УДК 531.011 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4
MSC 70F25

Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. II

М. П. Юшков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Юшков М. П.* Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 714–733. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.412

Данная работа является продолжением статьи «Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I» (Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия, 2019), в которой для решения обобщенной задачи Чебышёва излагаются две теории движения неголономных систем со связями высокого порядка. Эти теории используются для исследования движения спутника Земли при фиксировании величины его ускорения (что эквивалентно наложению линейной неголономной связи третьего порядка). В предлагаемой статье вторая теория, базирующаяся на применении обобщенного принципа Гаусса, используется для решения одной из важнейших задач теории управления о нахождении оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему с конечным числом степеней свободы за указанное время из одного фазового состояния в другое. Применение теории демонстрируется решением модельной задачи об управлении горизонтальным движением тележки, несущей оси s математических маятников. Первоначально задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина, минимизирующего функционал от квадрата искомой горизонтальной управляющей силы, переводящей за указанное время механическую систему из состояния покоя в новое состояние покоя при горизонтальном смещении тележки на S (то есть рассматривается задача о гашении колебаний). Назовем этот подход первым методом решения поставленной задачи управления. При этом непрерывно выполняется линейная неголономная связь порядка $2s + 4$. Это наталкивает на мысль применить для решения той же задачи вторую теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка (см. предыдущую статью), разработанную на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Назовем такой подход вторым методом решения поставленной задачи. Расчеты, проведенные для случая $s = 2$, показали, что при кратковременном движении системы результаты, полученные этими методами, практически совпадают, в то время как при длительном движении они резко различаются. Это объясняется тем, что управление, найденное с помощью первого метода, содержит гармоники с собственными частотами системы, что стремится ввести систему в резонанс. При кратковременном движении это мало заметно, а при длительном движении наблюдаются большие колебания системы. При втором методе управление находится в виде полинома от времени, что обеспечивает сравнительно плавное движение системы. Помимо этого в статье для устранения скачков управляющей силы в начале и в конце движения предлагается решать обобщенную краевую задачу и обсуждаются некоторые особые случаи, проявляющиеся иногда при использовании второго метода решения поставленной граничной задачи.

Ключевые слова: неголономная механика, связи высокого порядка, принцип максимума Понтрягина, обобщенный принцип Гаусса, управление, гашение колебаний, обобщенная краевая задача.

1. Постановка одной из важнейших задач теории управления. Рассмотрим одну из важнейших задач теории управления — задачу о нахождении оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему с конечным числом степеней свободы за указанное время из имеющегося фазового состояния системы в новое заданное фазовое состояние.

Обсуждение такой задачи теории управления будем проводить на примере решения модельной задачи об отыскании оптимальной горизонтальной управляющей силы F, приложенной к горизонтально движущейся тележке массы m, несущей оси s математических маятников с массами m_σ, $\sigma = \overline{1,s}$ (см. рис. 1, на котором принято $s = 2$). Требуется за время $\widetilde{T}$ перевести рассматриваемую механическую систему, для определенности, из начального состояния покоя в новое состояние покоя (тогда обычно говорят, что решается задача о гашении колебаний), переместив тележку на расстояние S. Если координату тележки обозначить через x, а углы поворотов маятников через φ_σ, $\sigma = \overline{1,s}$, то сформулированные граничные условия задачи будут иметь вид

$$\begin{gathered} x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\widetilde{T}) = 0, \quad x(\widetilde{T}) = S, \\ \varphi_\sigma(0) = \varphi_\sigma(\widetilde{T}) = 0, \quad \dot{\varphi}_\sigma(0) = \dot{\varphi}_\sigma(\widetilde{T}) = 0, \quad \sigma = \overline{1,s}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

а линеаризованные дифференциальные уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} M\ddot{x} - \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma l_\sigma \ddot{\varphi}_\sigma = F, \quad M = m + \sum_{\sigma=1}^{s} m_\sigma, \\ \ddot{x} - l_\sigma \ddot{\varphi}_\sigma = \mathrm{g}\varphi_\sigma, \quad \sigma = \overline{1,s}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

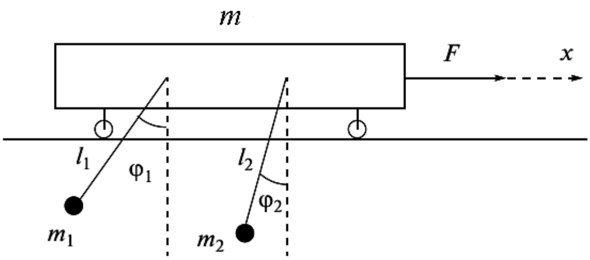

Рис. 1. Тележка с маятниками ($s = 2$).

Для дальнейших исследований систему (1.2) удобно записать в главных координатах. Рассматриваемая механическая система имеет нулевую частоту $\Omega_0 = 0$ и s ненулевых собственных частот Ω_σ, $\sigma = \overline{1,s}$. Используя собственные формы колебаний, соответствующие этим частотам, введем главные безразмерные координаты x_σ, $\sigma = \overline{1,s}$, задавая их как линейные комбинации углов φ_σ, $\sigma = \overline{1,s}$ [1]. Переходя к безразмерному времени $\tau = \Omega_1\, t$ и вводя $(s+1)$-ю безразмерную главную координату x_0, пропорциональную перемещению центра масс рассматриваемой механической системы, в результате получим

$$\begin{cases} x_0'' = u, \\ x_\sigma'' + \omega_\sigma^2 x_\sigma = u, \quad \sigma = \overline{1, s}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь u — безразмерное управление, пропорциональное силе F, штрихи соответствуют производным по безразмерному времени τ, $\omega_\sigma = \Omega_\sigma / \Omega_1$, $\sigma = \overline{1, s}$. В правых частях уравнений (1.3) стоит одно и то же управление u, этого легко добиться соответствующим изменением масштабов главных координат. Для решения полученной системы дифференциальных уравнений (1.3) перепишем требования (1.1) в виде следующих граничных условий:

$$\begin{gathered} x_0(0) = x_0'(0) = 0, \quad x_\sigma(0) = x_\sigma'(0) = 0, \quad T = \Omega_1 \widetilde{T}, \\ x_0(T) = a \equiv \frac{S}{l_1}, \quad x_0'(T) = 0, \quad x_\sigma(T) = x_\sigma'(T) = 0, \\ \sigma = \overline{1, s}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

2. Решение поставленной задачи с помощью принципа максимума Понтрягина. Из системы (1.3), имеющей $s+1$ дифференциальных уравнений, требуется найти $s+1$ неизвестных функций x_0, x_σ, $\sigma = \overline{1, s}$. Но в этой же системе (1.3) неопределенной является и функция $u(t)$. Поэтому для решения поставленной задачи (1.3), (1.4) необходимо добавить еще одно условие. Оно должно выражать требование, которое положено в основу выбора управления $u(\tau)$ (управляющей силы $F(t)$) из всего множества возможных управлений, при которых рассматриваемая задача имеет решение. В монографии [2] при решении подобных задач выбор управления подчиняется требованию минимальности функционала

$$J = \int_0^T u^2 d\tau. \tag{2.1}$$

Одним из наиболее принятых классических методов решения сформулированной задачи оптимального управления (1.3), (2.1) является метод, опирающийся на использование принципа максимума Понтрягина [3]. Согласно этому принципу уравнения (1.3) переписываем в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} q_k' = f_k(q, u), \quad k = \overline{1, 2s+2}, \\ q_1 = x_0, \quad q_2 = x_0', \quad q_{2\sigma+1} = x_\sigma, \quad q_{2\sigma+2} = x_\sigma', \\ f_1 = q_2, \quad f_2 = u, \quad f_{2\sigma+1} = q_{2\sigma+2}, \quad f_{2\sigma+2} = u - \omega_\sigma^2\, q_{2\sigma+1}, \quad \sigma = \overline{1, s}. \end{gathered}$$

В рассмотрение вводятся множители Лагранжа $\lambda_k(\tau)$, $k = \overline{1, 2s+2}$, и функция Гамильтона — Понтрягина

$$H = -u^2 + \sum_{k=1}^{2s+2} \lambda_k\, f_k\,(q, u).$$

При отыскании минимума функционала (2.1) в подынтегральной функции знак заменяется на противоположный.

