УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1
MSC 34C20, 34C05

Обобщенные нормальные формы систем обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородным многочленом $(\alpha x_1^2 + x_2, x_1x_2)$ в невозмущенной части

В. В. Басов, А. В. Зефиров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Басов В. В., Зефиров А. В.* Обобщенные нормальные формы систем обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородным многочленом $(\alpha x_1^2 + x_2, x_1x_2)$ в невозмущенной части // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 12–28.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.102

Продолжена работа по конструктивному построению обобщенных нормальных форм (ОНФ). Рассмотрена вещественно-аналитическая в начале координат двумерная система, невозмущенную часть которой образует квазиоднородный многочлен $(\alpha x_1^2 + x_2,\ x_1x_2)$ первой степени с весом $(1, 2)$, в котором параметр $\alpha \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]$. При указанных значениях α этот многочлен является образующей — канонической формой — одного из классов эквивалентности относительно квазиоднородных замен нулевого порядка, на которые в соответствии с выбранными структурными принципами необходимо разбивать произвольный квазиоднородный многочлен первого порядка с весом $(1, 2)$, поскольку к ОНФ имеет смысл приводить только системы с различными каноническими формами в невозмущенной части. При помощи конструктивного метода резонансных уравнений и наборов в работе выписаны резонансные уравнения, которым должны удовлетворять возмущения получаемой системы в результате формальной почти тождественной квазиоднородной замены в исходной системе. Их выполнение гарантирует формальную эквивалентность систем. Кроме того, удалось выделить резонансные наборы коэффициентов, позволяющие получить все возможные структуры ОНФ и доказать сводимость исходной системы к ОНФ с любой из выделенных структур. Также приведены примеры характерных ОНФ, в частности, имеющих параметр α, при котором появляются дополнительное резонансное уравнение и второй ненулевой коэффициент в соответствующих порядках ОНФ.

Ключевые слова: обобщенная нормальная форма, квазиоднородный многочлен, резонансное уравнение.

1. Введение. ***1.1.*** В работе рассматривается вещественная система

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1^2 + x_2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = x_1x_2 + X_2(x_1, x_2) \quad (0 < |\alpha| \le 1/2,\ \alpha \ne -1/2), \quad (1)$$

в которой невозмущенную часть образует невырожденный квазиоднородный многочлен (НКОМ) $P^{[1]}_{(1,2)}(x) = (\alpha x_1^2 + x_2, x_1x_2)$ первой степени с весом $(1, 2)$, а возмущение $X = (X_1, X_2)$ разложено в сумму квазиоднородных многочленов (КОМ) вида $X_i = \sum_{n=2}^{\infty} X_i^{[n]}(x_1, x_2)$ $(i = 1, 2)$, где $X_i^{[n]} = \sum_{q_1+2q_2-i=n} X_i^{[q_1,2q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ —

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

КОМ степени n с тем же весом $(1,2)$, который в обозначениях при желании можно опускать.

Пусть формальная почти тождественная замена

$$x_i = y_i + h_i(y_1, y_2) \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

где $h_i = \sum_{n=2}^{\infty} h_i^{[n-1]}$, а КОМ $h_i^{[n-1]} = \sum_{q_1+2q_2-i=n-1} h_i^{[q_1,2q_2]} y_1^{q_1} y_2^{q_2}$, преобразует систему (1) в формально эквивалентную ей систему

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_2 + Y_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 + Y_2(y_1, y_2), \tag{3}$$

в которой $Y_i = \sum_{n=2}^{\infty} Y_i^{[n]}(y_1, y_2)$.

1.2. Работа преследует две цели, достижение которых основано на использовании конструктивного метода резонансных уравнений и наборов (см. [1, § 3], [2, § 2]):

1) выписать в явном виде условия на коэффициенты КОМ $Y_i^{[n]}$ системы (3), при которых она формально эквивалентна исходной системе (1);

2) выписать все возможные структуры наиболее простой системы (3), называемой обобщенной нормальной формой (ОНФ), которая может быть получена из произвольной системы (1) при помощи формального почти тождественного преобразования (2).

Выбор невозмущенной части системы (1) обусловлен тем, что КОМ $P_{(1,2)}^{[1]}$, называемый канонической формой (КФ), является образующей в одном из классов эквивалентности относительно квазиоднородной замены нулевого порядка с весом $(1,2)$

$$u_1 = \tau_1 x_1, \quad u_2 = \tau_2 x_2 + \gamma \tau_1^2 x_1^2 \qquad (\tau_1, \tau_2 \neq 0), \tag{4}$$

сделанной в вещественной системе

$$\dot{u} = Q_{(1,2)}^{[1]}(u) + \sum_{n=2}^{\infty} U^{[n]}(u) \tag{5}$$

с произвольным невырожденным КОМ $Q_{(1,2)}^{[1]}(u_1, u_2) = (a\, u_2 + b\, u_1^2,\ c\, u_1 u_2 + d\, u_1^3)$ $(a^2 + b^2 \neq 0,\ c^2 + d^2 \neq 0)$.

