

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14

MSC 70F07, 70F15

**Поверхность минимальной скорости
в ограниченной круговой задаче трех тел****К. В. Холшевников^{1,2}, В. Б. Титов¹*¹ Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт прикладной астрономии РАН,

Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

Для цитирования: Холшевников К. В., Титов В. Б. Поверхность минимальной скорости в ограниченной круговой задаче трех тел // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 4. С. 734–742.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.413>

В рамках ограниченной круговой задачи трех тел введено понятие поверхности минимальной скорости \mathcal{S} , являющейся модификацией поверхности нулевой скорости (поверхности Хилла). Поверхность Хилла обязана своим существованием интегралу Якоби. Поверхность минимальной скорости, кроме интеграла Якоби, требует сохранения секторной скорости тела нулевой массы в проекции на плоскость движения главных тел. Иными словами, должен существовать еще один из трех интегралов площадей. Показано, что этот интеграл существует для динамической системы, полученной после однократного осреднения первоначальной системы по долоте главных тел. Исследованы свойства \mathcal{S} . Приведем наиболее существенное. Множество возможных движений тела нулевой массы, ограниченное поверхностью \mathcal{S} , компактно. В качестве примера рассмотрены поверхности \mathcal{S} для четырех малых спутников Плутона в рамках осредненной задачи Плутон — Харон — малый спутник. Во всех четырех случаях \mathcal{S} представляет топологический тор малого сечения с окружностью в плоскости движения главных тел в качестве осевой линии.

Ключевые слова: ограниченная круговая задача трех тел, поверхность нулевой скорости, область допустимых движений.

1. Введение. Одной из интересных конструкций, относящихся к качественной небесной механике, является поверхность нулевой скорости \mathfrak{S} (ограничивающая

*Работа выполнена с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Вычислительный центр» при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-02-00552).

множество возможных движений \mathfrak{T} тела нулевой массы) в ограниченной круговой задаче трех тел, введенная Дж. Хиллом в 1878 г. Геометрически поверхность Хилла представляет собой проекцию 5-мерной поверхности уровня интеграла Якоби на трехмерное конфигурационное пространство. Свойства \mathfrak{S} подробно изучены [1, 2]. Известно несколько обобщений этого понятия [3]. Мы предлагаем еще одно: поверхность минимальной скорости \mathcal{S} . Ее использование позволяет наложить существенно более жесткие ограничения на множество возможных движений \mathcal{T} тела нулевой массы. В частности, при типичных значениях параметров поверхность \mathcal{S} (а с ней и \mathcal{T}) ограничена и весьма узка, в отличие от \mathfrak{S} , которая всегда содержит неограниченное подмножество. С другой стороны, \mathcal{S} существует только в задаче, осредненной по долготам главных тел и потому обладающей дополнительной симметрией.

2. Осредненная ограниченная круговая задача трех тел. Рассмотрим ограниченную круговую задачу трех тел-точек Q_1 массы m_1 , Q_2 массы m_2 и Q нулевой массы; $0 < m_2 \leq m_1$. Пусть главные тела описывают кеплеровы окружности вокруг барицентра O с угловой скоростью (средним движением) ω .

Движение Q рассмотрим в инерциальной системе отсчета с началом в барицентре O и ориентированной плоскостью xy , совпадающей с ориентированной плоскостью движения главных тел. Обозначим расстояния Q_1Q_2 , OQ_1 , OQ_2 , Q_1Q , Q_2Q , OQ через c , c_1 , c_2 , r_1 , r_2 , r . По законам задачи двух тел имеем

$$c_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}c, \quad c_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}c, \quad c = c_1 + c_2, \quad \omega = \sqrt{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}c^{-3/2},$$

где \mathcal{G} — постоянная тяготения. Координаты точек Q_s в функции времени t за счет выбора начальной эпохи можно положить равными

$$Q_1 = (-c_1 \cos \omega t, -c_1 \sin \omega t, 0), \quad Q_2 = (c_2 \cos \omega t, c_2 \sin \omega t, 0).$$

Координаты точки Q , как обычно, обозначаем через $Q = (x, y, z)$.