Неизвестные функции $\lambda_k(\tau)$ подчиняются второй группе уравнений

$$\lambda'_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = \overline{1, 2s+2},$$

а искомое управление $u(\tau)$ определяется из условия

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \tag{2.2}$$

Для нашей задачи имеем

$$H = -u^2 + \lambda_1 \, q_2 + \lambda_2 \, u + \sum_{\sigma=1}^{s} \lambda_{2\sigma+1} \, q_{2\sigma+2} + \sum_{\sigma=1}^{s} \lambda_{2\sigma+2} \, (u - \omega_\sigma^2 \, q_{2\sigma+1}), \tag{2.3}$$

$$\lambda'_1 = 0, \quad \lambda'_2 = -\lambda_1, \quad \lambda'_{2\sigma+1} = \omega_\sigma^2 \, \lambda_{2\sigma+2}, \quad \lambda'_{2\sigma+2} = -\lambda_{2\sigma+1}, \quad \sigma = \overline{1, s}. \tag{2.4}$$

Из выражений (2.2) и (2.3) следует, что

$$u(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{s+1} \lambda_{2\sigma}(\tau).$$

Функции $\lambda_{2\sigma}(\tau)$, $\sigma = \overline{1, s+1}$, в соответствии с системой (2.4) удовлетворяют уравнениям

$$\lambda''_2 = 0, \quad \lambda''_{2\sigma+2} + \omega_\sigma^2 \, \lambda_{2\sigma+2} = 0, \quad \sigma = \overline{1, s}.$$

Поэтому минимизация функционала (2.1) достигается при

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + \sum_{\sigma=1}^{s} (C_{2\sigma+1} \cos \omega_\sigma \tau + C_{2\sigma+2} \sin \omega_\sigma \tau). \tag{2.5}$$

Здесь C_k, $k = \overline{1, 2s+2}$, — произвольные постоянные. Подставляем функцию (2.5) в правые части уравнений (1.3). Общее решение этой системы дифференциальных уравнений будет содержать произвольные постоянные D_k, $k = \overline{1, 2s+2}$. Таким образом, полученное общее решение будет зависеть от $4s + 4$ произвольных постоянных C_k, D_k, $k = \overline{1, 2s+2}$, которые определяются из $4s + 4$ заданных граничных условий (1.4).

Обратим внимание на то, что мы решаем задачу о гашении колебаний рассматриваемой механической системы, причем в начальный момент $\tau_0 = 0$ система находится в покое, то есть равны нулю все ее главные обобщенные координаты и скорости. Вследствие этого частное решение системы (1.3) при нулевых начальных условиях удобно представить через интегралы Дюамеля:

$$\begin{gathered} x_0(\tau) = \int_0^\tau u(\tau_1)(\tau - \tau_1) \, d\tau_1, \\ x_\sigma(\tau) = \frac{1}{\omega_\sigma} \int_0^\tau u(\tau_1) \sin \omega_\sigma (\tau - \tau_1) \, d\tau_1, \quad \sigma = \overline{1, s}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Теперь после подстановки интегралов (2.6) при учете выражения (2.5) во вторую группу граничных условий (при $\tau = T$) и вычисления интегралов получим алгебраическую линейную неоднородную систему уравнений относительно лишь неизвестных C_σ, $\sigma = \overline{1, 2s+2}$. Решив ее, окончательно найдем искомое управление.

Подчеркнем, что полученное с помощью принципа максимума Понтрягина управление (2.5), во-первых, зависит лишь от собственных частот системы и, во-вторых, достигается за счет отыскания искомой управляющей силы в виде ряда по собственным частотам системы, что при длительном времени движения будет вводить исследуемую механическую систему в резонанс.

3. Связь решения, полученного с помощью принципа максимума Понтрягина, с неголономной задачей. Как было видно из предыдущего пункта, представление размерных дифференциальных уравнений (1.2) горизонтального движения тележки с s маятниками в виде безразмерных независимых уравнений в главных координатах (1.3) (при задании граничных условий (1.4)) оказалось весьма эффективным. Именно поэтому при гашении колебаний рассматриваемой механической системы с помощью принципа максимума Понтрягина при минимизации функционала (2.1) удалось построить безразмерное управление в виде простой формулы (2.5). Эта формула позволяет посмотреть на полученное с помощью принципа максимума Понтрягина решение с совершенно новой и интересной точки зрения, которая дает возможность соединить две абсолютно различные области механики — теорию управления и неголономную механику.

С этой целью обратим, прежде всего, внимание на то, что полученное по принципу максимума Понтрягина управление (2.5) можно рассматривать как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_2^2\right)\,\ldots\,\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega_s^2\right)u=0. \tag{3.1}$$

Перепишем уравнение (3.1) в размерных величинах:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega_2^2\right)\,\ldots\,\left(\frac{d^2}{dt^2}+\Omega_s^2\right)F=0. \tag{3.2}$$

Подставив в уравнение (3.2) выражение для F из первого уравнения первоначальной системы (1.2), получим дифференциальное уравнение порядка $2s+4$ относительно обобщенных координат x, φ_σ, $\sigma=\overline{1,s}$. В частном случае при $s=2$ это уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}a_{8,x}\,\frac{d^8x}{dt^8}+a_{8,\varphi_1}\,\frac{d^8\varphi_1}{dt^6}+a_{8,\varphi_2}\,\frac{d^8\varphi_2}{dt^8}+\\ +a_{6,x}\,\frac{d^6x}{dt^6}+a_{6,\varphi_1}\,\frac{d^6\varphi_1}{dt^6}+a_{6,\varphi_2}\,\frac{d^6\varphi_2}{dt^6}+\\ +a_{4,x}\,\frac{d^4x}{dt^4}+a_{4,\varphi_1}\,\frac{d^4\varphi_1}{dt^4}+a_{4,\varphi_2}\,\frac{d^4\varphi_2}{dt^4}=0,\end{gathered} \tag{3.3}$$

причем коэффициенты этого уравнения связаны с параметрами механической системы формулами

$$\begin{gathered}a_{8,x}=M+m_1+m_2,\quad a_{8,\varphi_1}=-m_1\,l_1,\quad a_{8,\varphi_2}=-m_2\,l_2,\\ a_{6,x}=(\Omega_1^2+\Omega_2^2)(M+m_1+m_2),\quad a_{6,\varphi_1}=-(\Omega_1^2+\Omega_2^2)\,m_1\,l_1,\quad a_{6,\varphi_2}=-(\Omega_1^2+\Omega_2^2)\,m_2\,l_2,\\ a_{4,x}=\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,(M+m_1+m_2),\quad a_{4,\varphi_1}=-\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,m_1\,l_1,\quad a_{4,\varphi_2}=-\Omega_1^2\,\Omega_2^2\,m_2\,l_2.\end{gathered}$$

Полученное дифференциальное уравнение порядка $2s+4$ можно трактовать как неголономную связь порядка $2s+4$, наложенную на движение механической системы. Другими словами, если рассматриваемая механическая система движется под действием управления, найденного с помощью принципа максимума Понтрягина, то в процессе этого движения непрерывно выполняется неголономная связь порядка $2s+4$. Поэтому наличие связи высокого порядка, вытекающей из минимизации функционала (2.1) с помощью применения принципа максимума Понтрягина, позволяет рассматривать задачу определения управляющей силы, обеспечивающей гашение колебаний, как некоторую задачу неголономной механики со связями высокого порядка. В связи с этим представляется целесообразным попытаться решать эту же механическую задачу, опираясь на теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка, развитую в монографиях [4–8] и кратко изложенную в статье [9]. Согласно этой теории при наличии связи порядка $2s+4$ можно составить уравнение порядка $2s+2$ относительно реакции этой связи. Таким образом, если рассматривать связь порядка $2s+4$ как некоторую программу движения, которую должна выполнять механическая система, то реакция этой связи оказывается управляющей силой, обеспечивающей выполнение заданной программы. Следовательно, в общем случае безразмерное дифференциальное уравнение (3.1) порядка $2s+2$ относительно безразмерного управления u можно трактовать как дифференциальное уравнение относительно реакции связи.