При этом разбиение на классы эквивалентности и выбор образующих основаны на принципах, учитывающих число ненулевых коэффициентов, их расположение и нормировку. Выбор принципов подчинен задаче максимального упрощения применения метода резонансных уравнений и наборов, используемого для получения всех структур ОНФ у систем с каноническими формами в невозмущенных частях.

Непосредственной проверкой можно установить следующий факт.

Утверждение 1. *Система* (5) *заменой* (4) *сводится к системе* (1), *если в ней*

$$a \neq 0,\ c + 2b \neq 0,\ d \neq a^{-1}bc,\ D = (c/2 - b)^2 + 2ad \geq 0.$$

При этом в замене (4) *и в канонической форме* $P_{(1,2)}^{[1]} = (\alpha x_1^2 + x_2, x_1 x_2)$ *системы* (1) $\gamma = \gamma_\iota,\ \tau_1 = (c - 2a\gamma_\iota)^{-1},\ \tau_2 = a^{-1}\tau_1;\ \alpha = (b + a\gamma_\iota)(c - 2a\gamma_\iota)^{-1}$ $(0 < |\alpha| \leq 1/2,\ \alpha \neq -1/2)$, *где* $\gamma_1 = (c/2 - b - D^{1/2})/(2a),\ \gamma_2 = (c/2 - b + D^{1/2})/(2a),\ \iota = \{1$ *при* $c + 2b > 0,\ 2$ *при* $c + 2b < 0\}$.

1.3. Система (5) с различными КФ в невозмущенной части изучалась и ранее по той же схеме, что будет осуществлена здесь для системы (1). Так, в [3] исследовалась система (1), но без всяких ограничений на параметр α.

В [1, часть 2] исследованы системы с КФ $(x_2, -x_1^3)$ в невозмущенной части, полученной при определенных условиях на коэффициенты НКОМ из системы (5).

Аналогичные исследования проведены в [2, § 4] для систем с КФ (x_2, x_1x_2), в [2, § 6] для систем с КФ (x_1^2, x_1^3), в [4, § 5] для систем с КФ $(\alpha\, x_1^2, x_1x_2)$, правда в этом случае КФ в невозмущенной части было удобно трактовать не как НКОМ первой степени с весом $(1,2)$, а как векторный однородный полином второй степени.

Наконец, в [5, разд. 6] для систем с невозмущенной частью $(x_2, \alpha\, x_1x_2 + \beta\, x_1^3)$ построен пример ОНФ с определенной структурой и при условии, что отношение β/α^2 не является алгебраическим числом. Указанная работа является первым шагом на пути исследования критического случая классификации Богданова — Такенса (см. [6, 7]), выделенного в отдельную проблему Байдером и Сандерсом в [8].

В заключение следует отметить, что используемое в настоящей работе определение ОНФ, предполагающее знание резонансных уравнений и наборов, снимает все вопросы о структуре ОНФ и о существовании нормализующей замены при том, что эти вопросы весьма актуальны при операторных определениях ОНФ.

Так, нетривиальный пример полной нормальной формы Белицкого (см., например, [9]) был построен в [10] только через двадцать лет после ее определения.

2. Вывод линейной связующей системы. ***2.1.*** Дифференцируя по t замену (2) в силу систем (1) и (3), получаем тождества

$$\alpha(y_1+h_1)^2 + y_2 + h_2 + X_1(y_1+h_1, y_2+h_2) = \\ = \alpha y_1^2 + y_2 + Y_1 + \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(\alpha y_1^2 + y_2 + Y_1) + \frac{\partial h_1}{\partial y_2}(y_1y_2 + Y_2),$$

$$(y_1+h_1)(y_2+h_2) + X_2(y_1+h_1, y_2+h_2) = y_1y_2 + Y_2 + \frac{\partial h_2}{\partial y_1}(\alpha y_1^2 + y_2 + Y_1) + \frac{\partial h_2}{\partial y_2}(y_1y_2 + Y_2).$$

Выделяя в них для всякого $n \geq 2$ КОМ степени n, получаем систему

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_1^{[n-1]}}{\partial y_1}(\alpha y_1^2 + y_2) + y_1y_2\frac{\partial h_1^{[n-1]}}{\partial y_2} - 2\alpha y_1 h_1^{[n-1]}(y) - h_2^{[n-1]}(y) = \widetilde{Y}_1^{[n]}(y) - Y_1^{[n]}(y), \\ &\frac{\partial h_2^{[n-1]}}{\partial y_1}(\alpha y_1^2 + y_2) + y_1y_2\frac{\partial h_2^{[n-1]}}{\partial y_2} - y_1 h_2^{[n-1]}(y) - y_2 h_1^{[n-1]}(y) = \widetilde{Y}_2^{[n]}(y) - Y_2^{[n]}(y), \end{aligned} \tag{6}$$

в которой $\widetilde{Y}_i^{[n]} = \{X_i(y_1+h_1, y_2+h_2) + h_i^* - Y_1\partial h_i/\partial y_1 - Y_2\partial h_i/\partial y_2\}^{[n]}$ $(i = 1,2)$, $h_1^* = \alpha h_1^2$, $h_2^* = h_1h_2$, т. е. КОМ $\widetilde{Y}^{[n]} = (\widetilde{Y}_1^{[n]}, \widetilde{Y}_2^{[n]})$ уже известен, так как содержит только предшествующие КОМ $Y^{[s]}$ и $h^{[s-1]}$ $(2 \leq s \leq n-1)$.

