frac{1}{M}\left[M_0 \exp\left(AMe^{\delta}t - kx\right) - 1\right], \tag{5}$$

$$\varepsilon = -\frac{\tau}{\delta} + \frac{2 - B/\delta}{M}\left[\exp\left(\omega t - kx\right) - 1\right], \tag{6}$$

$$\sigma = -\frac{\tau}{\delta}\rho c^2 + \frac{1}{M}\left[\rho c^2\left(2 - \frac{B}{\delta}\right) - \frac{8}{3}\mu\right]\left[\exp\left(\omega t - kx\right) - 1\right], \tag{7}$$

где

$$\delta = \ln\frac{\omega}{AM} = B/\left(2 - \frac{8\mu}{3\rho}\frac{1}{c^2 - \frac{\omega^2}{k^2}}\right), \tag{8}$$

$$k = \frac{\omega}{c}\Big/\sqrt{1 - \frac{8\mu}{3\rho c^2}\frac{1}{2 - B/\ln\frac{\omega}{AM}}}. \tag{9}$$

Таким образом, напряжение на пластическом фронте волны, начиная от координаты $x = c_p t$, экспоненциально спадает от величины σ_0, равной начальному напряжению, прикладываемому на границе $x = 0$ в момент $t = 0$, до некоторого постоянного значения σ_m, определяемого параметрами материала. Координата начала спада пластического фронта перемещается в положительном направлении оси x со скоростью c_p. Напряжение на пластическом фронте равно

$$\sigma = \sigma_0 + (\sigma - \sigma_m)\left(\exp\left[-k\left(x - c_p t\right)\right] - 1\right) \text{ при } x \geq c_p t, \tag{10}$$

$$\sigma = \sigma_0 \text{ при } x < c_p t.$$

Подбирая параметры τ_0, N_0, α и H так, чтобы расчетный пластический фронт совпадал с экспериментальным, можно начальную плотность дислокаций N_0 определить из аналитического решения (10). Найденная таким образом величина N_0 отвечает значениям, полученным из анализа экспериментальных данных о затухании упругого предвестника.

Развитая в данной работе методика аналитического описания пластических фронтов по существу основывается на замене нелинейной зависимости $\sigma - \varepsilon$ на линейную жестко-пластическую зависимость с упрочнением, наклон которой к оси абсцисс определяется скоростью пластического фронта.

Также в работе приведено численное решение системы уравнений (1) при различных значениях входящих в уравнения параметров дислокационной структуры с использованием метода конечных разностей и с введением искусственной вязкости по Нейману и Рихтмайеру. Этот метод является наиболее употребительным и эффективным для данного класса задач. Введение искусственной вязкости вызвано необходимостью сглаживания решений [3, 4].

С использованием в определяющем уравнении функции релаксации F, подобной соответствующей функции из [2], в работе [5] предложено аналитическое и численное решения системы уравнений (1) для поликристаллических материалов, с помощью которых производится обработка экспериментальных данных по ударному нагружению Армко-железа.

Применение второго типа определяющего уравнения для поликристаллов [5, 6], в котором упрочнение пропорционально скорости деформации:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = A\left(M\gamma + 1\right)\exp\left[-\frac{\tau + B\frac{\partial\gamma}{\partial t}\tau_n}{\varepsilon - 2\gamma}\right] \tag{11}$$

(здесь τ_n — длительность фронта упругого предвестника), позволило обнаружить осцилляционный характер упругопластической волны. Для этого решалась система уравнений (1) и (11) в предположении о законе размножения дислокаций в процессе пластической деформации

$$N = \left(N_0 + \alpha\gamma\right)\exp\left[-H\frac{\partial\gamma}{\partial t}\bigg/\tau_*\right], \tag{12}$$

где τ_* — разрешающее касательное напряжение в плоскости скольжения дислокаций. Этот закон отличается от рассмотренного в [2] характером упрочнения. Получающееся в процессе решения дисперсионное уравнение имеет комплексные корни. Это позволяет утверждать, что упругопластическая волна имеет осцилляционную структуру.

Была определена область фазовых скоростей, для которых возможны осцилляции пластического течения, а также зависимость этой области от параметров среды и нагружения. Данный факт был подтвержден экспериментально в опытах по нагружению импульсом лазера ($\lambda = 1.06$ мкм) длительностью 50 нс образцов алюминия и меди, отожженных в диапазоне температур 400–700 °C [6].