Но если мы продолжаем пользоваться теорией движения неголономных систем со связями высокого порядка, то естественно вместо минимизации функционала (2.1) с помощью принципа максимума Понтрягина воспользоваться вариационным принципом, свойственным этой теории. Таковым принципом является обобщенный принцип Гаусса, изложенный в статьях [10, 11]. Применению этого принципа к решению поставленной нами задачи при $s=2$ посвящен ряд следующих пунктов.

4. Уравнения движения тележки с двумя маятниками ($s=2$) в главных координатах. В частном случае при $s=2$ из системы уравнений (1.2) получаем

$$M\ddot{x} - m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 = F, \quad M = m + m_1 + m_2,$$
$$\ddot{x} - l_1 \ddot{\varphi}_1 = \mathrm{g}\varphi_1, \quad \ddot{x} - l_2 \ddot{\varphi}_2 = \mathrm{g}\varphi_2.$$

Обратим внимание на то, что здесь первое уравнение Лагранжа второго рода отражает теорему о движении центра масс:

$$M\ddot{x}_c = F, \quad x_c = x - \frac{\sum_{\sigma=1}^{2} m_\sigma l_\sigma \varphi_\sigma}{M}. \tag{4.1}$$

Поэтому абсциссу центра масс x_c можно принять за одну из главных размерных координат рассматриваемой механической системы.

Выражая $\ddot{x}$ из первого уравнения системы (4.1) и подставляя во второе и третье, получим

$$\begin{aligned} l_1\ddot{\varphi}_1 + \mathrm{g}\varphi_1 &= \frac{F}{M} + \frac{m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1}{M} + \frac{m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2}{M}, \\ l_2\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{g}\varphi_2 &= \frac{F}{M} + \frac{m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1}{M} + \frac{m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2}{M}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Вводя параметры

$$\alpha = \frac{l_2}{l_1}, \quad \beta = \frac{m_1}{M}, \quad \gamma = \frac{m_2}{M}, \quad \mathrm{k}^2 = \frac{\mathrm{g}}{l_1},$$

систему (4.2) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
(1-\beta)\ddot{\varphi}_1 - \gamma\alpha\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{k}^2\varphi_1 &= \frac{F}{Ml_1},\\
-\beta\ddot{\varphi}_1 + \alpha(1-\gamma)\ddot{\varphi}_2 + \mathrm{k}^2\varphi_2 &= \frac{F}{Ml_1}.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Теперь систему (4.3) можно рассматривать как линейную систему двух дифференциальных уравнений относительно неизвестных φ_1, φ_2, которую желательно записать в главных координатах. Следуя, например, учебнику [1], получим

$$
\begin{aligned}
\ddot{\xi}_1 + \Omega_1^2\xi_1 &= \frac{F(1+a_2)}{\alpha\gamma Ml_1(a_1-a_2)},\\
\ddot{\xi}_2 + \Omega_2^2\xi_2 &= \frac{F(1+a_1)}{\alpha\gamma Ml_1(a_2-a_1)},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

где

$$
a_\nu = \frac{\beta\lambda_\nu^2}{1-\alpha(1-\gamma)\lambda_\nu^2}, \quad \nu = 1, 2.
$$

В уравнениях (4.4) размерные собственные частоты Ω_ν, $\nu = 1, 2$, вычисляются по формулам

$$
\Omega_\nu^2 = \mathrm{k}^2\lambda_\nu^2, \quad \nu = 1, 2,
$$

$$
\lambda_{1,2}^2 = \frac{1+\alpha-\beta-\alpha\gamma \mp \sqrt{(1+\alpha-\beta-\alpha\gamma)^2 - 4\alpha(1-\beta-\gamma)}}{2\alpha(1-\beta-\gamma)}.
$$

Таким образом, уравнение (4.1) и система (4.4) являются искомыми уравнениями в главных размерных координатах x_c, ξ_1 и ξ_2. Целесообразно перейти в них к безразмерной переменной $x_0 = x_c/l_1$ и к безразмерному времени $\tau = \Omega_1 t$, а также положить

$$
x_1 = \frac{\alpha\gamma(a_1-a_2)}{1+a_2}\,\xi_1, \quad x_2 = \frac{\alpha\gamma(a_2-a_1)}{1+a_1}\,\xi_2.
$$

В результате будем иметь

$$
\begin{cases}
x_0'' = u,\\
x_\sigma'' + \omega_\sigma^2 x_\sigma = u, \quad \sigma = 1, 2.
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

Здесь штрихи соответствуют производным по безразмерному времени τ и

$$
u = \frac{F}{M\mathrm{g}\lambda_1^2}, \quad \omega_\sigma = \frac{\Omega_\sigma}{\Omega_1}, \quad \sigma = 1, 2.
$$

Таким образом, построенная система дифференциальных уравнений (4.5) в безразмерных главных координатах является частным случаем системы уравнений (1.3) при $s = 2$.

Система (4.5) должна интегрироваться при граничных условиях

$$
\begin{aligned}
x_0(0) = x_0'(0) = 0, \quad x_\sigma(0) = x_\sigma'(0) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \quad T = \Omega_1\,\widetilde{T},\\
x_0(T) = a \equiv \frac{S}{l_1}, \quad x_0'(T) = 0, \quad x_\sigma(T) = x_\sigma'(T) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

В пункте 3 с помощью принципа максимума Понтрягина было получено безразмерное управление u в виде формулы (2.5). При $s = 2$ оно имеет вид

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + C_3\cos\omega_1\tau + C_4\sin\omega_1\tau + C_5\cos\omega_2\tau + C_6\sin\omega_2\tau. \qquad (4.7)$$

Подставив управление (4.7) в интегралы Дюамеля (2.6), из удовлетворения граничным условиям (4.6) при $\tau = T$ получим шесть линейных алгебраических неоднородных уравнений для нахождения коэффициентов C_σ, $\sigma = \overline{1,6}$.

5. Численные расчеты для случая использования принципа максимума Понтрягина. Поставленная краевая задача (4.5), (4.6) является линейной, поэтому ее решение линейно зависит от величины a. Не умаляя общности, можно положить $a = 1$. Тогда решение зависит от двух безразмерных параметров

$$\frac{T}{T_2} \quad \text{и} \quad \frac{T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 — безразмерные периоды колебаний, соответствующих первой и второй ненулевым собственным частотам. Так как $\omega_1 = 1$, то $T_1 = 2\pi$, в свою очередь $T_2 = 2\pi/\omega_2$.

Рассмотрим два случая движения:

$$T = T_2 \quad \text{и} \quad T = 16\,T_2, \quad \text{при этом} \quad T_2 = 0.5\,T_1. \qquad (5.1)$$

Используя интегралы Дюамеля (2.6), после подстановки в них функции (4.7) из удовлетворения граничным условиям (4.6) при $\tau = T$ получим для рассматриваемых случаев движения (5.1) следующие значения произвольных постоянных в формуле (4.7):

$$T = T_2\ :$$
$$C_1 = 2174.6, \quad C_2 = -1384.4, \quad C_3 = -2102.12,$$
$$C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = 400.01\,;$$
$$T = 16\,T_2\ :$$
$$C_1 = 0.0024, \quad C_2 = -0.0001, \quad C_3 = 0,$$
$$C_4 = -0.0002, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = -0.0001.$$

Результаты расчетов, полученные с учетом этих значений, представлены ниже на рис. 2 и 3 штриховыми линиями.