Приравнивая в системе (6) коэффициенты при $y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, где $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $q_1 + 2q_2 = n + i$, $n \geq 2$, а $i \in \{1,2\}$ — номер тождества, получаем линейную систему

$$\begin{aligned} (q_1+1)h_1^{[q_1+1,2q_2-2]} + (\alpha q_1 + q_2 - 3\alpha)h_1^{[q_1-1,2q_2]} - h_2^{[q_1,2q_2]} &= \widetilde{Y}_1^{[q_1,2q_2]} - Y_1^{[q_1,2q_2]}, \\ (q_1+1)h_2^{[q_1+1,2q_2-2]} + (\alpha q_1 + q_2 - \alpha - 1)h_2^{[q_1-1,2q_2]} - h_1^{[q_1,2q_2-2]} &= \widetilde{Y}_2^{[q_1,2q_2]} - Y_2^{[q_1,2q_2]}. \end{aligned}$$

Выражая q_1, q_2 через n и текущий параметр τ, введем следующие разложения:

$$n = 2r + \nu \quad (r \in \mathbb{N},\ \nu = 0,1); \quad q_1 = 2\tau + \nu + i - 2, \quad q_2 = r - \tau + 1.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{aligned}&(2\tau+\nu)h_1^{[2\tau+\nu,2(r-\tau)]}+(2\alpha\tau+\alpha\nu+r-\tau-4\alpha+1)h_1^{[2\tau+\nu-2,2(r-\tau+1)]}-\\&\quad -h_2^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]}=\widehat{Y}_1^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]}\qquad(1-\nu\le\tau\le r+1),\\&(2\tau+\nu+1)h_2^{[2\tau+\nu+1,2(r-\tau)]}+(2\alpha\tau+\alpha\nu+r-\tau-\alpha)h_2^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]}-\\&\quad -h_1^{[2\tau+\nu,2(r-\tau)]}=\widehat{Y}_2^{[2\tau+\nu,2(r-\tau+1)]}\qquad(0\le\tau\le r+1),\end{aligned}\tag{7}$$

где $\widehat{Y}_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}=\widetilde{Y}_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}-Y_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}$ $(i=1,2)$. При этом все коэффициенты $\widetilde{Y}_i^{[2\tau+\nu+i-2,2(r-\tau+1)]}$ КОМ $\widetilde{Y}^{[2r+\nu]}$ известны согласно (6).

2.2. Рассмотрим отдельно случай, когда $r=1$.

Система (7) при $n=2$ $(r=1,\ \nu=0)$ имеет вид

$$\begin{gathered}2h_1^{[2,0]}+(1-2\alpha)h_1^{[0,2]}-h_2^{[1,2]}=\widehat{Y}_1^{[1,2]},\quad -h_2^{[3,0]}=\widehat{Y}_1^{[3,0]},\ h_2^{[1,2]}-h_1^{[0,2]}=\widehat{Y}_2^{[0,4]},\\ 3h_2^{[3,0]}+\alpha h_2^{[1,2]}-h_1^{[2,0]}=\widehat{Y}_2^{[2,2]},\quad(3\alpha-1)h_2^{[3,0]}=\widehat{Y}_2^{[4,0]}.\end{gathered}$$

Она совместна при выполнении следующих резонансных связей:

$$(3\alpha-1)\widehat{Y}_1^{[3,0]}+\widehat{Y}_2^{[4,0]}=0,\quad \widehat{Y}_1^{[1,2]}+6\widehat{Y}_1^{[3,0]}+(1-2\alpha)\widehat{Y}_2^{[0,4]}+2\widehat{Y}_2^{[2,2]}=0\ \ (h_1^{[0,2]}-\forall).\tag{7^2}$$

В свою очередь, система (7) при $n=3$ $(r=1,\ \nu=1)$ имеет вид

$$\begin{gathered}h_1^{[1,2]}-h_2^{[0,4]}=\widehat{Y}_1^{[0,4]},\quad 3h_1^{[3,0]}+(1-\alpha)h_1^{[1,2]}-h_2^{[2,2]}=\widehat{Y}_1^{[2,2]},\\ \alpha h_1^{[3,0]}-h_2^{[4,0]}=\widehat{Y}_1^{[4,0]},\quad 2h_2^{[2,2]}+h_2^{[0,4]}-h_1^{[1,2]}=\widehat{Y}_2^{[1,4]},\\ 4h_2^{[4,0]}+2\alpha h_2^{[2,2]}-h_1^{[3,0]}=\widehat{Y}_2^{[3,2]},\quad(4\alpha-1)h_2^{[4,0]}=\widehat{Y}_2^{[5,0]}.\end{gathered}$$