Кинетическая энергия и силовая функция единицы массы точки Q в поле главных тел равны

$$T = \frac{v^2}{2}, \quad V = V_1 + V_2, \quad V_s = \frac{\mathcal{G}m_s}{r_s}, \quad s = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь v — скорость точки Q ,

$$r_1^2 = (x + c_1 \cos \omega t)^2 + (y + c_1 \sin \omega t)^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - c_2 \cos \omega t)^2 + (y - c_2 \sin \omega t)^2 + z^2.$$

Функции (1) имеют период $P = 2\pi/\omega$ по времени, поэтому допустимо применить к нашей динамической системе метод осреднения. Именно, заменим V, V_s на их средние значения W, W_s по явно входящему времени. По определению имеем

$$W_1 = \frac{\mathcal{G}m_1}{P} \int_0^P \frac{dt}{r_1}. \quad (2)$$

Интеграл (2) известен со времен Гаусса [4]. Повторим его краткий вывод. Представим r_1^2 в форме

$$r_1^2 = r^2 + c_1^2 + 2c_1(x \cos \omega t + y \sin \omega t) = r^2 + c_1^2 + 2c_1\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\omega t - \xi),$$

где ξ не зависит от времени явно. Замена переменных $\omega t - \xi = 2\tau$ в интеграле (2) дает

$$W_1 = \frac{\mathcal{G}m_1}{\pi} \int_{-\xi/2}^{\pi-\xi/2} \frac{d\tau}{r_1}.$$

Подынтегральная функция имеет период π по τ и пределы интегрирования можно заменить на 0 и π . В результате приходим к полному эллиптическому интегралу

$$W_1 = \frac{2\mathcal{G}m_1\mathbf{K}(k_1)}{\pi\sqrt{r^2 + c_1^2 + 2c_1\sqrt{x^2 + y^2}}}. \quad (3)$$

Здесь

$$k_1^2 = \frac{4c_1\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2 + c_1^2 + 2c_1\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (4)$$

причем

$$0 \leq k_1 \leq 1. \quad (5)$$

Равенство слева достигается только на оси z (при $x^2 + y^2 = 0$), справа — только на особой окружности (при $x^2 + y^2 = c_1^2, z = 0$).

Без труда устанавливаем, что W_2 дается формулами (3)–(5) при замене индекса 1 на 2.

Определяемая функциями T, W система автономна и зависит от x, y только посредством $x^2 + y^2$. Поэтому она обладает двумя интегралами: энергии и площадей

$$W - \frac{v^2}{2} = h, \quad (6)$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \sigma. \quad (7)$$

Ниже считаем $h > 0$, что отвечает отрицательной полной энергии тела Q , при которой возможны ограниченные движения.

Замечание. Нередко кроме осреднения по долготам главных тел выполняют и осреднение по долготе тела нулевой массы [5, 6]. Но для наших целей это излишне.

3. Поверхность минимальной скорости. По неравенству Буняковского — Коши из (7) следует

$$\sigma^2 \leq (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(x^2 + y^2) \leq v^2(x^2 + y^2). \quad (8)$$

Отсюда и из интеграла (6) вытекает $W \geq \sigma^2/2(x^2 + y^2) + h$, что нам удобнее записать в виде

$$F(x, y, z) \geq 0 \quad (9)$$

при

$$F(x, y, z) = W - \frac{\sigma^2}{2(x^2 + y^2)} - h. \quad (10)$$

Соотношение (9) показывает, что точка Q всегда находится в компакте $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^3$, граница которого $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ имеет уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \quad (11)$$

Назовем \mathcal{S} поверхностью минимальной скорости.

Замечание. Ограниченность замкнутого множества $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^3$ доказана ниже, так что оно компактно.

4. Свойства кривой минимальной скорости. Обозначим через \mathcal{T}^* , \mathcal{S}^* сечения \mathcal{T} , \mathcal{S} плоскостью xy . Наша динамическая система допускает плоские движения $z = 0$. Поэтому \mathcal{T}^* с границей \mathcal{S}^* определяет компакт возможных движений, если начальные положение и скорость точки Q лежат в плоскости xy .

Кривая \mathcal{S}^* задается тем же уравнением (11), где W и $F(x, y, 0) = F^*(r)$ зависят только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$k_s^2 = \frac{4c_s r}{(r + c_s)^2}, \quad W_s = \frac{2\mathcal{G}m_s \mathbf{K}(k_s)}{\pi(r + c_s)}, \quad F^* = W_1 + W_2 - \frac{\sigma^2}{2r^2} - h. \quad (12)$$

Приведем значения k_s , W_s , F^* в ключевых точках, включая бесконечно удаленную.

