МАТЕМАТИКА

УДК 519.2
MSC 60E05, 62E10, 62G32

О некоторых соотношениях, связывающих экспоненциальные и геометрические рекордные случайные величины*

С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ананьевский С. М., Невзоров В. Б.* О некоторых соотношениях, связывающих экспоненциальные и геометрические рекордные случайные величины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 3–11. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.101

В ряде областей человеческой деятельности фиксируются различные рекордные достижения. Часто при этом происходит некоторая дискретизация получаемых результатов наблюдений с различной точностью (до секунды, до метра, до тысячи индивидуумов). На примере экспоненциальных и геометрических распределений показано, как такого рода переход от непрерывных к дискретным вероятностным распределениям меняет число рекордных значений в соответствующих последовательностях случайных величин.

Ключевые слова: экспоненциальные распределения, геометрические распределения, рекордные моменты, рекордные величины, слабые рекорды.

1. Определения и обозначения. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных (н. о. р.) случайных величин (с. в.) $X_1, X_2, \ldots$ Часто приходится, наряду с такой последовательностью, иметь дело с различными рекордными величинами, определения которых и результаты для которых можно найти в многочисленных публикациях, например в монографиях [1–4]. Выделим здесь два следующих типа рекордов. Верхние рекордные моменты $L(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и верхние рекордные величины $X(1) < X(2) < \ldots$ задаются соотношениями

$$L(1) = 1, \quad X(1) = X_1, \quad L(n) = \min\{j > L(n-1) : X_j > X(n-1)\}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00393).

$$X(n) = X_{L(n)}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Слабые рекордные моменты $l(n)$ и слабые рекордные величины $\tilde{X}(n)$ определяются равенствами

$$l(1) = 1,\ \tilde{X}(1) = X_1, \quad l(n) = \min\{j > l(n-1) : X_j \geq X_{l(n)}\}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$
$$\tilde{X}(n) = X_{l(n)}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

т. е. в этом случае повторение (не обязательно превышение!) уже существующего на данный момент рекордного значения также фиксируется как очередной рекорд. Скажем, в ряде спортивных дисциплин спортсмен, повторивший рекордное достижение, объявляется сорекордсменом.

Если в соотношении (1) вместо неравенств $X_j > X(n-1)$ перейти к неравенствам $X_j < X(n-1)$, то будем уже иметь дело с так называемыми нижними рекордными моментами и нижними рекордными величинами. Аналогичная замена знака $\geq$ на знак $\leq$ в определениях (2) приводит к слабым нижним рекордным моментам и величинам.

Соотношения, полученные для верхних рекордов в последовательностях $X_1, X_2, \ldots$, сравнительно просто переформулировать в соответствующие результаты для нижних рекордных величин. Достаточно от исходных с. в. $X_1, X_2, \ldots$ перейти к последовательностям с. в. $Y_1 = -X_1, Y_2 = -X_2, \ldots$, заметив, что при каждом n верхнее рекордное значение $X(n)$ лишь знаком отличается от соответствующего нижнего рекорда в последовательности $Y_1, Y_2, \ldots$. Поэтому, если речь не идет о какой-то специальной ситуации, когда интерес представляют исключительно *нижние* рекордные величины, обычно ограничиваются исследованием различных схем, связанных с *верхними* рекордными моментами и *верхними* рекордными величинами, которые и называют, как правило, просто рекордными моментами и рекордными величинами.

В теории рекордов приходится использовать различные методы в ситуациях, когда исходные с. в. $X_1, X_2, \ldots$ имеют абсолютно непрерывные или дискретные распределения. Например, даже понятие слабых рекордов применимо только в случае дискретных распределений, когда равенства наблюдаемых значений двух каких-то с. в. из $X_1, X_2, \ldots$ имеют ненулевые вероятности.

Отметим, что если с. в. $X_1, X_2, \ldots$ имеют некоторую общую для них непрерывную функцию распределения (ф. р.) $F(x)$, преобразование Смирнова $U_1 = F(X_1), U_2 = F(X_2), \ldots$ переводит эти величины в с. в. $U_1, U_2, \ldots$, имеющие равномерное на интервале $[0, 1]$ распределение, а рекорды $X(1), X(2), \ldots, X(n), \ldots$ — в соответствующие рекордные значения $U(1) = U_1 < U(2) < \ldots < U(n) < \ldots$. В то же время преобразование $X_n = G(U_n), n = 1, 2, \ldots$, где $G(x)$ — функция, обратная некоторой непрерывной ф. р. $F(x)$, позволяет от равномерных рекордных значений $U(n)$ переходить к рекордам $X(n) = G(U(n))$ в последовательности $X_1, X_2, \ldots$, имеющих некоторую наперед заданную ф. р. $F(x)$.