Она совместна, когда имеют место резонансные связи

$$\alpha^2\widehat{Y}_1^{[0,4]}-\widehat{Y}_1^{[4,0]}+\alpha^2\widehat{Y}_2^{[1,4]}-\alpha\widehat{Y}_2^{[3,2]}+\widehat{Y}_2^{[5,0]}=0;\quad \alpha=1/4\colon\ \widehat{Y}_2^{[5,0]}=0\ \ (h_1^{[3,0]}-\forall).\tag{7^3}$$

2.3. В дальнейшем будем всегда предполагать, что $r\ge 2$.

Перепишем систему (7) в новых более удобных обозначениях:

$$\begin{aligned}&(\alpha(2\tau+\nu-4)+r-\tau+1)h_{1,\tau-1}^r+(2\tau+\nu)h_{1,\tau}^r-h_{2,\tau}^r=\widehat{Y}_{1,\tau}^r,\\&(\alpha(2\tau+\nu-1)+r-\tau)h_{2,\tau}^r+(2\tau+\nu+1)h_{2,\tau+1}^r-h_{1,\tau}^r=\widehat{Y}_{2,\tau}^r,\end{aligned}\tag{8}$$

где $h_{1,\tau}^r=h_1^{[2\tau+\nu,2(r-\tau)]}$ $(\tau=\overline{0,r})$, $h_{2,\tau}^r=h_2^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]}$, $\widehat{Y}_{1,\tau}^r=\widehat{Y}_1^{[2\tau+\nu-1,2(r-\tau+1)]}$ $(\tau=\overline{1-\nu,r+1})$, $\widehat{Y}_{2,\tau}^r=\widehat{Y}_2^{[2\tau+\nu,2(r-\tau+1)]}$ $(\tau=\overline{0,r+1})$.

Подставляя $h_{2,\tau}^r$ из первого уравнения (8) во второе, получаем систему

$$c_\tau h_{1,\tau-1}^r+a_\tau h_{1,\tau}^r+b_\tau h_{1,\tau+1}^r=Y_{0,\tau}^r\qquad(\tau=\overline{0,r+1}),$$

$$\begin{aligned}&a_\tau=2\alpha((2\tau+\nu)^2-2\tau-\nu-1)+(r-\tau)(4\tau+2\nu+1)-1,\\&b_\tau=(2\tau+\nu+1)(2\tau+\nu+2),\\&c_\tau=(\alpha(2\tau+\nu-1)+r-\tau)(\alpha(2\tau+\nu-4)+r-\tau+1),\end{aligned}$$

$$Y^r_{0,\tau} = \widehat{Y}^r_{2,\tau} + (\alpha(2\tau+\nu-1)+r-\tau)\widehat{Y}^r_{1,\tau} + (2\tau+\nu+1)\widehat{Y}^r_{1,\tau+1},$$

или в векторной записи —

$$\Theta^r h^r_1 = Y^r_0, \tag{9}$$

где

$$\Theta^r = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_r & a_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \end{pmatrix}_{(r+2)\times(r+1)},$$

а компоненты векторов $h^r_1 = (h^r_{1,0}, \dots, h^r_{1,r})$ и $Y^r_0 = (Y^r_{0,0}, \dots, Y^r_{0,r+1})$ введены в (8).

3. Условия совместности системы в случае $r \geq 2,\ \nu = 0$**.** ***3.1.*** В рассматриваемом случае коэффициенты системы (9) принимают вид

$$\begin{gathered} a_\tau = 2\alpha(4\tau^2 - 2\tau - 1) + (r-\tau)(4\tau+1) - 1, \quad b_\tau = (2\tau+1)(2\tau+2), \\ c_\tau = (r-\tau+\alpha(2\tau-1))(r-\tau+2\alpha(\tau-2)+1), \\ Y^r_{0,\tau} = \widehat{Y}^r_{2,\tau} + (\alpha(2\tau-1)+r-\tau)\widehat{Y}^r_{1,\tau} + (2\tau+1)\widehat{Y}^r_{1,\tau+1}. \end{gathered} \tag{10}$$

Методом Гаусса будем аннулировать поддиагональ $(c_1, \dots, c_{r+1})$ матрицы Θ^r, пока это возможно, для чего введем рекуррентную последовательность d_τ :

$$d_0 = a_0 = r - 2\alpha - 1,\ d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1},\ \text{пока}\ \ d_{\tau-1} \neq 0\ \ (1 \leq \tau \leq r,\ r \geq 2). \tag{11}$$

Возникают два случая:
1) $\exists\ \breve{\tau}\ (0 \leq \breve{\tau} \leq r) :\ d_0, \dots, d_{\breve{\tau}-1} \neq 0,\ d_{\breve{\tau}} = 0;$
2) $d_0, \dots, d_r \neq 0$, тогда положим $d_{r+1} = 0$ и $\breve{\tau} = r+1$.