6. Решение задачи ($s = 2$) с использованием обобщенного принципа Гаусса. В предыдущей статье [9] кратко было изложено содержание обобщенного принципа Гаусса. Напомним, что первоначально он был предложен в небольшой работе М. А. Чуева [12], а затем позже независимо от нее в строгом изложении был представлен в статьях [10, 11].

Как было показано в статье [9], обобщенный принцип Гаусса в случае задания линейных неголономных связей порядка $n + 2$ записывается в виде обобщенного принципа Гаусса n-го порядка

$$\delta^{(n+2)} Z_{(n)} = 0, \qquad (6.1)$$

где введено обозначение

$$Z_{(n)} = \frac{M}{2}\left(\overset{(n)}{\mathbf{W}} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{Y}}}{M}\right)^2. \qquad (6.2)$$

В формулах (6.1), (6.2) индекс n обозначает порядок производной по времени от вектора, а индекс $(n+2)$ указывает на то, что частный дифференциал вычисляется при фиксированных $t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma, ..., \overset{(n+1)}{q^\sigma}$. При использовании принципа (6.1) должны быть заданы начальные условия

$$\Lambda_\varkappa(t_0) = \Lambda_\varkappa^0, \quad \dot{\Lambda}_\varkappa(t_0) = \dot{\Lambda}_\varkappa^0, \quad \dots \quad , \quad \overset{(n-3)}{\Lambda_\varkappa}(t_0) = \overset{(n-3)}{\Lambda_\varkappa{}^0},$$
$$q^\sigma(t_0) = q_0^\sigma, \qquad \dot{q}^\sigma(t_0) = \dot{q}_0^\sigma, \qquad \varkappa = \overline{1,k}, \quad \sigma = \overline{1,s}.$$

Минимизируемый по величине вектор $\overrightarrow{\Re} \equiv \overset{(n)}{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}_{(n)} = M\overset{(n)}{\mathbf{W}} - \overset{(n)}{\mathbf{Y}}$ можно назвать условно «реакцией» линейных неголономных связей порядка $n+2$. Составление уравнений движения согласно второй теории движения неголономных систем со связями высокого порядка базируется именно на применении обобщенного принципа Гаусса.

В статье [9] (подробнее см. в монографиях [4–8]) было показано, что при использовании понятия касательного пространства к многообразию всех положений механической системы, которые она может иметь в данный момент времени, уравнения Лагранжа второго рода при наличии связей можно представить в виде одного векторного уравнения

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}, \tag{6.3}$$

где в случае тележки с двумя маятниками

$$M\mathbf{W} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} a_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\,\tau}\, \mathbf{e}^\sigma, \quad \mathbf{Y} = -\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} c_{\sigma\tau}\, q^\tau\, \mathbf{e}^\sigma, \quad \mathbf{R} = \sum_{\sigma=1}^{3} R_\sigma\, \mathbf{e}^\sigma,$$
$$q^1 = \varphi_1, \quad q^2 = \varphi_2, \quad q^3 = x.$$

Здесь $\mathbf{e}^\sigma$, $\sigma = \overline{1,3}$, являются векторами взаимного базиса, введенными в касательном пространстве. Отметим, что искомое управление u, удовлетворяющее программе движения, заданной в виде дифференциального уравнения (3.3), можно рассматривать как реакцию линейной неголономной связи восьмого порядка. Поэтому в уравнении (6.3) вектор, соответствующий наличию управления u, обозначен буквой $\mathbf{R}$, которая обычно используется в неголономной механике для обозначения вектора реакции связи. Обратим особое внимание на то, что применительно к нашей задаче управляемого движения этот вектор можно представить в виде

$$\mathbf{R} = u(t)\,\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \sum_{\sigma=1}^{3} b_\sigma\, \mathbf{e}^\sigma,$$

где числа b_1, b_2, b_3 задаются технической реализацией конкретного устройства, создающего реальную управляющую силу.

Применим теперь вместо принципа максимума Понтрягина обобщенный принцип Гаусса. При наличии связи восьмого порядка (3.3) он утверждает, что

$$\delta^{(8)}\left(M\,\frac{d^6\mathbf{W}}{dt^6} - \frac{d^6\mathbf{Y}}{dt^6}\right)^2 = 0. \tag{6.4}$$

Здесь символ $\delta^{(8)}$ обозначает, что варьируются лишь восьмые производные от обобщенных координат. Согласно принципу (6.4) линейная связь восьмого порядка (3.3) является идеальной, если ее «реакция» $\overrightarrow{\Re} \equiv \mathbf{R}_{(8)}$ оказывается минимальной, то есть если минимальной оказывается величина

$$(\overrightarrow{\Re})^2 \equiv \left(\mathbf{R}_{(8)}\right)^2 = \left(M\,\frac{d^6\mathbf{W}}{dt^6} - \frac{d^6\mathbf{Y}}{dt^6}\right)^2. \tag{6.5}$$

Из всех возможных линейных неголономных связей восьмого порядка выделим такое подмножество, для элементов которого величина $(\overrightarrow{\Re})^2 \equiv \left(\mathbf{R}_{(8)}\right)^2$ совпадает со своей нижней границей, равной нулю. Всем этим элементам, как это следует из выражения (6.5), соответствует единственное уравнение

$$\frac{d^6 u}{dt^6} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{6} C_k t^{k-1}. \tag{6.6}$$

В отличие от управления, задаваемого формулой (4.7), управление, отыскиваемое в виде полинома (6.6), не будет иметь осцилляций, соответствующих собственным частотам системы, что является его большим преимуществом.

Отметим, что с помощью другого подхода управление в виде полинома было получено Г. В. Костиным и В. В. Сауриным [13, 14].

7. Расчеты (при $s = 2$) в случае использования обобщенного принципа Гаусса и анализ численных результатов, полученных двумя различными методами. Проведем с помощью обобщенного принципа Гаусса два расчета, соответствующих двум случаям движения (5.1). Значения произвольных постоянных C_k, $k = \overline{1,6}$, в управлении (6.6) при каждом конкретном значении безразмерного времени движения T находятся совершенно аналогично тому, как это делалось при определении произвольных постоянных для решения (4.7), полученного ранее при использовании принципа максимума Понтрягина. В результате для найденного с помощью обобщенного принципа Гаусса управления (6.6) получим значения:

$$\begin{gathered}
T = T_2\ : \\
C_1 = 78.876, \quad C_2 = -693.61, \quad C_3 = 1492.85, \\
C_4 = -1248.86, \quad C_5 = 445.03, \quad C_6 = -56.663\,; \\
T = 16\,T_2\ : \\
C_1 = 0, \quad C_2 = 0.00034, \quad C_3 = 0, \\
C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = 0.
\end{gathered}$$

На рис. 2 и 3 графически представлены результаты двух расчетов, полученных двумя разными методами. Решения, полученные с помощью принципа максимума Понтрягина, изображены на рисунках штриховыми кривыми, а решениям, полученным с привлечением обобщенного принципа Гаусса, соответствуют сплошные линии.