Несмотря на то, что функции распределения рекордных величин $U(n)$ имеют сравнительно простой вид, работать с этими равномерными рекордами существенно сложнее, чем с экспоненциальными рекордными величинами. Дело в том, что экспоненциально $E(\lambda)$-распределенные с. в. $Z_1, Z_2, \ldots$, имеющие функцию распределения $H(x) = \max\{0, 1 - \exp(-x/\lambda)\}, \lambda > 0$, обладают удобным для работы с этими величинами свойством «отсутствия последействия», заключающемся в том, что

$$P\{Z_k \geq x + y | Z_k \geq x\} = P\{Z_k \geq y\},$$

что позволяет весьма эффективно использовать это свойство в теории порядковых статистик и в теории рекордов.

Аналогичное свойство в множестве дискретных распределений присуще геометрическим распределениям. Пусть Y имеет геометрическое $Geom(p)$-распределение с параметром $0 < p < 1$, т. е.

$$P\{Y = m\} = (1-p)p^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$P\{Y = n + m | Y \geq n\} = P\{Y = m\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Эти два семейства экспоненциальных и геометрических распределений объединяет не только характеризующее их упомянутое свойство отсутствия последействия. Дело в том, что геометрические случайные величины можно получить из экспоненциальных в результате вполне естественных преобразований. Например, если с. в. Z, имеющую $E(\lambda)$-распределение, представить в виде $Z = V + W$, где V и W — соответственно целая и дробная части Z, то получим, что

$$P\{V = m\} = P\{m \leq Z < m+1\} = \exp\{-m/\lambda\}(1 - \exp\{-1/\lambda\}), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. целая часть Z имеет $Geom(p)$-распределение с параметром $p = \exp(-1/\lambda)$.

Ниже рассмотрим ситуацию, когда значения экспоненциально распределенных случайных величин заменяются ближайшими к ним целыми числами. В результате такой процедуры округления также будем вместо экспоненциальных иметь дело с соответствующими геометрическими распределениями получаемых таким образом случайных величин. Представляет интерес вопрос, как указанная операция округления, применяемая к исходной последовательности экспоненциальных случайных величин и приводящая к их замене геометрически распределенными аналогами, влияет на изменение числа рекордов и сумм рекордных значений.

2. Вероятностная структура экспоненциальных и геометрических рекордов. В теории рекордов экспоненциальные и геометрические распределения выделяются простотой работы с ними. Приведем (см., например, работы [1–4]) три классических представления экспоненциальных и геометрических рекордных величин в виде сумм независимых случайных слагаемых, позволяющих применить для заведомо зависимых случайных величин, которыми являются рекордные, результаты, полученные для независимых величин.

Представление 1. *Пусть $Z(1) < Z(2) < \ldots < Z(n) < \ldots$ — верхние рекордные величины в последовательности независимых $E(\lambda)$-распределенных с. в. $Z_1, Z_2, \ldots$ Для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливы следующие равенства по распределению:*

$$\{Z(1), Z(2), \ldots, Z(n)\} \stackrel{d}{=} \{Z_1, Z_1 + Z_2, \ldots, Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n\} \tag{3}$$

и

$$\{Z(1), Z(2) - Z(1), \ldots, Z(n) - Z(n-1)\} \stackrel{d}{=} \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}. \tag{4}$$

Замечание. Видим, что в данной ситуации межрекордные приращения $Z(1), Z(2) - Z(1), Z(3) - Z(2), \ldots$ независимы и имеют такое же экспоненциальное распределение, как и исходные с. в. $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$.

Аналогичные соотношения получаем и в ситуации, когда имеем дело с геометрически распределенными величинами.