Лемма 1. *Для элементов* d_τ *из* (11) *справедлива прямая формула*

$$d_\tau = (2\tau+1)p_\tau q_\tau/(q_\tau+1); \qquad p_\tau = r-\tau+2\alpha(\tau-1), \quad q_\tau = r-\tau-2\alpha-1, \tag{12}$$

где $\tau = \overline{0,\breve{\tau}}$ *в случае* 1, $\tau = \overline{0,r}$ *в случае* 2.

Доказательство проводится индукцией по τ. □

3.2. Разобьем множество пар (α, r) с $\alpha \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]$, $r \geq 2$ на непересекающиеся семейства $\{\alpha, r\}^d_m$ $(m = 0,1,2)$ и для каждого укажем индекс τ^d_m, задающий $\breve{\tau}$:

$$\begin{gathered} \{\alpha, r\}^d_1 = \{-k/(2l), k+l+1\}_{l \geq k+1}, \ \ \tau^d_1 = l+1; \qquad \{\alpha, r\}^d_2 = \{1/2, l\}_{l \geq 2}, \ \ \tau^d_2 = l-2; \\ \{\alpha, r\}^d_0 = \{(\alpha, r) \not\subset \{\alpha, r\}^d_1 \cup \{\alpha, r\}^d_2\}, \ \ \tau^d_0 = r+1 \quad (k, l \in \mathbb{N}). \end{gathered}$$

Лемма 2. *Если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_m$ $(m = 1, 2)$, *то для элементов* d_τ *из* (12) *имеет место случай* 1 *с* $\breve{\tau} = \tau^d_m$; *а если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_0$, *то реализуется случай* 2 *с* $\breve{\tau} = \tau^d_0$.

В результате система (9) может быть преобразована в систему

$$\Theta^r_d h^r_1 = Y^r_d, \tag{13}$$

в которой

$$\Theta_d^r = \begin{pmatrix} d_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & d_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & d_{\check\tau-1} & b_{\check\tau-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{0} & b_{\check\tau} & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{\check\tau+1} & a_{\check\tau+1} & b_{\check\tau+1} & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{\check\tau+2} & a_{\check\tau+2} & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-1}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & c_r & a_r\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \end{pmatrix}_{(r+2)\times(r+1)},$$

a_τ, b_τ, c_τ описаны в (10), а d_τ в (12), вектор Y_d^r имеет компоненты $Y_{d,0}^r = Y_{0,0}^r$, $Y_{d,\tau}^r = Y_{0,\tau}^r - (c_\tau/d_{\tau-1})Y_{d,\tau-1}^r$ $(\tau = \overline{1,\check\tau})$, $Y_{d,\tau}^r = Y_{0,\tau}^r$ $(\tau = \overline{\check\tau+1, r+1})$ и тем самым $Y_{d,\tau}^r = Y_{0,\tau}^r + \sum_{j=0}^{\tau-1}(-1)^{\tau-j}Y_{0,j}^r\prod_{\nu=j+1}^{\tau} c_\nu/d_{\nu-1}$ $(\tau = \overline{0,\check\tau})$.

Очевидно, что первые $\check\tau$ уравнений системы (13) однозначно разрешимы относительно $h_{1,0}^r, \dots, h_{1,\check\tau-1}^r$, а следующее уравнение с номером $\check\tau$ имеет вид

$$0\cdot h_{1,\check\tau-1}^r + 0\cdot h_{1,\check\tau}^r + b_{\check\tau}h_{1,\check\tau+1}^r = Y_{d,\check\tau}^r \qquad (h_{1,r+1}^r, h_{1,r+2}^r = 0). \tag{14}$$

В частности, в случае 2 $\check\tau = r+1$, поэтому Θ_d^r — двухдиагональная матрица с нулевой нижней строкой и уравнение (14), имея вид $0\cdot h_{1,r}^r = Y_{d,r+1}^r$, задает единственную резонансную связь.

3.3. Для нахождения нулей функции c_τ из (10), записанной в виде

$$c_\tau = p_{\tau-1}(p_\tau + \alpha); \quad p_\tau = r - \tau + 2\alpha(\tau-1), \tag{15}$$

где $\tau = \overline{1, r+1}$, разобьем множество пар (α, r) с $\alpha \in (-1/2, 0)\cup(0, 1/2]$, $r \geq 2$ на четыре непересекающихся семейства $\{\alpha, r\}_\mu^c$ $(\mu = \overline{0,3})$ и укажем отвечающие им индексы τ_μ^c :

$$\{\alpha,r\}_1^c = \{-k/(2l), l+k+1\}_{l\geq k+1}, \quad \tau_1^c = l+2;$$
$$\{\alpha,r\}_2^c = \{-k/(2l-1), k+l\}_{l\geq k+1}, \quad \tau_2^c = l;$$
$$\{\alpha,r\}_3^c = \{1/(2l-1), l-1\}_{l\geq 3}, \quad \tau_3^c = l;$$
$$\{\alpha,r\}_0^c = \{(\alpha,r) \not\subset \cup_{\mu=1}^3\{\alpha,r\}_\mu^c\} \quad (k,l\in\mathbb{N}).$$