Таблица 1. Значения k_s , W_s , F в ключевых точках

r	0	c_1	c_2	∞
k_1^2	0	1	$\frac{4c_1 c_2}{c^2}$	0
k_2^2	0	$\frac{4c_1 c_2}{c^2}$	1	0
W_1	$\frac{\mathcal{G}m_1}{c_1}$	∞	$\frac{2\mathcal{G}m_1 \mathbf{K}(k_1(c_2))}{\pi c}$	0
W_2	$\frac{\mathcal{G}m_2}{c_2}$	$\frac{2\mathcal{G}m_2 \mathbf{K}(k_2(c_1))}{\pi c}$	∞	0
F	$-\infty$	∞	∞	$-h$

Соотношения (12) и данные табл. 1 позволяют установить следующие свойства \mathcal{T}^* и \mathcal{S}^* .

1. Множества \mathcal{T}^* и \mathcal{S}^* ограничены.
2. Лежащая в круге $r < c_1$ часть \mathcal{S}^* состоит из нечетного числа окружностей, и потому не пуста. То же верно для области $r > c_2$.
3. Кольцо $c_1 < r < c_2$ содержит четное число окружностей.

При

$$\min_{c_1 < r < c_2} \left(W(r) - \frac{\sigma^2}{2r^2} \right) > h \quad (13)$$

это число равно нулю, и тогда в \mathcal{T}^* содержится кольцо $c_1 \leq r \leq c_2$.

Если неравенство (13) не выполняется, соответствующая часть \mathcal{S}^* содержит не менее двух окружностей.

Замечание. Кратному корню уравнения $F^*(r) = 0$ сопоставляем равное кратности число совпадающих окружностей.

5. Свойства поверхности минимальной скорости. Установим основные свойства \mathcal{T} и \mathcal{S} в пространственном случае.

1. \mathcal{S} и \mathcal{T} симметричны относительно плоскости xy .
2. \mathcal{S} — поверхность вращения вокруг оси z .
3. \mathcal{S} и \mathcal{T} ограничены.

Действительно, если $r \rightarrow \infty$, то $k_s \rightarrow 0$, $W_s \rightarrow 0$, $F \rightarrow -h$. Поэтому \mathcal{S} и \mathcal{T} не содержат точек вне шара достаточно большого радиуса.

4. Поверхность \mathcal{S} состоит из конечного множества непересекающихся и не вложенных друг в друга топологических торов. Компакт \mathcal{T} состоит из конечного множества непересекающихся топологических полноторий.

По свойству 2 полное представление о поверхности \mathcal{S} дает ее сечение \mathcal{S}_* плоскостью xz .

6. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу Плутона (Q_1) — Харон (Q_2) — малый внешний (по отношению к Харону) спутник (Q). Предварительно введем принятую в ограниченной задаче трех тел систему единиц:

единица расстояния: $c = c_1 + c_2$;
 единица времени: $\sqrt{c^3/(\mathcal{G}m_1 + \mathcal{G}m_2)}$.

В этих единицах

$$c = \omega = 1, \quad c_1 = \mathcal{G}m_2, \quad c_2 = \mathcal{G}m_1,$$

а \mathcal{T} и \mathcal{S} задаются соотношениями (9), (11) при

$$F(x, y, z) = \frac{2c_2\mathbf{K}(k_1)}{\pi\sqrt{r^2 + c_1^2 + 2c_1\sqrt{x^2 + y^2}}} + \frac{2c_1\mathbf{K}(k_2)}{\pi\sqrt{r^2 + c_2^2 + 2c_2\sqrt{x^2 + y^2}}} - \frac{\sigma^2}{2(x^2 + y^2)} - h. \quad (14)$$

Замечание. Функция (10) содержит 6 параметров: $m_1, m_2, c_1, c_2, \sigma, h$. Независимых параметров только 3: c_1, σ, h , как показывает представление (14) с учетом $c_2 = 1 - c_1$.

Используя данные работы [7], получим значения необходимых параметров:

$$c_1 = 0.10854, \quad c_2 = 0.89146.$$

Различающиеся для разных спутников постоянные h и σ соберем в табл. 2.