В работе [5] также проведено аналитическое описание профилей упругопластических волн в монокристаллических материалах. При выводе соотношений для напряжения и деформации в упругопластической волне использовались выражения для функции релаксации и для разрешающего касательного напряжения в определяющем уравнении, полученные для некоторых типов кристаллических решеток опытным путем. Как и в [2], возможность получения аналитического решения связана с линеаризацией задачи. Решение хорошо согласуется с экспериментальными зависимостями для монокристаллических материалов.

Описание начальной стадии динамической пластичности при высокоскоростном нагружении приводится в работах [7, 8]. При этом изучается двуволновая структура, возникающая в твердых материалах при высокоскоростном нагружении. Такое рассмотрение представляет интерес по двум причинам: во-первых, амплитуда и форма упругого предвестника и пластического фронта дают информацию о микромеханизмах процесса деформирования и, в частности, об эволюционных характеристиках его дислокационной структуры в процессе прохождения волн и, во-вторых, двуволновая структура весьма чувствительна к скорости нагружения. В работе [7] для частного случая изотропной среды получено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для сдвиговой деформации при сильно выраженной дисперсии. Так как его аналитическое решение невозможно, была рассмотрена предельная ситуация, при которой коэффициент размножения дислокаций мал. Этот коэффициент можно рассматривать как малый параметр в данном уравнении. Полученные уравнения нулевого и первого приближения решаются с помощью преобразования Лапласа. По данным нулевого приближения построена кривая затухания упругого предвестника, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными по нагружению алюминиевых образцов марки А-995. В [8] задача решается для неизотропных монокристаллических материалов. В ней также ищется решение системы уравнений, описывающих одноосную деформацию при малых значениях коэффициента размножения дислокаций. С помощью полученных выражений были обработаны результаты экспериментов по ударному одноосному нагружению монокристаллического алюминия.

В нулевом приближении в обоих работах уравнение для сдвиговой деформации может быть записано в виде

$$\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^2\partial t} + C\frac{\partial^3\gamma}{\partial t^3} + D\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} + E\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} = 0.$$

При этом для результатов работы [7] следует положить

$$C = -\frac{1}{c^2}, \quad D = 2A\mu\,(1-2s)\,, \quad E = -\frac{2A\mu}{c^2},$$

а в работе [8] соответствующие коэффициенты равны

$$C = -\frac{1}{c^2}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{Aa_1a_2}{c^2}.$$

Определяющее уравнение в обоих работах берется в форме Соколовского — Мальверна — Дювола, но ориентационный фактор a, учитывающий ориентацию плоскостей скольжения относительно направления распространения волны, разный. В [7] — $a = \frac{8}{3}\mu$, $s = \frac{2\mu}{3\rho c^2}$, а в [8] — $a = a_1 = \frac{2}{3}\sqrt{6}\,(c_{11} - c_{12})$, $\tau = a_2\sigma$, где μ — коэффициент Ламэ, c_{11}, c_{12} — упругие модули, τ и σ — касательное и нормальное напряжения соответственно.

Альтернативным подходом к рассмотренному нами является моделирование ударно нагружаемых сред с позиции динамики дисклинаций, используемое, например, в [9].

3. Моделирование высокоскоростного нагружения сред с учетом релаксационных явлений в приповерхностной области. Разработанные в последнее время способы генерации коротких импульсов (10^{-9}–10^{-7} с) механических напряжений в твердых телах, а также развитие надежных методов регистрации таких импульсов напряжения позволили проводить исследования поведения материалов в тонкой приконтактной зоне ударного нагружения, характеризуемой существенно неустановившимися ударно-волновыми процессами. Такие исследования [10] обнаружили аномальный характер зависимостей скорости распространения волны и величины продольного и поперечного напряжений от расстояния вблизи поверхности ударного нагружения. Характер зависимостей позволил сделать вывод о высокой динамической жесткости материала вблизи ударяемой поверхности. С уменьшением жесткости происходит перераспределение напряжений за время релаксации, в результате которого достигаются значения напряжений, характерные для установившегося ударно-волнового процесса. При сжатии или растяжении материала импульсами напряжения, длительность которых меньше времени релаксации продольных и поперечных составляющих напряжения к своим равновесным значениям, проявляется ангармонизм колебаний решетки за счет большой скорости ввода энергии. Следствием этого является нелинейный отклик среды на воздействующую нагрузку. В работах [11, 12] система одномерных уравнений движения твердотельной релаксирующей среды вдоль оси с уравнением состояния, полученным по методу Мандельштама—Леонтовича [13], сводится в линейном приближении к одному интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{m}{2c_0}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{\tau} \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\tau_p}\right)\frac{dv}{d\tau'}d\tau', \tag{13}$$

где v — массовая скорость, c_0 — продольная скорость звука, m — параметр релаксации, $\tau = t - x/c_0$, τ_p — время релаксации. В общем случае под интегралом могут стоять функции более сложного вида. Их конкретизация представляет собой довольно непростую задачу, имеющую весьма важное значение в механике. Решение уравнения (13) осуществляется численно методом сеток.