Очевидно, что $\{\alpha,r\}_1^c = \{\alpha,r\}_1^d$, $\tau_1^c = \tau_1^d + 1$; $\{\alpha,r\}_2^d \subset \{\alpha,r\}_0^c$; $\{\alpha,r\}_2^c \cup \{\alpha,r\}_3^c \subset \{\alpha,r\}_0^d$.

Лемма 3. *Если пара* $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_\mu^c$ $(\mu=1,2,3)$, *то в* (15) $c_\tau = 0$ *только при* $\tau = \tau_\mu^c$, *а если* $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}_0^c$, *то* $c_\tau \neq 0$ *при* $\tau = \overline{1,r+1}$.

3.4. В случае 1 выделим последние $r - \check\tau + 1 \geq 1$ уравнений (13) в систему

$$\Theta_d^{r+}h_1^{r+} = Y_d^{r+}, \tag{16}$$

где

$$\Theta_d^{r+} = \begin{pmatrix} c_{\breve\tau+1} & a_{\breve\tau+1} & b_{\breve\tau+1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_{\breve\tau+2} & a_{\breve\tau+2} & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & c_r & a_r \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & c_{r+1} \end{pmatrix}_{(r-\breve\tau+1)\times(r-\breve\tau+1)},$$

а векторы $h_1^{r+} = (h_{1,\breve\tau}^r, \dots, h_{1,r}^r)$, $Y_d^{r+} = (Y_{d,\breve\tau+1}^r, \dots, Y_{d,r+1}^r)$.

По лемме 3 все диагональные элементы $c_{\breve\tau+1}, \dots, c_{r+1}$ матрицы Θ_d^{r+} отличны от нуля, кроме $c_{\breve\tau+1} = 0$ в случае, когда $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$.

Для сведения верхнетреугольных трехдиагональных матриц вида (16) к диагональным здесь и в дальнейшем удобно использовать верхнетреугольную матрицу

$$G = \{g_{\tau j}\}_{\tau,j=\tau_*}^{r+1} \quad (\tau_* \geq 0), \tag{17}$$

в которой $g_{\tau\tau} = 1$, $g_{\tau j} = -(g_{\tau j-1}a_{j-1} + g_{\tau j-2}b_{j-2})/c_j$ $(\tau = \overline{\tau_*, r+1},\ j = \overline{\tau+1, r+1})$.

Для оценки элементов G удобно ввести рекуррентную последовательность $f_{\tau j}$:

$$\forall\, \tau = \overline{\breve\tau+1, r}:\ f_{\tau\tau} = -a_\tau,\ f_{\tau j} = -a_j - b_{j-1}c_j/f_{\tau\, j-1}\ (\tau+1 \leq j \leq r),\ \text{ пока }\ f_{\tau\, j-1} \neq 0. \tag{18}$$

Утверждение 2. *Если в* (18) $f_{\tau\tau}, \dots, f_{\tau r} \neq 0$, *то для* $g_{\tau\, j}$ *из* (17) *верна формула*

$$g_{\tau\, j} = g_{\tau\, j-1} f_{\tau\, j-1}/c_j \quad (j = \overline{\tau+1, r+1}). \tag{19}$$

Доказательство проводится индукцией по j. □

Положим в (17) $\tau_* = \breve\tau+1$, тогда $G\Theta_d^{r+} = \{g_{\tau j-2}b_{j-2} + g_{\tau j-1}a_{j-1} + g_{\tau j}c_j\}_{\tau,j=\breve\tau+1}^{r+1} = \operatorname{diag}\{c_{\breve\tau+1}, \dots, c_{r+1}\}$, и система (16), умноженная слева на G, равносильна системе

$$c_\tau h_{1,\tau-1}^r = \sum\nolimits_{j=\tau}^{r+1} g_{\tau j} Y_{0,j}^r \qquad (\tau = \overline{\breve\tau+1, r+1}). \tag{20}$$

Система (20) однозначно разрешима, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^d$, а если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^d = \{\alpha, r\}_1^c$, то первое уравнение системы (20) с $\tau = \breve\tau + 1 = \tau_1^d + 1$ имеет вид

$$0 \cdot h_{1,\tau_1^d}^r = \sum\nolimits_{j=\tau_1^d+1}^{r+1} g_{\tau_1^d+1 j} Y_{0,j}^r, \tag{21}$$

задавая резонансную связь, причем коэффициент $h_{1,\tau_1^d}^r$ не имеет ограничений.