Таблица 2. Значения h и σ для внешних спутников

Спутник	Стикс	Никта	Кербер	Гидра
h	0.22635	0.20274	0.16963	0.15086
σ	1.49409	1.57688	1.72182	1.82464

На рис. 1 приведены торы для внешних спутников Плутона. Спутники находятся в меридиональных сечениях соответствующих торов, эти сечения — черные окружности, отдельно сечения приведены на рис. 2–5. Торы выделены цветами: бирюзовым — для Гидры, синим — для Кербера, зеленым — для Никты и красным — для Стикса. Ось x проходит через начальные положение Плутона и Харона. Пространственная структура поверхностей из-за очень малой «толщины» торов просматривается плохо, но поскольку поверхности минимальной скорости являются поверхностями вращения, то полную картину можно получить, нарисовав меридиональные сечения. Такие сечения приведены на рис. 2–5. В этих сечениях меридиан выбирается так, что в нем оказывается и соответствующий спутник, который отмечен на этих рисунках кружками соответствующего цвета. Стикс, Никта и Кербер находятся почти на своих поверхностях \mathcal{S} . Это объясняется тем, что их орбиты мало отличаются от плоских круговых, поэтому практически весь момент скорости приходится на его z -составляющую, т. е. на σ . Иными словами, неравенство (9) почти не отличается от равенства. Черная окружность, объемлющая сечение, мало отличается от самого сечения, таким образом, топологические торы поверхностей минимальной скорости являются торами и в общепринятом смысле. Что касается

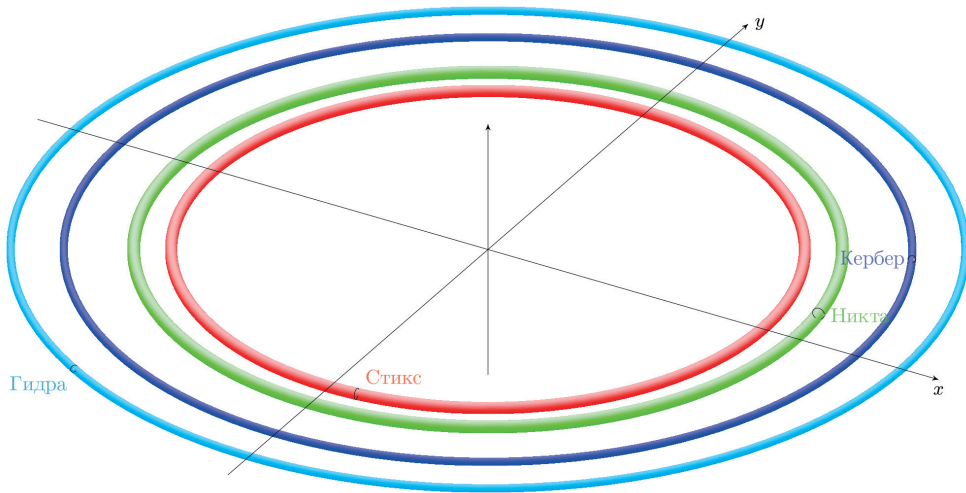


Рис. 1. Поверхности S для четырех малых спутников Плутона.

Таблица 3. Размеры колец вокруг c_1 и c_2

	Полуширина кольца $c_1 = 0.10854$	Полуширина кольца $c_2 = 0.89146$	Значение F на границах
Стикс	$1.53253 \cdot 10^{-16}$	$6.7100 \cdot 10^{-7}$	$0.9 \cdot 10^{-5}$
Никта	$2.49513 \cdot 10^{-18}$	$1.9904 \cdot 10^{-8}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$
Кербер	$1.07711 \cdot 10^{-21}$	$1.9934 \cdot 10^{-11}$	$0.8 \cdot 10^{-6}$
Гидра	$2.91671 \cdot 10^{-24}$	$8.6971 \cdot 10^{-14}$	$0.3 \cdot 10^{-7}$

Таблица 4. Размеры поверхностей нулевой скорости для внешних спутников Плутона (корни $F^*(r)$, $r_* < r < r^*$)

	r_*	r^*
Стикс	2.154184	2.234821
Никта	2.410331	2.497633
Кербер	2.911059	2.965172
Гидра	3.278759	3.333529

поверхностей, включающих Плутона и Харона, то, хотя они всегда присутствуют, их размеры настолько малы (порядка метров!), что их на рисунках нет.