Представление 2. *Пусть* $Y(1) = Y_1 < Y(2) < \ldots < Y(n) < \ldots$ *являются строгими рекордными величинами в последовательности независимых с. в.* $Y_1, Y_2, \ldots,$ *имеющих геометрическое распределение с вероятностями*

$$P\{Y_k = m\} = (1-p)p^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда справедливы равенства

$$\{Y(1), Y(2), \ldots, Y(n)\} \stackrel{d}{=} \{Y_1, Y_1 + Y_2 + 1, \ldots, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n + (n-1)\} \tag{5}$$

и

$$\{Y(1), Y(2) - Y(1), \ldots, Y(n) - Y(n-1)\} \stackrel{d}{=} \{Y_1, Y_2 + 1, \ldots, Y_n + 1\}. \tag{6}$$

Результат, похожий на представление 2, справедлив и для слабых геометрических рекордных величин $y(1), y(2), \ldots.$

Представление 3. *Для геометрически распределенных случайных величин из представления 2 и соответствующих им слабых геометрических рекордных величин* $y(1) \leq y(2) \leq \ldots \leq y(n) \leq \ldots$ *при любом* $n = 1, 2 \ldots$ *справедливы соотношения*

$$\{(1), y(2), \ldots, y(n)\} \stackrel{d}{=} \{Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n\} \tag{7}$$

и

$$\{y(1), y(2) - y(1), \ldots, y(n) - y(n-1)\} \stackrel{d}{=} \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}. \tag{8}$$

Указанные свойства экспоненциальных и геометрических рекордов будут использованы ниже для получения некоторых новых соотношений, связывающих эти рекордные величины.

В работе [5] была рассмотрена следующая рекордная схема, в которой для простоты выкладок в качестве исходной последовательности брались с. в. $Z_1, Z_2, \ldots$ с ф. р.

$$H(x) = \max\{0, 1 - \exp\{-(x + 1/2)/\lambda\}\} \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty, \tag{9}$$

т. е. величины, сдвинутые на $\frac{1}{2}$ влево по сравнению с классическими неотрицательными $E(\lambda)$-экспоненциальными случайными величинами. В этом случае округление значений этих случайных величин $Y_k = [Z_k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ до ближайшего целого числа приводит к величинам, имеющим одинаковое геометрическое распределение с параметром $p = \exp(-1/\lambda)$. Действительно, получаем, что при любом $m = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы равенства

$$P\{Y_k = m\} = P\left\{m - \frac{1}{2} \leq Z_k < m + \frac{1}{2}\right\} = H\left(m + \frac{1}{2}\right) - H\left(m - \frac{1}{2}\right) = \\ = \exp(-m/\lambda)(1 - \exp(-1/\lambda)) = (1-p)p^m. \tag{10}$$

Учитывая этот сдвиг и внося необходимые уточнения в представление 1, получаем для рекордных величин $Z(1), Z(2), \ldots$ соотношения

$$\{Z(1), Z(2), \ldots, Z(n)\} \stackrel{d}{=} \left\{\lambda\nu_1 - \frac{1}{2}, \lambda(\nu_1 + \nu_2) - \frac{1}{2}, \ldots, \lambda(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n) - \frac{1}{2}\right\}, \tag{11}$$

где $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное $E(1)$-экспоненциальное распределение.

Для соответствующих этой конструкции геометрических рекордов $Y(1) < Y(2) < \ldots$ и слабых геометрических рекордов $y(1) \leq y(2) \leq \ldots$ остаются справедливыми упомянутые выше представления 2 и 3.

Отметим следующие выражения для математических ожиданий рекордных величин $Z(n)$, $Y(n)$ и $y(n)$:

$$EZ(n) = \lambda n - \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

$$EY(n) = np/(1-p), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

$$Ey(n) = np/(1-p), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

3. Рекорды в последовательностях округленных экспоненциальных случайных величин. Рассмотрим теперь набор с. в. $Z_1 = Z(1), Z_2, \ldots, Z_{L(2)} = Z(2)$ и соответствующие целочисленные округления этих величин $Y(1) = Y_1 = [Z_1], Y_2 = [Z_2], \ldots, Y_{L(2)} = [Z_{L(2)}]$. Нетрудно убедиться, что вторым верхним рекордом среди с. в. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{L(2)}$ может быть, но не обязана, только величина $Y_{L(2)}$. Найдем вероятность того, что она не является рекордным значением.