3.5. Вернемся к уравнению (14). Подставляя в него $Y_{d,\breve\tau}^r$ из (13), а в случае 1, когда $\breve\tau \leq r-1$, также $h_{1,\breve\tau+1}^r$ из (20) $(c_{\breve\tau+2} \neq 0)$, получаем резонансную связь

$$0 \cdot h_{1,\breve\tau+1}^r = Y_{0,\breve\tau}^r + \sum_{j=0}^{\breve\tau-1} (-1)^{\breve\tau-j} \prod_{\nu=j+1}^{\breve\tau} \frac{c_\nu}{d_{\nu-1}}\, Y_{0,j}^r - \frac{b_{\breve\tau}}{c_{\breve\tau+2}} \sum_{j=\breve\tau+2}^{r+1} g_{\breve\tau+2\, j} Y_{0,j}^r. \tag{22}$$

Выразим теперь в универсальной связи (22) и в дополнительной связи (21) компоненты $Y^r_{0,j}$ через $\widehat{Y}^r_{i,j}$ $(i=1,2)$ с учетом (10), (12), (15), для чего введем константы

$$
\begin{aligned}
&v^0_j=(-1)^{\breve{\tau}-j}\,\frac{q_j+1}{q_{\breve{\tau}}+1}\prod_{\nu=j+1}^{\breve{\tau}}\frac{p_\nu+\alpha}{2\nu-1}\quad (j=\overline{0,\breve{\tau}-1}),\quad v^0_{\breve{\tau}}=1,\quad v^0_{\breve{\tau}+1}=0\quad (v^0_{r+2}=0),\\
&u^0_0=0,\quad u^0_j=-v^0_j(p_j+\alpha)/(q_j+1)\quad (j=\overline{1,\breve{\tau}}),\quad u^0_{\breve{\tau}+1}=2\breve{\tau}+1\quad (u^0_{r+2}=0),\\
&v^0_j=-\frac{b_{\breve{\tau}}g_{\breve{\tau}+2\,j}}{c_{\breve{\tau}+2}},\quad u^0_j=-b_{\breve{\tau}}\frac{(p_j+\alpha)g_{\breve{\tau}+2\,j}+(2j-1)g_{\breve{\tau}+2\,j-1}}{c_{\breve{\tau}+2}}\quad (j=\overline{\breve{\tau}+2,r+1});\\
&v^{0_1}_j=g_{\tau^d_1+1\,j},\quad u^{0_1}_j=(p_j+\alpha)g_{\tau^d_1+1\,j}+(2j-1)g_{\tau^d_1+1\,j-1}\quad (j=\overline{\tau^d_1+1,r+1}).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Утверждение 3. *Резонансные связи* (22) *и* (21) *могут быть записаны в виде*

$$
v^0_0\widehat{Y}^r_{2,0}+\sum_{j=1}^{\breve{\tau}}(u^0_j\widehat{Y}^r_{1,j}+v^0_j\widehat{Y}^r_{2,j})+u^0_{\breve{\tau}+1}\widehat{Y}^r_{1,\breve{\tau}+1}+\sum_{j=\breve{\tau}+2}^{r+1}(u^0_j\widehat{Y}^r_{1,j}+v^0_j\widehat{Y}^r_{2,j})=0,
\tag{24}
$$

$$
(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}^d_1:\quad \sum_{j=\tau^d_1+1}^{r+1}(u^{0_1}_j\widehat{Y}^r_{1,j}+v^{0_1}_j\widehat{Y}^r_{2,j})=0\quad (h^r_{1,\tau^d_1}\ \textit{произвольна}).
\tag{25}
$$

Доказательство. Имеем $v^0_j=-(2j-1)(q_j+1)(p_j+\alpha)^{-1}(q_{j-1}+1)^{-1}v^0_{j-1}$, $u^0_j=(p_j+\alpha)(1-(q_j+2)/(q_j+1))v^0_j=(p_j+\alpha)v^0_j+(2j-1)v^0_{j-1}$ при $j=\overline{1,\breve{\tau}}$.