Проанализированы асимптотические решения полученного уравнения для случаев, когда время релаксации много меньше длительности воздействующего импульса и много больше его. В первом случае задача сводится к решению хорошо известного уравнения Кортевега—де-Вриза—Бюргерса

$$\frac{\partial \nu}{\partial z} - \nu\frac{\partial \nu}{\partial \theta} = DT\frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} - DT\frac{\partial^3 \nu}{\partial \theta^3}, \tag{14}$$

где $v = v_0\nu$, v_0 — характерная амплитуда массовой скорости, T — период волны, $\omega_0 = T/\tau_p$ — частота возмущения, $\theta = \tau\omega_0$, $D = mc_0/\,v_0(1+\gamma)$, γ — показатель адиабаты, $z = v_0\omega_0(1+\gamma)x/\,2c_0^2$.

Первый член в правой части (14) связан с наличием диссипации, второй — дисперсии. При отсутствии диссипативного члена уравнение (14) описывало бы процесс распада начального возмущения произвольной формы на ряд слабо взаимодействующих между собой одиночных импульсов — солитонов. Наличие очень сильной диссипации приводит к сглаживанию процесса распада, и солитоны могут не образоваться. Именно этот случай реализуется для волн в релаксирующей среде, поскольку первый член в правой части (14), как правило, много больше второго. Получающееся в этом случае решение описывает одиночный импульс несимметричной колоколообразной формы, который чаще всего реализуется на практике при воздействии лазерного или электронного пучкового излучения.

Во втором предельном случае (время релаксации много больше длительности воздействующего импульса) задача сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \nu}{\partial z} - (\nu + D)\frac{\partial \nu}{\partial \theta} = -\frac{D\nu}{T}. \tag{15}$$

Его решение для произвольного возмущения показывает, что для больших значений v_0 нелинейные эффекты сначала превалируют над эффектами диссипации и формируется ударная волна. Разрыв сохраняется достаточно долго (до больших расстояний). При этом существует некоторая критическая величина амплитуды, ниже которой разрыв сформироваться не может ни при каких расстояниях.

При нагружении материалов короткими импульсами с амплитудами, превышающими динамический предел текучести, формирование волны напряжения осуществляется в два этапа. На первом этапе наблюдается одноволновая структура импульса давления, амплитуда которого быстро и существенно уменьшается. В предположении, что первоначальный отклик материала при воздействии ударного импульса является чисто упругим, в работе [14] описано затухание амплитуды волны с учетом упомянутых релаксационных явлений. По прошествии релаксации на втором этапе волна распадается на две части: упругую и пластическую. В этой связи корректно считать начало релаксации амплитуды упругого предвестника не от поверхности нагружения (как это делалось в ряде зарубежных работ [15, 16]), а от границы релаксационной области.

Решение задачи по распространению волны напряжения на втором этапе может осуществляться двумя способами. В первом из них решение в [14] ищется в виде, проанализированном выше (как в работе [7]). Второй способ, осуществленный в [17], основан на решении системы уравнений для одномерных движений сплошной среды с замыкающим соотношением Соколовского—Мальверна методом характеристик. Используемый подход основан на методе обращения переменных, предложенном в [18].

При втором способе получаются два дифференциальных уравнения для массовой скорости V и напряжения σ:

$$-\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2\rho c^2}\frac{8}{3}\mu b^2 \frac{N_0}{B}\left(\frac{\mu}{c}V - \tau_0\right), \tag{16}$$

$$-\frac{d\sigma}{dx} = \frac{4}{3}\frac{\mu b^2 N_0}{cB}\left(\frac{\mu}{\rho c^2}\sigma - \tau_0\right), \tag{17}$$

где μ — модуль сдвига.