Зафиксируем $Z_1 = m + x$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$. В этом случае $Y(1) = Y_1 = m$. Значению $m + x$ соответствует плотность распределения

$$h(m+x) = \exp\{-(m + x + 1/2)/\lambda\}/\lambda.$$

В рассматриваемой конструкции $Z_{L(2)}$ — первая случайная величина среди $Z_1 = m + x, Z_2, \ldots$, значение которой больше $m + x$. Учитывая равенства

$$\begin{aligned} P\{Z_k \geq x + y | Z_k \geq x\} &= P\{Z_k \geq x + y\}/P\{Z_k \geq x\} = (1 - H(x+y))/(1 - H(x)) = \\ &= \exp\{-(x + y + 1/2)/\lambda\}/\exp\{-(x + 1/2)/\lambda\} = \exp\{-y/\lambda\} = P\{\lambda\nu_k \geq y\}, \end{aligned}$$

получаем, что условное распределение с. в. $Z(2)$ при фиксированном значении $Z(1) = m + x$ совпадает с распределением суммы $m + x + \lambda\nu$, где ν имеет $E(1)$-экспоненциальное распределение и не зависит от m и x. Отсюда следует, что если $Z_1 = m + x$, то $Y_{L(2)}$ не является рекордом, если имеет место событие $m + x \leq Z(2) < m + \frac{1}{2}$, условная вероятность которого при этом фиксированном значении Z_1 совпадает с вероятностью

$$P\left\{m + x + \lambda\nu < m + \frac{1}{2}\right\} = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - x\right)\Big/\lambda\right\}.$$

Следовательно, в этой ситуации вероятность того, что $Y_{L(2)}$ — рекорд, не зависит от m и равна $\exp\{-(\frac{1}{2} - x)/\lambda\}$, $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$.

Учитывая все возможные значения $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$, получаем, что $Y_{L(2)}$ может быть рекордной с вероятностью

$$P_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(\exp(1/\lambda) - 1), \tag{15}$$

а событие «$Y_{L(2)}$ не является рекордной величиной» имеет вероятность

$$P_2(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda}(\exp(1/\lambda) - 1). \tag{16}$$

В частности,

$$P_1(1) = 1/(e-1) = 0.5819\dots$$

и

$$P_2(1) = (e-2)/(e-1) = 0.4180\dots$$

Если зафиксировать $Z_1 = m + x$, то аналогично получим, что

$$P\left\{Y_{L(2)} = m | Z_1 = m + x\right\} = P\left\{m + x + \lambda\nu < m + \frac{1}{2}\right\} = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} - x\right)\right\} \tag{17}$$

и

$$P\{Y_{L(2)} = m + k | Z_1 = m + x\} = P\left\{m + k - \frac{1}{2} \le m + x + \lambda\nu < m + k + \frac{1}{2}\right\} =$$
$$= \exp\left(-\left(k - \frac{1}{2} - x\right)\Big/\lambda\right) - \exp\left(-\left(k + \frac{1}{2} - x\right)\Big/\lambda\right) =$$
$$= \exp\left(-\left(k - \frac{1}{2} - x\right)\Big/\lambda\right)\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - x\right)\Big/\lambda\right)\right),$$
$$k = 1, 2, \dots, \qquad -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Соотношение (18), учитывая, что в нем $Z_1 = m + x$, сводится к равенствам

$$P\{Y_{L(2)} - Y(1) = k | Z_1 = m + x\} =$$
$$= \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right)\exp\left(-\frac{k-1}{\lambda}\right)\Big/\left(\exp\left(-\left(\frac{1}{2} - x\right)\Big/\lambda\right)\right), \quad k = 1, 2, \dots \tag{19}$$

Из (19), учитывая все возможные значения Z_1, получаем, что

$$P\{Y_{L(2)} - Y(1) = k\} = \frac{1}{\lambda}\exp(-k/\lambda), \quad k = 1, 2, \dots. \tag{20}$$

Пусть $T(\lambda)$ обозначает сумму геометрических рекордных значений (одного или двух) в наборе с. в. $Y_1, Y_2, \dots, Y_{L(2)}$, а $A(\lambda) = ET(\lambda)$ представляет собой математическое ожидание этой суммы. Получаем, что

$$A(\lambda) = EY_1 + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\exp(-k/\lambda) = \frac{1}{(\exp(\frac{1}{\lambda}) - 1)} + \frac{\exp(\frac{1}{\lambda})}{\lambda(\exp(\frac{1}{\lambda}) - 1)^2} =$$
$$= (\lambda\exp(1/\lambda) - \lambda + \exp(1/\lambda))/\lambda(\exp(1/\lambda) - 1)^2, \qquad \lambda > 0. \tag{21}$$

Для сравнения отметим, что $E(Z(1) + Z(2)) = (\lambda - 1/2) + (2\lambda - 1/2) = 3\lambda - 1$.