Заметим, что окружность c_1 содержится в слое между двумя окружностями, соответствующими корням функции $F^*(r)$. Один корень меньше c_1 , второй больше, но они отличаются от c_1 на величины порядка 10^{-16} , то есть с точностью до десятков метров совпадают с c_1 . То же относится и к c_2 (может, поэтому большие планеты и выметают всякие обломки). Таким образом, при $r < c_1$ имеем один корень $c_1 - 0$, между c_1 и c_2 — два корня $c_1 + 0$ и $c_2 - 0$, а при $r > c_2$ имеем три корня: $c_2 + 0$ и два корня, которые и определяют область возможного движения, впрочем тоже не очень большую. Размеры торов, определяемые корнями функции $F^*(r)$, приводятся в табл. 4. В табл. 3 приведены также полуширины колец возможного движения,

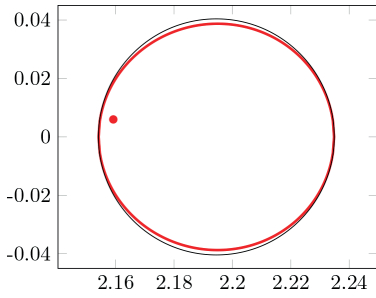


Рис. 2. Меридиональное сечение тора для Стикса.

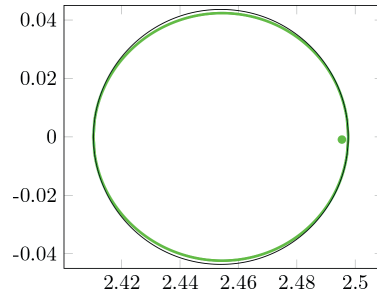


Рис. 3. Меридиональное сечение тора для Никты.

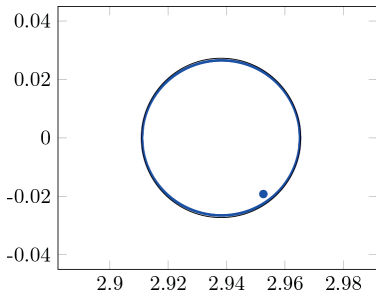


Рис. 4. Меридиональное сечение тора для Кербера.

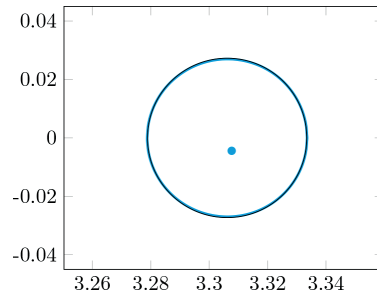


Рис. 5. Меридиональное сечение тора для Гидры.

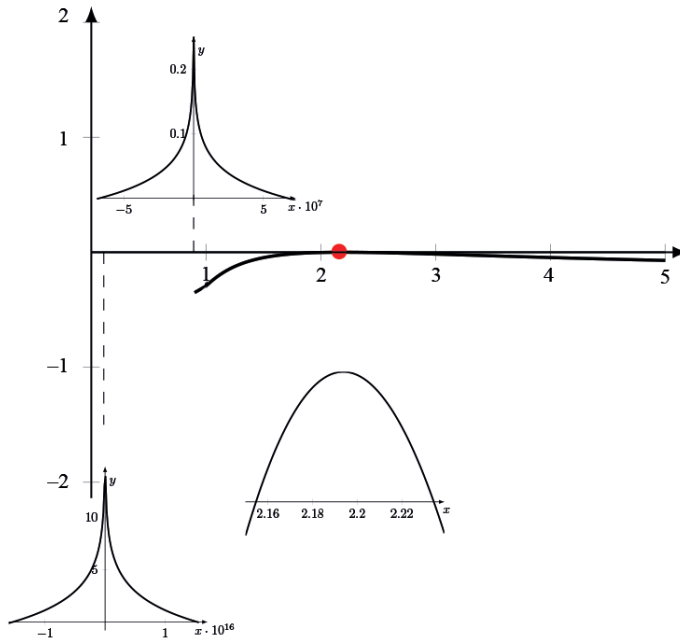


Рис. 6. Функция $F^*(x)$ для Стикса.

включающих окружности Плутона ($c_1 = 0.10854$) и Харона ($c_2 = 0.89146$). Толщина самого большого кольца (Стикс, кольцо Харона) порядка десятков метров!

На рис. 6 изображена функция $F^*(r)$ для Стикса. Ее корни определяют области возможного движения $F^*(r) \geq 0$. На промежутке $[0.9, 5.0]$ есть только два корня, 2.154184 и 2.234821, в этом промежутке движение возможно, в увеличенном виде этот отрезок показан справа внизу. Пара корней, обрамляющая c_2 , имеет полуширину порядка $6.67 \cdot 10^{-7}$, полуширина области, содержащей окружность c_1 , еще меньше — порядка $1.53 \cdot 10^{-16}$. Поведение $F^*(r)$ в окрестностях c_s в увеличенном масштабе показано в верхней и нижней частях рисунка. Напомним, что $F^*(c_s) = \infty$. Остальные спутники (Никта, Кербер, Гидра) имеют другие константы h и σ , но поведение функции $F^*(r)$ для них остается качественно таким же.