Решение уравнения (17) позволяет получить зависимость изменения амплитуды упругой волны от координаты

$$\ln\left|\sigma^* - \frac{\rho c^2 \tau_0}{\mu\sigma_0}\right| = \frac{4}{3}\frac{\mu^2 b^2 N_0}{\rho c^2 B} l\,(z-k)\,, \tag{18}$$

где $\sigma^* = \sigma\,/\,\sigma_0$, σ_0 — максимальная амплитуда импульса напряжения, k — постоянная интегрирования, l — толщина деформируемого образца.

4. Моделирование распространения короткого упругопластического импульса в среде в условии воздействия слабого магнитного поля. В 1985 году был обнаружен магнитопластический эффект, суть которого заключается в перемещении дислокаций в немагнитных кристаллах с парамагнитными центрами, помещенных в магнитное поле. Установлено, что слабое магнитное поле создает условия для открепления дислокаций от локальных магниточувствительных дефектов и, если продолжительность жизни пары, образованной дислокацией и точечным дефектом, короче времени спин-решеточной релаксации, возможно наблюдение магнитного резонанса. В связи с этим интересным представляется исследование поведения кристаллов при комбинированном воздействии коротких механических и магнитных импульсов с точки зрения влияния магнитного поля на параметры дислокационной структуры материалов и через них на распространение коротких механических импульсов.

Задачей работы [19] являлось численное моделирование движения среды под действием высокоскоростного нагружения в присутствии магнитного поля с целью выявления для конкретного материала (кристаллов NaCl) и конкретных условий нагружения параметров дислокационной структуры, ответственных за изменение функции релаксации при воздействии магнитного поля. Требовалось определить, какие из них являются ведущими и как именно они влияют на характеристики распространяющегося импульса напряжения.

Замкнутая система уравнений, используемая для описания упругопластической волны в случае одноосного нагружения, имела вид (1). Функция релаксации F в замыкающем уравнении определялась соотношением $F = a_1\ \partial\gamma/\,\partial t$, где a_1 — ориентационный фактор, определяющий направление движения дислокаций, γ — пластическая деформация сдвига. Система уравнений решалась численно методом конечных разностей с применением искусственной вязкости (как в работе [5]).

В результате численного расчета выяснилось, что из трех управляющих параметров только один является определяющим — дислокационная вязкость B. Именно он отражает зависимость напряжения в упругопластической волне от магнитного поля. Большая чувствительность к магнитному полю наблюдается при повышении амплитуды напряжения и меньшая — с уменьшением механического напряжения, т. е. при приближении к пределу текучести, что является закономерным и подтверждает известные литературные данные.

5. Построение математических моделей деформирования и разрушения тонких металлических колец магнитно-импульсным методом. В настоящее время множество опытов по динамическому нагружению материалов реализуют с помощью воздействия ударника на образец. Разрыв материала в таких экспериментах происходит в виде откола. При этом отмечается, что предварительная стадия интенсивного сжатия способна изменять структуру рассматриваемого материала. Поэтому необходимо развитие новых подходов, которые позволят проводить эксперименты по непосредственному растяжению в условиях импульсного воздействия. Такими свойствами обладают магнитно-импульсные методы, развитые за последнее десятилетие на кафедре физической механики СПбГУ.

Объектом исследования были выбраны тонкие кольцевые образцы. Магнитоимпульсный метод деформирования и разрушения тонких кольцевых металлических образцов основан на силовом взаимодействии токов, протекающих по катушке и по соосно надетому на нее кольцу (закон Ампера). В работе [20] для нахождения величины тока в катушке и кольце строится эквивалентная электрическая схема рассматриваемого устройства, представляющая систему двух связанных контуров. Уравнения для них записываются согласно законам Кирхгоффа.

Окружное напряжение в кольце определялось согласно выражению

$$\sigma(t) = \left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0} \cdot \frac{1}{\omega}\sin\omega t + \omega\frac{R_0}{h}\int_0^t q(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau, \tag{19}$$

где $\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0}$ бралось из эксперимента, R_0 — начальный радиус кольца, h — толщина кольца, $q(t) = F(t)/c$ — распределенная нагрузка, действующая на внутреннюю поверхность кольца, c — ширина кольца. С учетом малости деформации в линейно-упругом приближении получено уравнение движения кольца и найдено его решение.