Сравнить значения этих характеристик при различных λ можно в приведенной ниже таблице.

Уже отметили, что набор $Y_1, Y_2, \dots, Y_{L(2)}$ содержит не более двух рекордных величин. Ситуация меняется, если в этом наборе рассматривать множество слабых верхних рекордов.

Вернемся к с. в. $Z_1 = Z(1), Z_2, \ldots, Z_{L(2)} = Z(2)$ и вновь зафиксируем значение $Z_1 = m + x$, при котором $Y(1) = m$. Нас теперь будет интересовать, помимо с. в. $Y_{L(2)}$, которая может оказаться больше m, и все случаи, когда какие-то из величин $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{L(2)-1}$ принимают значение m. К таким возможностям приводят, наряду со с. в. $Z_{L(2)}$, значение которой заведомо больше $m + x$, также все те с. в. $Z_2, Z_3, \ldots, Z_{L(2)-1}$, значения которых больше или равны $m - \frac{1}{2}$. Остальные случайные величины в этом наборе не влияют на появление слабых рекордных с. в. $Y_1, Y_2, \ldots$. Поэтому оставим в исходном наборе $Z_2, \ldots, Z_{L(2)}$, наряду со с. в. $Z_{L(2)}$, только те величины, значения которых больше или равны $m - \frac{1}{2}$. По сути дела, учитывая также уже упомянутое свойство «отсутствия последействия» экспоненциально распределенных случайных величин, вместо набора $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{L(2)}$ переходим к рассмотрению величин, с которыми можно работать как с набором

$$Z_1 = m + x, \quad \eta_2 = m - \frac{1}{2} + \min(\xi_2, x + 1/2), \quad \eta_3 = m - \frac{1}{2} + \min(\xi_3, x + 1/2),$$

$$\eta_{N-1} = m - \frac{1}{2} + \min(\xi_{N-1}, x + 1/2), \quad \eta_N = m - \frac{1}{2} + \min(\xi_N, x + 1/2),$$

в котором $0 < x + \frac{1}{2} < 1$. Здесь $N = N(\lambda) \le L(2)$ — некоторое случайное число величин, оставшихся после проделанной процедуры, а $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_N$ представляют собой $E(\lambda)$-экспоненциально распределенные случайные величины. В этой ситуации $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N-1}$ являются слабыми рекордами, принимающими значение m. Величина Y_N также будет слабым рекордом со значением m, если $x + \frac{1}{2} < \xi_N < 1$, или уже будет рекордом со значением $m + r$, если $r \le \xi_N < r + 1$.

Рассматривая все эти возможности, получаем, что

$$E(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N-1} | Z_1 = m + x) = mEN(\lambda) + \sum_{r=1}^{\infty} rP\{r \le \xi_N < r + 1\}. \tag{22}$$

Отметим, что

$$P\{N(\lambda) = n | Z_1 = m + x\} = P\{\xi_2 < x + 1/2, \xi_3 < x + 1/2, \ldots, \xi_{n-1} < x + 1/2, \xi_n \ge x + 1/2\} =$$
$$= (1 - \exp(-(x + 1/2)/\lambda))^{n-2} \exp(-(x + 1/2)/\lambda), \qquad n = 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

и

$$E(N(\lambda) = n | Z_1 = m + x) = 2 + V(x)/(1 - V(x)),$$

где

$$V(x) = 1 - \exp(-(x + 1/2)/\lambda) \qquad \text{и} \qquad 1 - V(x) = \exp(-(x + 1/2)/\lambda).$$

Получаем, что

$$E(N(\lambda) | Z_1 = m + x) = 1 + \exp((x + 1/2)/\lambda). \tag{24}$$

Отсюда следует, что

$$EN(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 + \exp(-(x + 1/2)/\lambda)) \exp(-(m + x + 1/2)/\lambda) dx =$$

$$= 1 + \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp((x + 1/2)/\lambda) \exp(-(x + 1/2)/\lambda) dx \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-m/\lambda) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-m/\lambda) = 1 + \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\exp(-\frac{1}{\lambda})} =$$
$$= ((\lambda+1)\exp(1/\lambda) - \lambda)/\lambda(\exp(1/\lambda) - 1). \qquad (25)$$

Если, например, $\lambda = 1$, то $EN(1) = (2e-1)/(e-1) = 2.5819\ldots$

Напомним, что в этой ситуации $E(Z(1) + Z(2)) = 2$.