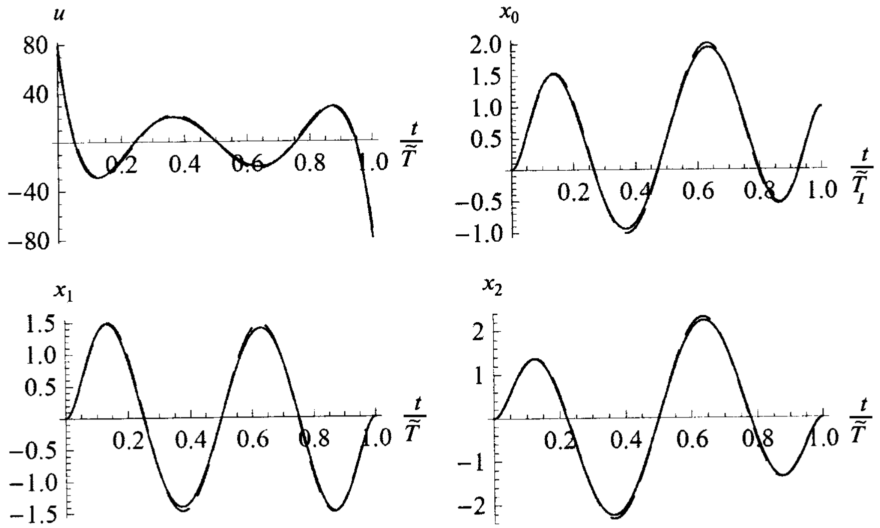

Рис. 2. Кратковременное движение механической системы, $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$.

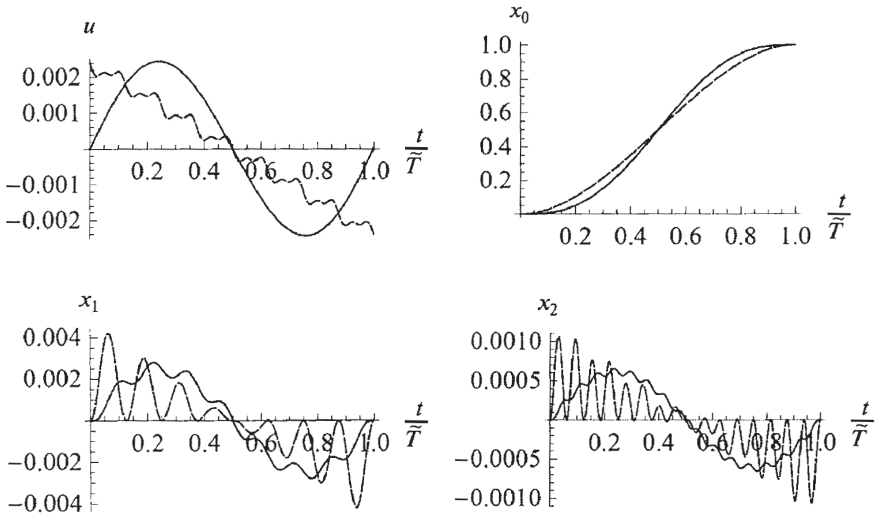

Рис. 3. Длительное движение механической системы, $T = 16\,T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$.

Из сравнения этих случаев движения и графиков рис. 2 и 3 видно, что при кратковременном движении (при времени перемещения тележки, близком к периоду второй формы колебаний, см. рис. 2) решения, полученные обоими методами, практически совпадают, что показывает хорошую работоспособность предложенного нового метода решения поставленной краевой задачи, использующего обобщенный принцип Гаусса. В то же время оказывается, что при длительном движении (в нашем случае при $T = 16\,T_2$, см. рис. 3) результаты, полученные разными методами, различаются весьма значительно. Это различие можно объяснить тем, что управление, полученное с помощью принципа максимума Понтрягина, как отмечалось выше, содержит гармоники с собственными частотами системы, что вводит систему в резонанс. В то же время управление, созданное с применением обобщенного принципа Гаусса, задается полиномом, что обеспечивает сравнительно плавное движение системы.

Интересно обратить внимание еще на одно обстоятельство — применение принципа максимума Понтрягина всегда создает скачки управляющей силы в начале и в конце движения. Если же используется обобщенный принцип Гаусса, то при длительном времени движения подобные скачки исчезают.

Поэтому возникает вопрос, нельзя ли с помощью обобщенного принципа Гаусса удалить скачки управления и при кратковременном движении системы. Этому вопросу посвящен следующий пункт.

8. Расширенная (обобщенная) краевая задача. Рассмотрим задачу об устранении скачков управления с помощью обобщенного принципа Гаусса и в случае кратковременного движения. Для этого надо потребовать обращения в нули ускорений тележки в начале и в конце движения (в силу выполнения граничных условий (1.1) и уравнений движения (1.2) тогда одновременно обращаются в нули и ускорения всех точек системы при любом значении s):

$$\ddot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(\widetilde{T}) = 0.$$

Теперь при формулировке нашей задачи при $s = 2$ в главных координатах к граничным условиям (4.6) добавятся краевые условия

$$x_0''(0) = 0, \quad x_0''(T) = 0. \tag{8.1}$$

Сформулированную граничную задачу (4.5), (4.6), (8.1) назовем расширенной (обобщенной) краевой задачей первого порядка.

Отметим, что решить сформулированную расширенную (обобщенную) краевую задачу с применением принципа максимума Понтрягина невозможно, так как полученное с его помощью управление будет содержать количество неизвестных произвольных постоянных, недостаточное для удовлетворения всех поставленных граничных условий. В отличие от этого применить к сформулированной расширенной краевой задаче обобщенный принцип Гаусса можно, для этого достаточно увеличить его порядок на две единицы.

Тогда будет отыскиваться минимум выражения

$$(\overrightarrow{\Re})^2 \equiv \left(\mathbf{R}_{(10)}\right)^2 = \left(M\,\frac{d^8\mathbf{W}}{dt^8} - \frac{d^8\mathbf{Y}}{dt^8}\right)^2, \tag{8.2}$$

а, в свою очередь, минимум выражения (8.2), равный нулю, достигается при выполнении дифференциального уравнения

$$\frac{d^8 u}{dt^8} = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{8} C_k t^{k-1}. \tag{8.3}$$

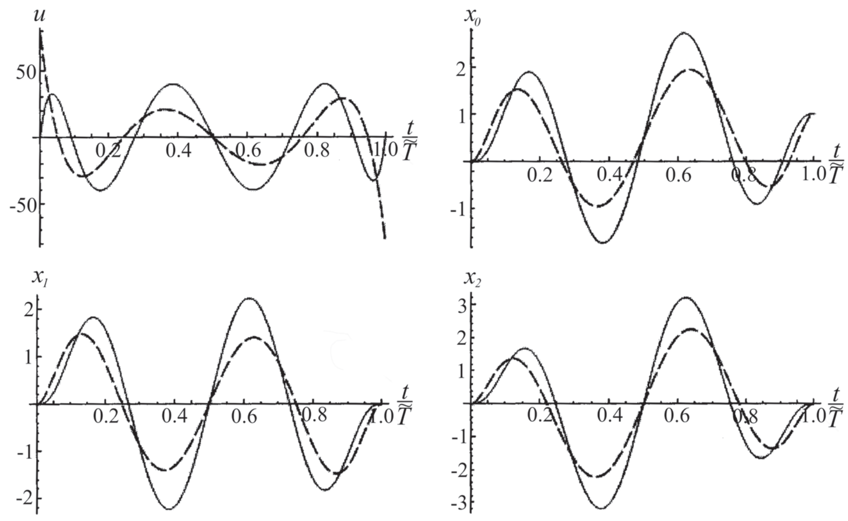

Рис. 4. Сравнение решений по Гауссу, соответствующих расширенной и обычной краевым задачам, при $T = T_2$, $T_2 = 0.5\,T_1$.

Значения произвольных постоянных C_k, $k = \overline{1,8}$, получим из удовлетворения граничных условий (4.6) при $\tau = T$ и при выполнении $x_0''(0) = 0$. При этом легко заметить, что $C_1 = 0$, так как в силу первого уравнения в (4.5) и дополнительного граничного условия $x_0''(0) = 0$ получаем, что $u(0) = 0$. Поэтому вместо (8.3) имеем

$$u(t) = \sum_{k=2}^{8} C_k t^{k-1},$$

и для нахождения имеющихся здесь неизвестных коэффициентов достаточно выполнить лишь граничные условия при $\tau = T$.