В работе [21] на основе механизма вязкого деформирования предложена математическая модель процесса нагружения металлического кольца. Из уравнения энергетического баланса выведено уравнение его движения

$$\rho\left(\frac{1}{2R}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{d^2R}{dt^2}\right) + \frac{\sigma}{R} = \frac{q(t)}{h}, \tag{20}$$

где R — радиус кольца, ρ — плотность материала кольца. При этом было использовано определяющее уравнение Соколовского — Мальверна с функцией релаксации в правой части, записанное с использованием динамики дислокаций. Совместное решение уравнений движения кольца и уравнения Соколовского — Мальверна позволило определить временной профиль окружного напряжения.

С помощью сформулированного в [22] структурно-временного подхода в [23] было смоделировано разрушение алюминиевых кольцевых образцов и получена аналитическая зависимость предельных напряжений от времени разрушения, которая находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Такой подход позволяет описать как ветвь кривой скоростного нагружения, так и ту ветвь, где процессы можно считать квазистатическими.

6. Моделирование движения трещин при кратковременных импульсных нагружениях. В условиях динамического нагружения материалов микро-, субмикро- или наносекундным импульсом важным является зарождение и процесс движения трещин, а также пороговые значения величин, при которых эти движения возникают. Существует достаточно большое количество подходов к проблеме распространения трещины. Одним из них является так называемый «балочный» подход.

Идея «балочного» подхода реализуется в [24] при рассмотрении задачи о прохождении импульса волны напряжения вдоль продольной оси призматического прямоугольного бруска, который содержит трещину длины l, простирающуюся через всю ширину бруска. Предполагается, что материал образца линейно-упругий, а трещина представляет препятствие для прохождения импульса напряжения. Свободный конец трещины не будет открываться до тех пор, пока генерируемое напряжение на кончике трещины не достигнет достаточной величины, чтобы происходило ее распространение. Поэтому для каждой заданной длины трещины существует не только критическое напряжение, но также и критическое время его продолжительности.

В качестве модели трещины рассматривается балка, защемленная концом и нагруженная сплошной нагрузкой, что позволяет записать уравнение прогиба. Записав выражения для кинетической энергии T, потенциальной энергии деформации U и поверхностной энергии S, получим формулу для функции Лагранжа

$$L = T - U - S = \frac{\rho h \sigma^2 b^3 l^7 \left(dl/dt\right)^2}{24 J^2 E^2} - \frac{\sigma^2 b^2 l^5}{40 E J} - (l - l_0)\, b\gamma, \tag{21}$$

где J — момент инерции, E — модуль упругости, b — ширина бруска, l — длина трещины, l_0 — начальная длина трещины. Формируя производные в уравнении Лагранжа и учитывая, что момент инерции и ширина области, где происходит суперпозиция падающих и отраженных волн напряжения, являются функциями времени, получаем уравнение движения трещины, распространяющейся в случае мгновенного приложения напряжения постоянной амплитуды:

$$2l^7 t \frac{d^2 l}{dt^2} + 7 l^6 t \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - 10 l^7 \frac{dl}{dt} = -\frac{\gamma E a^7}{6\sigma^2} t^6 - \frac{a^4}{4} l^4 t^3, \tag{22}$$

где a — скорость расширения области, в которой происходит суперпозиция падающих и отраженных импульсов напряжения. Для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (22) исследуется поведение решения при $t \to \infty$ и вблизи момента страгивания трещины. Из асимптотического поведения получено выражение для конечной скорости трещины, а из второго случая — критерий динамической прочности. Оценивается время выхода трещины на стационарную скорость. Показано, что в условиях динамического нагружения величина эффективной поверхностной плотности энергии на порядок и более превосходит ее значение при статических испытаниях.

В работе [25] рассмотрена модель фрактальной трещины. Как известно, макроскопически прямолинейная трещина распространяется на микроуровне по криволинейной траектории, скачкообразно осциллирующей случайным образом в окрестности прямой. Вследствие такого распространения трещины ее поверхность и контур имеют сложную геометрию и на некотором мезомасштабном уровне обладают фрактальными свойствами. Эти свойства должны оказывать существенное влияние на кинетику распространения трещины.