Литература

1. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.
2. *Себедей В.* Теория орбит. М.: Наука, 1982.
3. *Лукьянов Л. Г., Ширмин Г. И.* Лекции по небесной механике: Учеб. пособ. для вузов. Алматы: Эверо, 2009.
4. *Антонов В. А., Никифоров И. И., Холшевников К. В.* Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2008.
5. *Vashkovjak M. A.* On the stability of circular asteroid orbits in an N -planetary system // *Celest. Mech.* 1976. Vol. 13. P. 313–324.
6. *Вашковьяк М. А.* Метод вычисления вековых возмущений астероидных орбит // *Космич. исслед.* 1986. Vol. 24, № 4. С. 513–526.
7. *Brozović M., Showalter M. R., Jacobson R. A., Buie M. W.* The orbits and masses of satellites of Pluto // *Icarus.* 2015. Vol. 246. P. 317–329.

Статья поступила в редакцию 15 марта 2020 г.;
после доработки 28 марта 2020 г.;
рекомендована в печать 18 июня 2020 г.

Контактная информация:

Холшевников Константин Владиславович — д-р физ.-мат. наук, проф.; kvk@astro.spbu.ru
Титов Владимир Борисович — канд. физ.-мат. наук, доц.; tit@astro.spbu.ru

Minimal velocity surface in the restricted circular Three-Body-Problem

K. V. Kholshevnikov^{1,2}, *V. B. Titov*¹

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Institute of Applied Astronomy RAS,
10, nab. Kutuzova, St. Petersburg, 191187, Russian Federation

For citation: Kholshevnikov K. V., Titov V. B. Minimal velocity surface in the restricted circular Three-Body-Problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 4, pp. 734–742. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.413> (In Russian)

In the framework of the restricted circular Three-Body-Problem, the concept of the minimum velocity surface S is introduced, which is a modification of the zero-velocity surface (Hill surface). The existence of Hill surface requires occurrence of the Jacobi integral. The minimum velocity surface, other than the Jacobi integral, requires conservation of the sector velocity of a zero-mass body in the projection on the plane of the main bodies motion.

In other words, there must exist one of the three angular momentum integrals. It is shown that this integral exists for a dynamic system obtained after a single averaging of the original system by longitude of the main bodies. Properties of \mathcal{S} are investigated. Here is the most significant. The set of possible motions of the zero-mass body bounded by the surface \mathcal{S} is compact. As an example the surfaces \mathcal{S} for four small moons of Pluto are considered in the framework of the averaged problem Pluto — Charon — small satellite. In all four cases, \mathcal{S} represents a topological torus with small cross section, having a circumference in the plane of motion of the main bodies as the center line.

Keywords: restricted circular Three-Body-Problem, zero velocity surface, region of feasibility.

References

1. Subbotin M. F., *Introduction to theoretical astronomy* (Nauka Publ., Moscow, 1968). (In Russian)
2. Szebehely V., *Theory of orbits* (Academic Press, New York, London, 1967).
3. Lukianov L. G., Shirmin G. I., *Lectures on celestial mechanics* (Evero Publ., Almaty, 2009). (In Russian)
4. Antonov V. A., Nikiforov I. I., Kholshchevnikov K. V., *Theory of gravitational potential elements, and several cases of its explicit expression* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2008). (In Russian)
5. Vashkovjak M. A., “On the stability of circular asteroid orbits in an N -planetary system”, *Celest. Mech.* **13**, 313–324 (1976). <https://doi.org/10.1007/BF01228649>
6. Vashkovjak M. A., “Method for calculating secular perturbations of asteroid orbits”, *Cosmic Research* **24** (4), 513–526 (1986). (In Russian)
7. Brozović M., Showalter M. R., Jacobson R. A., Buie M. W., “The orbits and masses of satellites of Pluto”, *Icarus* **246**, 317–329 (2015).

Received: March 15, 2020

Revised: March 28, 2020

Accepted: June 18, 2020

Authors' information:

Konstantin V. Kholshchevnikov — kvk@astro.spbu.ru

Vladimir B. Titov — tit@astro.spbu.ru