После взятия интегралов и решения линейной алгебраической неоднородной системы уравнений седьмого порядка, получим следующие численные значения:

$$\begin{gathered} T = T_2\ : \\ C_1 = 0, \quad C_2 = 669.77, \quad C_3 = -4266.12, \quad C_4 = 8837.38, \\ C_5 = -8337.44, \quad C_6 = 3958.27, \quad C_7 = -922.054, \quad C_8 = 83.8568. \end{gathered} \tag{8.4}$$

Вычисляя частное решение системы дифференциальных уравнений (4.5), соответствующее нулевым начальным условиям, в виде интегралов Дюамеля при значениях (8.4), получим графики, представленные на рис. 4. Здесь штриховые линии соответствуют полученному ранее решению с помощью обобщенного принципа Гаусса для обычной краевой задачи, а сплошные — для сформулированной в данном пункте расширенной краевой задачи. Как видно из графика безразмерного управления, действительно удалось устранить скачки управляющей силы в начале и в конце движения системы.

9. Особые точки решений. Построение аналитического решения. Как показывают расчеты, результаты движения механической системы под действием

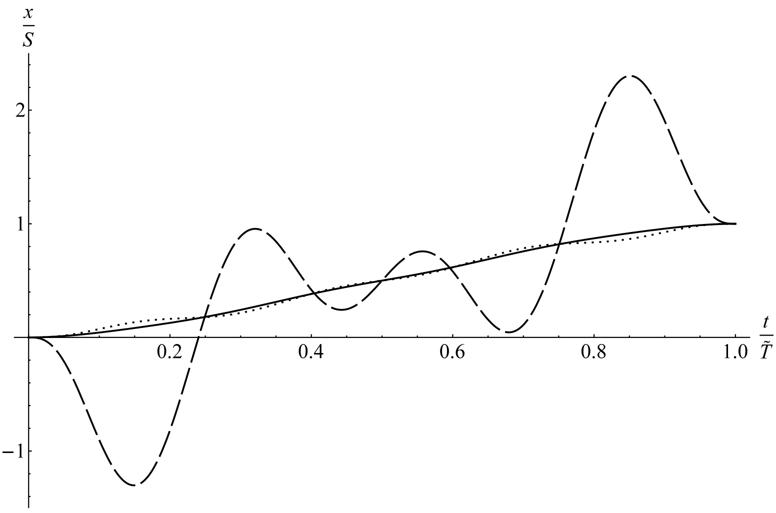

Рис. 5. Сравнение решений по Гауссу, соответствующих заданию различных краевых задач, $T = 4.02\,\pi$, $\omega_2 = 1.734\,\omega_1$.

управления, полученного в результате решения обобщенной краевой задачи, существенно зависят от безразмерного параметра $K = T/T_1$. Оказалось, что существует счетное множество таких значений параметра K, при приближении к которым в системе развиваются интенсивные колебания. Эти значения K назовем особыми точками решений расширенных краевых задач.

В качестве примера рассмотрим гашение колебаний тележки с двумя маятниками при следующих значениях безразмерных параметров:

$$l_2/l_1 = 1/5, \quad m_1/M = 2/3, \quad m_2/M = 1/12, \quad \omega_2 \equiv \Omega_2/\Omega_1 = 1.734, \quad T = 4.02\,\pi. \tag{9.1}$$

Движение тележки, измеренное в долях S, полученное с помощью обобщенного принципа Гаусса в случае решения обыкновенной краевой задачи, представлено на рис. 5 плавной сплошной линией. В то же время в результате решения задачи при тех же параметрах (9.1) в случае постановки расширенной краевой задачи получаем движение тележки, представленное на рис. 5 штриховой линией. Как мы видим, в этом случае, хотя и достигается поставленная задача о гашении колебаний, но при этом в системе развиваются интенсивные колебания тележки с большими размахами. Такое неожиданное поведение тележки объясняется тем, что принятым значениям параметров (9.1) соответствует значение $K = 2.01$, близкое к величине первой особой точки, равной $K = 2.01265$.

Определить управление движением тележки, которое является аналитической функцией времени при всех значениях параметра K, предлагается следующим образом.

Решение расширенной краевой задачи первого порядка обозначим через $u_1(\tau)$. Оно имеет свои особые точки. Наряду с этой задачей поставим еще более сложную расширенную краевую задачу второго порядка, в которой дополнительно задается, что у тележки в начале и в конце пути производная и от ускорения по времени равна нулю. Решение этой задачи обозначим через $u_2(\tau)$. Это новое решение также будет иметь свои особые значения параметра K, но они будут отличны от особых значений предыдущего решения. Тогда при любых значениях параметра μ функция

$$u(\tau) = u_1(\tau) + \mu(u_2(\tau) - u_1(\tau)) \tag{9.2}$$

будет решением рассматриваемой задачи. Избежать вычисления особых значений решений u_1 и u_2 и построить аналитическое решение, непрерывно зависящее от параметра K, позволяет определить параметр μ из условия минимальности интеграла от квадрата функции $u(\tau)$ за время перемещения T. Это решение соответствует следующему значению параметра μ:

$$\begin{gathered} \mu = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_3 - 2J_2}, \\ J_1 = \int_0^T u_1^2(\tau)\, d\tau, \quad J_2 = \int_0^T u_1(\tau) u_2(\tau)\, d\tau, \quad J_3 = \int_0^T u_2^2(\tau)\, d\tau. \end{gathered} \tag{9.3}$$

Решение, полученное с помощью формул (9.2) и (9.3) при задании параметров (9.1), представлено на рис. 5 пунктирной линией.

10. Заключение. В работе показано, что при решении задачи о переводе за заданное время механической системы с конечным числом степеней свободы из одного фазового состояния в другое управляющую силу можно отыскивать в виде полинома от времени, количество неизвестных коэффициентов которого равно числу граничных условий, отражающих конечное фазовое состояние системы. Для устранения возможных скачков управления в начале и в конце движения можно сформулировать и решить расширенную краевую задачу первого порядка. В случае движения системы вблизи особой точки решения расширенной краевой задачи аналитическое выражение управления без особых точек можно построить как линейную комбинацию решений расширенных краевых задач первого и второго порядков. Перспективным представляется применение для рассмотренных задач обобщенного принципа Гамильтона — Остроградского [15].

Подчеркнем, что в работе сравнивается использование двух совершенно различных методов для решения одной и той же задачи о нахождении управляющей силы, переводящей механическую систему за указанное время из имеющегося фазового состояния в новое заданное фазовое состояние. В первом методе используется теория управления, и искомая сила строится с помощью принципа максимума Понтрягина для минимизации вводимого функционала, отражающего квадрат искомой управляющей силы. А во втором методе решение этой же задачи получают с помощью метода неголономной механики при наличии связей высокого порядка, опирающегося на использование обобщенного принципа Гаусса. В этом случае вообще не рассматривается никакого функционала, а требуется минимизация для каждого момента времени величины условной «реакции» связи (минимизация для каждого момента времени величины соответствующей производной от искомой реакции идеальной неголономной связи высокого порядка).

Применение предложенной теории к гашению колебаний упругих систем представлено в статье [16] и в монографии [17]. Развитие метода и его использование для ряда других механических задач можно проследить по работам [18–37].

Литература

1. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985.; М.: Высшая школа, 2000; М.: Юрайт, 2012, 2015.

2. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.

3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

4. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Наука; Физматлит, 2005.

5. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009.

6. *Зегжда С. А., Юшков М. П., Солтаханов Ш. Х., Шатров Е. А.* Неголономная механика и теория управления. М.: Наука; Физматлит, 2018.

7. *Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления (Перевод на китайский язык). Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2007.