Приращение длины фрактальной трещины dl_f записывается в виде суммы двух слагаемых:

$$dl_f = dl_v + dl_{vf}, \tag{23}$$

где первое слагаемое является масштабно независимой величиной, а второе $dl_{vf} \sim dt^{1/D_f}$ определяет приращение длины трещины в зависимости от масштаба измерения и является функцией фрактального времени, D_f — фрактальная размерность контура трещины. Величина приращения времени может быть равна только одному физическому параметру — времени «жизни» разрушающей флуктуации плотности (дилатона), которая обусловливает взрывоподобное зарождение трещины. Так как время «жизни» дилатона t_d определяется длиной свободного пробега фононов Λ и их скоростью $t_d = \Lambda/c_1$, то выражение для скорости фрактальной трещины будет иметь вид

$$V_f = c_R \left(\frac{0.3ac_1}{\Lambda c_R} \right)^{1-1/D_f}, \tag{24}$$

где $c_R = l_0/\, t_0$, c_1 — скорость звука, l_0 — масштаб длины трещины, t_0 — масштаб времени, a — параметр кристаллической решетки при $T = 0$ K. Таким образом, установлено, что предельная скорость распространения трещины определяется фрактальной размерностью ее контура. Показано, что для промышленных сталей предельное значение скорости трещин находится в диапазоне $(0.155 - 0.537)c_1$.

Литература

1. *Хантулева Т. А.* Нелокальная теория неравновесных процессов переноса. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013.

2. *Мещеряков Ю. И., Морозов В. А.* Об использовании дислокационной модели для описания ударно-нагружаемых жесткопластических сред с упрочнением // Журнал прикладной механики и технической физики. 1978. Вып. 3. С. 121–129.

3. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М., 1984.

4. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М., 1982.

5. *Мещеряков Ю. И., Морозов В. А.* О структуре волн сжатия в упругопластических средах // Сб.: Физическая механика. Вып. 3. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. С. 109–132.

6. *Морозов В. А., Байзаков О. Д., Макаревич И. П., Судьенков Ю. В.* Осцилляция пластического течения в металлах за фронтом упругого предвестника. В кн.: Проблемы динамических процессов в гетерогенных средах: Всесоюзн. межвуз. сб. научн. тр. / Калинин. политехн. ин-т. Калинин: Изд-во КГУ, 1987. С. 127–132.

7. *Мещеряков Ю. И., Морозов В. А.* Исследование начальной стадии динамической пластичности в алюминии А-995 // СО АН СССР, ВЦ, Численные методы механики сплошной среды, 1980. Т. 11, № 3. С. 109–119.

8. *Мещеряков Ю. И., Морозов В. А.* О начальной стадии динамической пластичности // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1980. № 13. Вып. 3. С. 77–82.

9. *Мещеряков Ю. И., Савенков Г. Г.* Осцилляции фронта пластической волны в условиях высокоскоростного нагружения // ПМТФ, 2001. Т. 42, № 6. С. 117–123.

10. *Судьенков Ю. В.* Релаксация упругих постоянных алюминия вблизи поверхности ударного нагружения // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. Вып. 23. С. 1418–1422.

11. *Морозов В. А., Семенюк О. В.* Решение интегро-дифференциального уравнения для слабонеравновесной релаксирующей среды // Третьи Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, С.-Петербург, 4–6 февраля 2003 г. СПб.: Изд-во НИИХ С.-Петерб. ун-та, 2003. С. 205–206.

12. *Морозов В. А., Семенюк О. В.* Моделирование движения слабонеравновесной релаксирующей среды при кратковременном импульсном нагружении // Сб.: Физическая механика. Вып. 8. Модели неоднородных сред. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. С. 183–195.

13. *Мандельштам Л. И., Леонтович М. А.* К теории поглощения звука в жидкостях // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. Вып. 3. С. 438–449.

14. *Морозов В. А., Байзаков О. Д., Судьенков Ю. В.* Модель затухания упругой волны с учетом релаксационных явлений в приповерхностной зоне ударного нагружения // Сб.: Газодинамика и теплообмен. Вып. 9. Динамика однородных и неоднородных сред. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. С. 187–191.

15. *Johnson J. N., Jones O. E., Michaels T. E.* Dislocation dynamics and singlecrystall constitutive relation // J. Appl. Phys. 1970. Vol. 41. P. 2330–2339.

16. *Murri W. J., Anderson G. D.* Hugoniot elastic' limit of aingles-crystal sodiumchloride // J. Appl. Phys. 1970. Vol. 41. P. 3521–3525.

17. *Морозов В. А., Богатко В. И.* Формирование упругопластической волны в приповерхностной области при кратковременном нагружении // ДАН. 2008. Т. 421, № 6. С. 765–768.

18. *Христианович С. А., Михлин С. Г. и др.* Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. М.; Л.: АН СССР, 1938.

19. *Кац В. М., Морозов В. А.* Моделирование распространения короткого упругопластического импульса в кристаллах NaCl в условиях воздействия слабого импульсного магнитного поля // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 1. Математика. Механика. Астрономия. С. 115–121.