В приведенной ниже таблице можно сравнить три типа математических ожиданий при различных значениях параметра λ:

λ	$A(\lambda)$	$3\lambda - 1$	$EN(\lambda)$
0.1	0.00049944251	-0.7	11.000454
0.2	0.040932019	-0.4	6.0339183
0.3	0.16486784	-0.1	4.4566457
0.4	0.33298151	0.2	3.7235637
0.5	0.51854847	0.5	3.3130353
0.6	0.71132098	0.8	3.0547609
0.7	0.9073678	1.1	2.8788366
0.8	1.1050441	1.4	2.7519389
0.9	1.3035963	1.7	2.6563797
1.0	1.5026503	2.0	2.5819767
1.5	2.5008059	3.5	2.3700989
2.0	3.5003431	5.0	2.270747
3.0	5.5001023	8.0	2.270747
4.0	7.5000433	11.0	2.1302029
5.0	9.5000222	14.0	2.1033311

Отметим, что равенство $A(\lambda) = (Z(1)+Z(2))$ достигается при $\lambda = 0.51696881\ldots$, а равенство $EN(\lambda) = 3\lambda - 1$ достигается при $\lambda = 1.1635148\ldots$

Литература

1. Ahsanullah M. *Record values-theory and applications.* University Press of America (1984).

2. Ahsanullah M., Nevzorov V. B. *Records via probability theory.* In: Atlantis Studies in Probability and Statistics. Atlantis Press (2015).

3. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N. *Records.* New York, John Wiley & Sons (1998).

4. Невзоров В. Б. *Рекорды. Математическая теория.* Москва, Фазис (2000).

5. Невзоров В. Б. Сравнение числа рекордов в последовательностях дискретных и непрерывных случайных величин. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4 (62)**, вып. 3, 459–465 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.308

Статья поступила в редакцию 4 апреля 2020 г.;
после доработки 9 июля 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Ананьевский Сергей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ananjevskii@mail.ru

Невзоров Валерий Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; vanev@mail.ru

On some relations which tie exponential and geometrical record random variables*

S. M. Ananjevskii, V. B. Nevzorov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On some relations which tie exponential and geometrical record random variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 3–11.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.101 (In Russian)

Different record achievements are fixed in many domains of the human activities. Very often this process happens with some rate of discretization (up to seconds, up to meters or up to thousands of individuals) of the observed results. On the examples of exponential and geometrical distributions it is shown how such type of the transition from continuous to discrete distributions can vary the numbers of the record values in the corresponding sequences of the random variables.

Keywords: exponential distributions, geometrical distributions, record times, record values, weak records.

References

1. Ahsanullah M. *Record values-theory and applications.* University Press of America (1984).
2. Ahsanullah M., Nevzorov V. B. *Records via probability theory.* In: Atlantis Studies in Probability and Statistics. Atlantis Press (2015).
3. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N. *Records.* New York, John Wiley & Sons (1998).
4. Nevzorov V. B. *Rekordy. Matematicheskaia teoriia*. Moscow, Fazis Publ. (2000). (In Russian) [Engl. transl.: Nevzorov V. B. *Records. Mathematical theory.* In: Translations of Mathematical Monographs, vol. 194. AMS (2001)].
5. Nevzorov V. B. Comparison of numbers of records in the sequences of discrete andcontinuous random variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4 (62)**, iss. 3, 459–465 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.308 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **50**, iss. 3, 282–286 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117030116].

Received: April 4, 2020
Revised: July 9, 2020
Accepted: September 17, 2020

Authors' information:

Sergey M. Ananjevskii — ananjevskii@mail.ru
Valery B. Nevzorov — vanev@mail.ru

*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 18-01-00393).