8. *Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., Zegzhda S. A.* Mechanics of non-holonomic systems. A new class of control systems. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

9. *Юшков М. П.* Постановка и решение обобщенной задачи Чебышёва. I // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 680–701.

10. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 6. С. 1328–1330.

11. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Линейные преобразования сил и обобщенный принцип Гаусса // Вестн. Ленингр. ун-та. 1984. № 1. С. 73–79.

12. *Чуев М. А.* К вопросу аналитического метода синтеза механизма // Изв. вузов. Машиностроение. М.: Изд-во МВТУ им. Н. Э. Баумана. 1974. № 8. С. 165–167.

13. *Костин Г. В., Саурин В. В.* Интегродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Доклады Академии наук. 2005. Т. 404, № 5. С. 535–538.

14. *Костин Г. В., Саурин В. В.* Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Доклады Академии наук. 2006. Т. 408, № 6. С. 750–753.

15. *Zegzhda S. A., Tovstik P. E., Yushkov M. P.* The Hamilton — Ostrogradskii generalized principle and its application for damping of oscillations // Doklady Physics. 2012. Vol. 57, no. 11. P. 447–450.

16. *Солтаханов Ш. Х.* Гашение колебаний консоли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2009. Вып. 4. С. 105–112.

17. *Солтаханов Ш. Х.* Определение управляющих сил при наличии связей высокого порядка. М.: Наука; Физматлит, 2014.

18. *Zegzhda S., Yushkov M., Soltakhanov Sh., Naumova N., Shugaylo T.* A novel approach to suppression of oscillations // ZAMM (Zeitschrift für angew. Math. und Mech.). 2018. Vol. 98. Iss. 5. P. 781–788.

19. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х.* Применение обобщенного принципа Гаусса к решению задачи о гашении колебаний механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 20–25.

20. *Зегжда С. А., Юшков М. П.* Смешанная задача динамики // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 5. С. 628–630.

21. *Зегжда С. А.* Применение обобщенного оператора Лагранжа при неголономных связях высокого порядка // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1998. Вып. 2 (№ 8). С. 76–77.

22. *Зегжда С. А., Гаврилов Д. Н.* Гашение колебаний упругого тела при его перемещении // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 3. С. 73–83.

23. *Зегжда С. А., Шатров Е. А., Юшков М. П.* Новый подход к нахождению управления, переводящего систему из одного фазового состояния в другое // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 2. С. 286–295.

24. *Зегжда С. А., Шатров Е. А., Юшков М. П.* Гашение колебаний тележки с двойным маятником с помощью управления ее ускорением // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 683–688.

25. *Шатров Е. А.* Использование главных координат в задаче о гашении колебаний тележки с двумя маятниками // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1 (59). Вып. 4. С. 619–623.

26. *Солтаханов Ш. Х.* Об обобщенном представлении управляющих сил, обеспечивающих заданную программу движения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1990. Вып. 2 (№ 8). С. 70–75.

27. *Солтаханов Ш. Х.* Об одном видоизменении принципа Поляхова — Зегжды — Юшкова // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1990. Вып. 4 (№ 22). С. 58–61.

28. *Солтаханов Ш. Х.* Сравнительный анализ уравнений движения неголономных систем, вытекающих из принципа Поляхова — Зегжды — Юшкова и Нордхайма — Долапчиева (принципа Манжерона — Делеану) // Сб.: Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы. Пермь. 1997. С. 136–148.

29. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Применение обобщенного принципа Гаусса для составления уравнений движения систем с неголономными связями третьего порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1990. Вып. 3 (№ 15). С. 77–83.

30. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1991. Вып. 4 (№ 22). С. 26–29.

31. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Определение минимальной производной от добавочной силы, обеспечивающей заданную программу движения // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 1993. Вып. 1 (№ 1). С. 97–101.

32. *Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Определение векторной структуры реакций связей высокого порядка // Теоретическая механика. 1996. Вып. 22. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. С. 30–34.

33. *Юшков М. П.* Уравнения движения машинного агрегата с вариатором как неголономной системы с нелинейной связью второго порядка // Мех. тверд. тела. 1997. № 4. С. 40–44.

34. *Додонов В. В., Юшков М. П.* Нахождение управляющего момента, переводящего твердое тело из одного углового состояния в другое, с помощью минимизации различных функционалов // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник трудов в 4 томах. Т. 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 199–200.

35. *Солтаханов Ш. Х., Шугайло Т. С., Юшков М. П.* Применение обобщенного принципа Гаусса для гашений колебаний груза портального крана с выделением движения системы как твердого тела // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник трудов в 4 томах. Т. 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 271–273.

36. *Фазлыева К. М., Шугайло Т. С.* Управление гашением колебаний трехмассовой системы при горизонтальном движении // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2018–2019 гг. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2019. С. 56–67.

37. *Shugaylo T. S., Yushkov M. P.* Motion control of a gantry crane with a container // The Eighth Polyakhov's Reading. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. Art. no. 030021.

Статья поступила в редакцию 13 марта 2020 г.;
после доработки 5 мая 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Юшков Михаил Петрович — проф.; yushkovmp@mail.ru

Formulation and solution of a generalized Chebyshev problem. II

M. P. Yushkov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Yushkov M. P. Formulation and solution of a generalized Chebyshev problem. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 714–733. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.412 (In Russian)

This work is a continuation of the article “Formulation and solution of a generalized Chebyshev problem. I”, in which a generalized Chebyshev problem was formulated, two theories of motion for non-holonomic systems with high-order constraints were presented for its solution. These theories were used to study the motion of the Earth's satellite when fixing the magnitude of its acceleration (this was equivalent to imposing a linear non-holonomic constraint of the third order). In the offered article, the second theory, based on the application of the generalized Gauss principle, is used to solve one of the most important problems of control theory: finding the optimal control force that translates a mechanical system with a finite number of degrees of freedom from one phase state to another in a specified time. The application of the theory is demonstrated by solving a model problem of controlling the horizontal motion of a cart bearing the axes of s mathematical pendulums. Initially, the problem is solved by applying the Pontryagin maximum principle, which minimizes the functional of the square of the desired horizontal control force, which transfers the mechanical system from a state of rest to a new state of rest in the specified time with the horizontal displacement of the cart by S (that is, the problem of vibration damping is considered). Let's call this approach the first method of solving the control problem. It is shown that a linear non-holonomic constraint of the order $(2s + 4)$ is continuously performed. This suggests applying the second theory of motion for non-holonomic systems with high-order constraints to the same problem (see the previous article), developed at the Department of Theoretical and Applied Mechanics of the Faculty of Mathematics and Mechanics of Saint Petersburg State University. Let's call this approach the second method of solving the problem. Calculations performed for the case of $s = 2$ showed that the results obtained by the both methods are practically the same for a short-term motion of the system, while they differ sharply for a long-term motion. This is because the control found using the first method contains harmonics with the system's natural frequencies, which tends to bring the system into resonance. With a short-term motion, this is not noticeable, and with a long-term motion, there are large fluctuations in the system. In contrast, when using the second method, the control is in the form of a polynomial in time, which provides a relatively smooth motion of the system. In addition, in order to eliminate the control force jumps at the beginning and end of the motion, we propose to solve a generalized boundary value problem and discuss some special cases that sometimes occur when using the second method for solving the boundary value problem.

Keywords: non-holonomic mechanics, high-order constraints, Pontryagin maximum principle, generalized Gauss principle, control, suppression of oscillation, generalized boundary problem.