20. *Gunko Y. F., Zaychenko O. K., Lukin A. A., Morozov V. A., Gunko N. A.* Deformation and fracture of thin ring samples of copper and aluminium by magnetic pulse method // 2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading; St. Petersburg; 2–6 February 2015. Art. no. 7106734.

21. *Зайченко О. К., Морозов В. А.* Построение модели расчета напряжения при динамическом деформировании металлических колец магнитно-импульсным методом // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: Сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019. С. 1130–1135.

22. *Petrov Yu. V.* Incubation time criterion and the pulsed strength of continua: fracture, cavitation and electrical breakdown // Doklady Physics. 2004. Vol. 49, N 4. P. 246–249.

23. *Морозов В. А., Петров Ю. В., Сухов В. Д.* Экспериментальная оценка структурно-временных характеристик разрушения материала на основе магнитно-импульсного нагружения кольцевых образцов // Журнал технической физики, 2019. Т. 89. Вып. 5. С. 692–696.

24. *Морозов В. А.* Движение трещины при кратковременных импульсных нагружениях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2010. Вып. 1. С. 105–111.

25. *Морозов В. А., Савенков Г. Г.* Предельная скорость распространения трещин в динамически разрушаемых материалах // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 1. С. 163–169.

Статья поступила в редакцию 3 сентября 2020 г.;
после доработки 6 мая 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Морозов Виктор Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.morozov@spbu.ru
Богатко Всеволод Иванович — канд. физ.-мат. наук, доц.; aerovib@mail.ru
Яковлев Андрей Борисович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; a.b.yakovlev@spbu.ru

About mathematical simulation of processes for high-speed loading of materials on Department of Physical Mechanics of St. Petersburg State University

V. A. Morozov, V. I. Bogatko, A. B. Yakovlev

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Morozov V. A., Bogatko V. I., Yakovlev A. B. About mathematical simulation of processes for high-speed loading of materials on Department of Physical Mechanics of St. Petersburg State University. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 699–713.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.411 (In Russian)

The researches of shock-wave processes in the constructional materials are actual, but carrying out of natural experiments is extremely inconvenient and expensive, and sometimes it is even impossible to replicate. Therefore basically all researches of these problems are reduced to various cases of simulation of processes for high-speed loading of materials in the laboratory circumstances. In the paper we consider following directions of mathematical simulation of processes for high-speed loading of materials that were made on department of physical mechanics of St. Petersburg State University: the simulation of shock-loaded media by using of dynamics of dislocations; the simulation of high-speed loading of media with the account of the relaxation phenomena in a near-surface region; the simulation of propagation of the short elastoplastic impulse in medium under the condition of influence of a weak magnetic field; the generation of mathematical models of deformation and destruction of thin metal rings by a magnetic-pulse method; the simulation of crack propagation during the short-term pulse loading.

Keywords: mathematical simulation, high-speed loading, dynamics of dislocations, relaxation phenomena, elastoplastic impulse, magnetic-pulse method, crack propagation.

References

1. Khantuleva T. A., *Nonlocal theory of nonequilibrium transport process* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2013). (In Russian)

2. Meshcheryakov Yu. I., Morozov V. A., "Use of a dislocation model for description of shock-loaded rigidly plastic media with hardening", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **19** (3), 380–386 (1978). https://doi.org/10.1007/BF00850825

3. Belotserkovsky O. M., *Numerical simulation in mechanics of continua* (Moscow, 1994). (In Russian)

4. Belotserkovsky O. M., Davydov Yu. M., *Method of large particles in gas dynamics. Computing experiment* (Moscow, 1982). (In Russian)

5. Meshcheryakov Yu. I., Morozov V. A., "On the structure of the pressure waves in visco-plastic media", in *Fizicheskaya Mekhanika*, iss. 3, 168–180 (Leningrad University Press, Leningrad, 1978). (In Russian)

6. Morozov V. A., Bayzakov O. D., Makarevich I. P., Sud'enkov Yu. V., "Plastic flow oscillation in metals behind front of an elastic harbinger", in *Problems of dynamic processes in heterogenous mediums. All-Union interuniversity collection of scientific transactions*, 127–132 (Kalinin Polytechnical Institute Press, Kalinin, 1987). (In Russian)

7. Meshcheryakov Yu. I., Morozov V. A., "Investigation of the initial stage of dynamic yielding in aluminium A-995", *The Siberian branch of Academy of Sciences of the USSR, Computing center, Numerical methods of mechanics of a continuous medium* **11** (3), 109–119 (1980). (In Russian)

8. Meshcheryakov Yu. I., Morozov V. A., "About an initial stage of dynamic plasticity", *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* (13), iss. 3, 77–82 (1980). (In Russian)

9. Meshcheryakov Yu. I., Savenkov G. G., "Oscillations of the plastic wave front under high-rate loading", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **42** (6), 1023–1028 (2001).

10. Sud'enkov Yu. V., "Relaxation of elastic constants of aluminium near to a surface of shock loading", *Applied Physics Letters* **9** (23), 1418–1422 (1983). (In Russian)

11. Morozov V. A., Semenyuk O. V., "Solution to an integro-differential equation for a slightly nonequilibrium relaxing medium", *The Third Polyakhov's Reading. Theses of reports of the International scientific conference on mechanics, St. Petersburg, February 4–6, 2003*, 205–206 (St. Petersburg, Publishing office of Chemistry institute of St. Petersburg State University, 2003).

12. Morozov V. A., Semenyuk O. V., "Simulation of a motion of faint non-equilibrium relaxation's media at short-term pulse loading", in *Fizicheskaya Mekhanika*, iss. 8, 183–195 (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2004). (In Russian)

13. Mandel'shtam L. I., Leontovich M. A., "To the theory of absorption of a sound in fluids", *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **7** (3), 438–449 (1937). (In Russian)

14. Morozov V. A., Bayzakov O. D., Sud'enkov Yu. V., "Model of decay of an elastic wave taking into account the relaxation phenomena in near surface region of shock loading", *The dynamics of homogeneous and non-homogeneous media. Gas dynamics and heat transfer*, iss. 9, 187–191 (Leningrad University Press, Leningrad, 1987). (In Russian)

15. Johnson J. N., Jones O. E., Michaels T. E., "Dislocation dynamics and singlecrystall constitutive relation", *J. Appl. Phys.* **41**, 2330–2339 (1970).

16. Murri W. J., Anderson G. D., "Hugoniot elastic' limit of aingles-crystal sodiumchloride", *J. Appl. Phys.* **41**, 3521–3525 (1970).

17. Morozov V. A., Bogatko V. I., "Elastoplastic wave formation in near-surface region under short-term loading", *Doklagy Physics* **53** (8), 462–465 (2008).

18. Christianovich S., Michlin S., Davison B., *Some new issues of continuum mechanics* (Moscow, Leningrad, 1938). (In Russian)

19. Kats V. M., Morozov V. A., "Modeling of short elastoplastic pulses propagating in nacl crystals under a weak pulsed magnetic field", *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 1, 115–121 (2011). (In Russian)

20. Gunko Y. F., Zaychenko O. K., Lukin A. A., Morozov V. A., Gunko N. A., "Deformation and fracture of thin ring samples of copper and aluminium by magnetic pulse method", *2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading, St. Petersburg, February 2–6, 2015*, art. no. 7106734 (2015).

21. Zaychenko O. K., Morozov V. A., "Construction of a model for calculation of strain at dynamic deforming of metal rings by a magnetic-pulse method", *Actual problems of applied mathematics and mechanics. Collection of transactions of the International scientific conference, Voronezh, December 17–19, 2018*, 1130–1135 (Publishing house "Scientific research publications", Voronezh, 2019). (In Russian)

22. Petrov Yu. V., "Incubation time criterion and the pulsed strength of continua: fracture, cavitation and electrical breakdown", *Doklady Physics* **49** (4), 246–249 (2004).

23. Morozov V. A., Petrov Y. V., Sukhov V. D., "Experimental evaluation of structural and temporal characteristics of material fracture based on magnetic pulse loading of ring samples", *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics* **64** (5), 642–646 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063784219050165

24. Morozov V. A., "Fracture motion at short-term pulse loading", *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 1, 105–111 (2010). (In Russian)

25. Morozov V. A., Savenkov G. G., "Limiting velocity of crack propagation in dynamically fractured materials", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **54** (1), 142–147 (2013). https://doi.org/10.1134/S0021894413010173

Received: September 3, 2020
Revised: May 6, 2020
Accepted: June 18, 2020

Authors' information:

Victor A. Morozov — v.morozov@spbu.ru
Vsevolod I. Bogatko — aerovib@mail.ru
Andrey B. Yakovlev — a.b.yakovlev@spbu.ru