References

1. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., *Theoretical mechanics* (Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1985; Vysshaya shkola Publ., Moscow, 2000; Urait, Moscow, 2012, 2015). (In Russian)

2. Chernous'ko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N., *Control of the vibrations* (Nauka Publ., Moscow, 1980). (In Russian)

3. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F., *Mathematical theory of optimal processes* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 1983). (In Russian)

4. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Motion equations of non-holonomic systems and varitional principles of mechanics. New class of control problems* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 2005). (In Russian)

5. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Non-holonomic mechanics. Theory and applications* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 2009). (In Russian)

6. Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Soltakhanov Sh. Kh., Shatrov E. A., *Non-holonomic mechanics and control theory* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 2018). (In Russian)

7. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Motion equations of non-holonomic systems and varitional principles of mechanics. New class of control problems* (Chinese translation, Beijing Institute of Technology Press, Beijing, 2007).

8. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., Zegzhda S. A., *Mechanics of non-holonomic systems. A new class of control systems* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009).

9. Yushkov M. P., “Formulation and solution of a generalized Chebyshev problem. I”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics.* **52** (4), 436–451 (2019).

10. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., “The extension of Gauss’ principle to the case of high-order nonholonomic systems”, *Doklady Akademii Nauk SSSR* **269**, issue 6, 1328–1330 (1983). (In Russian)

11. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., “Linear transformations of forces and a generalized Gauss principle”, *Vestnik of Leningrad University.* Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy, issue 1, 73–79 (1984). (In Russian)

12. Chuev M. A., “The analytical method for the synthesis of mechanism”, *Proceedings of higher educational instutions. Machine Building* **8**, 165–167 (MGTU named after N. E. Bauman Press, Moscow, 1974). (In Russian)

13. Kostin G. V., Saurin V. V., “Integro-differential approach to solving the problems of linear elasticity theory”, *Doklady Akademii Nauk* **404** (5), 535–538 (2005). (In Russian)

14. Kostin G. V., Saurin V. V., “Modelling and optimization of motion of elastic systems by the method of integro-differential relations”, *Doklady Akademii Nauk* **408** (6), 750–753 (2006). (In Russian)

15. Zegzhda S. A., Tovstik P. E., Yushkov M. P., “The Hamilton — Ostrogradskii generalized principle and its application for damping of oscillations”, *Doklady Physics* **57** (11), 447–450 (2012)

16. Soltakhanov Sh. Kh., “Suppression of the cantilever’s vibration”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Ser. 1.* Mathematics. Mechanics. Astronomy, issue 4, 105–112 (2009). (In Russian)

17. Soltakhanov Sh. Kh., *Determinztions of control forces with high order constraints* (Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 2014). (In Russian)

18. Zegzhda S., Yushkov M., Soltakhanov Sh., Naumova N., Shugaylo T., “A novel approach to suppression of oscillations”, *ZAMM (Zeitschrift für angew. Math. und Mech.)* **98**, issue 5, 781–788 (2018).

19. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., “Application of the generalized Gaussian principle to the problem of damping vibrations of mechanical systems”, *Journal of computer and systems sciences international* **49** (2), 186–191 (2010). (In Russian)

20. Zegzhda C. A., Yushkov M. P., “Mixed problem of dynamics”, *Doklady Akademii Nauk* **374** (5), 628–630 (2000). (In Russian)

21. Zegzhda S. A., “Application of a generalized Lagrange operator for nonholonomic high-order constraints”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2 (8), 76–77 (1998). (In Russian)

22. Zegzhda S. A., Gavrilov D. N., “Suppression of vibration of an elastic body during its motion”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 3, 73–83 (2012). (In Russian)

23. Zegzhda S. A., Shatrov E. A., Yushkov M. P., “A new approach to finding the control transporting a system from one phase state to another”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2, 286–295 (2016). (In Russian)

24. Zegzhda S. A., Shatrov E. A., Yushkov M. P., “Suppression of oscillation of a trolley with a double pendulum by means of control of its acceleration”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, **3** (61), issue 4, 683–688 (2016). (In Russian)

25. Shatrov E. A., “The use of master coordinates in the problem of damping the vibration of a trolley with two pendulums”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 4, 619–623 (2014). (In Russian)

26. Soltakhanov Sh. Kh., “Generalized representation of control forces providing the given program of motion”, *Vestnik of St. Petersburg Univ. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2 (8), 70–75 (1990). (In Russian)

27. Soltakhanov Sh. Kh., “About one modification of the Polyakhov — Zegzhda — Yushkov principle”, *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechsanics. Astronomy*, issue 4 (22), 58–61 (1990). (In Russian)

28. Soltakhanov Sh. Kh., “Comparative analysis of equations of motion of nonholonomic systems based on the principle of Polyakhov — Zegzhda — Yushkov and Nordheim — Dolapchiev (the Mangeron — Deleanu principle)”, *Proceedings: Problems of the control mechanics. Nonlinear dynamic systems. Perm*, 136–148 (1997). (In Russian)

29. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., “The application of a generalized Gauss principle to generating the equations of motion of systems with the third-order nonholonomic constraints”, *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 3 (15), 77–83 (1990). (In Russian)

30. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., “Equations of motion of a nonholonomic system with second-order constraint”, *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 4 (22), 26–29 (1991). (In Russian)

31. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., “Determination of a minimal derivative of additional force providing a given program motion”, *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 1 (1), 97–101 (1993). (In Russian)

32. Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., “Determination of a vector structure of high-order constraint reactions”, *Theoretical mechanics*, issue 22, 30–34 (MGTU named after N. E. Bauman Press, Moscow, 1996). (In Russian)

33. Yushkov M. P., “Motion equations of a machine unit with a variator as a nonholonomic system with a nonlinear second-order constraints”, *Solid mechanics* (4), 40–44 (1997). (In Russian)

34. Dodonov V. V., Yushkov M. P., “Determination of a control moment transferring a rigid body from one angular coordinate position to another by means of minimization of different functionals”, *XII All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics: Proceedings in 4 volumes. Ufa: RITS BashGU* **1**, 199–200 (2019). (In Russian)

35. Soltakhanov Sh. Kh., Shugaylo T. S., Yushkov M. P., “Applying the generalized Gauss principle to damping the vibration of a cargo carried by a bridge crane with the motion phase as one of a rigid body”, *XII All-Russian Congress on fundamental problems of theoretical and applied mechanics: Proceedings in 4 volumes. Ufa: RITS BashGU* **1**, 271–273 (2019). (In Russian)

36. Fazlyeva K. M., Shugaylo T. S., “Control of the damping the vibration of a three-mass system during its horizontal motion”, *Proceedings of the seminar “Computer methods in the continuum mechanics” 2018–2019*, 56–67 (St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press, 2019). (In Russian)

37. Shugaylo T. S., Yushkov M. P., “Motion control of a gantry crane with a container”, *The Eighth Polyakhov’s Reading. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings* **1959**, 030021 (2018).

Received: March 13, 2020
Revised: May 5, 2020
Accepted: June 18, 2020

Author’s information:

Mikhail P. Yushkov — yushkovmp@mail.ru

ХРОНИКА

18 марта 2020 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН выступила кандидат физ.-мат. наук, доцент Е. Н. Поляхова (СПбГУ) с докладом на тему «Об опубликованных и запланированных книгах по истории механики (Л. Эйлер, А. Н. Крылов, Ф. А. Цандер)».

Краткое содержание доклада:

В докладе освещаются две базовые темы: 1. история естественных наук (математика, физика, астрономия, небесная механика) по материалам исследований развития классической и небесной механики, 2. хронология отечественной космонавтики и астродинамики по работам советского инженера в области ракетостроения Фридриха Артуровича Цандера (1886–1933). По теме 1 отмечается выход книги докладчика о роли петербургских математиков с добавлением сводки работ А. Н. Крылова по «Второй Луне Эйлера» и по его переводу «Principia» Ньютона. Тема Эйлера задана книгой с участием докладчика о судьбе эйлеровского учебника естественных наук. По теме 2 обсуждаются задачи астродинамики, поставленные лично Ф. А. Цандером: гравитационный околопланетный маневр при межпланетном перелете и проблема полета с солнечным парусом.