Теперь согласно (10), (11) и (22) получаем: $(-1)^{\breve{\tau}-j}\prod_{\nu=j+1}^{\breve{\tau}}c_\nu/d_{\nu-1}=v^0_j$ $(j=\overline{0,\breve{\tau}})$, $\sum_{j=0}^{\breve{\tau}}v^0_jY^r_{0,j}=\sum_{j=0}^{\breve{\tau}}v^0_j(2j+1)\widehat{Y}^r_{1,j+1}+\sum_{j=1}^{\breve{\tau}}v^0_j(\alpha(2j-1)+r-j)\widehat{Y}^r_{1,j}+\sum_{j=0}^{\breve{\tau}}v^0_j\widehat{Y}^r_{2,j}=\sum_{j=1}^{\breve{\tau}}(v^0_j(\alpha(2j-1)+r-j)+v^0_{j-1}(2j-1))\widehat{Y}^r_{1,j}+v^0_{\breve{\tau}}(2\breve{\tau}+1)\widehat{Y}_{1,\breve{\tau}+1}+\sum_{j=0}^{\breve{\tau}}v^0_j\widehat{Y}^r_{2,j}=\sum_{j=1}^{\breve{\tau}}(v^0_j(p_j+\alpha)+v^0_{j-1}(2j-1))\widehat{Y}^r_{1,j}+v^0_{\breve{\tau}}(2\breve{\tau}+1)\widehat{Y}^r_{1,\breve{\tau}+1}+\sum_{j=0}^{\breve{\tau}}v^0_j\widehat{Y}^r_{2,j}=\sum_{j=0}^{\breve{\tau}+1}(u^0_j\widehat{Y}^r_{1,j}+v^0_j\widehat{Y}^r_{2,j})$. Здесь $u^0_0=0$, так как при $\nu=0$ в (8) $\widehat{Y}^r_{1,0}$ отсутствует. Кроме того, в уравнении (21) $\sum_{j=\tau^d_1+1}^{r+1}g_{\tau^d_1+1\,j}Y^r_{0,j}=\sum_{j=\tau^d_1+1}^{r+1}g_{\tau^d_1+1\,j}((p_j+\alpha)\widehat{Y}^r_{1,j}+\widehat{Y}^r_{2,j})+\sum_{j=\tau^d_1+2}^{r+2}g_{\tau^d_1+1\,j-1}(2j-1)\widehat{Y}^r_{1,j}$. □

3.6. Переходя от резонансных связей к резонансным уравнениям, заменим компоненты $\widehat{Y}^r_{i,j}$ на коэффициенты системы (3) согласно обозначениям, введенным для систем (8), (7): $\widehat{Y}^r_{i,j}=\widetilde{Y}_i^{[2j+i-2,2(r-j+1)]}-Y_i^{[2j+i-2,2(r-j+1)]}$ $(i=1,2;\ j\geq 1$ при $i=1)$, затем слагаемые, содержащие коэффициенты предшествующих форм (они отмечены сверху волной), перенесем в правые части, единообразно обозначая их суммы константой $\widetilde{c}$.

Кроме того, необходимо установить коэффициенты $Y_i^{[\cdot,\cdot]}$, которые будут реально присутствовать в резонансных уравнениях, т. е. определить какие множители u_ι, v_ι, стоящие при них, отличны от нуля.

Лемма 4. *Пусть* $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}^d_0$, *тогда в резонансной связи* (24) *в случаях* 0_μ *имеем* $(\alpha,r)\in\{\alpha,r\}^c_\mu$ $(\mu=2,3)$: $v^0_0,\ldots,v^0_{\tau^c_\mu-1},u^0_1,\ldots,u^0_{\tau^c_\mu}=0$,

$v^0_{\tau^c_\mu}, \dots, v^0_{r+1}, u^0_{\tau^c_\mu+1}, \dots, u^0_{r+1} \neq 0$, *а в случае* 0_0 — $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_0 \cap \{\alpha, r\}^c_0$: $v^0_0, \dots, v^0_{r+1}, u^0_1, \dots, u^0_{r+1} \neq 0$.

Таким образом, связь (24) в зависимости от значений α и r может быть записана в виде одного из трех резонансных уравнений:

$$v^0_{\tau^c_2} Y_2^{[2\tau^c_2, 2(r-\tau^c_2+1)]} + \sum_{j=\tau^c_2+1}^{r+1} \left(u^0_j Y_1^{[2j-1, 2(r-j+1)]} + v^0_j Y_2^{[2j, 2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}$$

$$\text{при} \;\; \alpha = -k/(2l-1), \;\; \tau^c_2 = l, \;\; r = k+l \;\; (l \geq k+1); \tag{24^c_2}$$

$$Y_2^{[2l,0]} = \widetilde{c} \quad \text{при} \;\; \alpha = 1/(2l-1), \;\; \tau^c_3 = l, \;\; r = l-1 \;\; (l \geq 3); \tag{24^c_3}$$

$$v^0_0 Y_2^{[0, 2(r+1)]} + \sum_{j=1}^{r+1} \left(u^0_j Y_1^{[2j-1, 2(r-j+1)]} + v^0_j Y_2^{[2j, 2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}$$

$$\text{при} \;\; (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_0 \cap \{\alpha, r\}^c_0, \tag{24^0_0}$$

где входящие в уравнения множители v^0_ι, u^0_ι не равны нулю по лемме 4.

Лемма 5. *Пусть* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_1$, *тогда в универсальной связи* (24) *множители* $v^0_0 \dots v^0_{\tau^d_1}$, $u^0_1 \dots u^0_{\tau^d_1+1} \neq 0$ *и* $v^0_{\tau^d_1+2} \dots v^0_{r+1} < 0$, $u^0_{\tau^d_1+2} \dots u^0_{r+1} > 0$, *а в дополнительной связи* (25) *множители* $v^{0_1}_{\tau^d_1+1} \dots v^{0_1}_{r+1} > 0$, $u^{0_1}_{\tau^d_1+1} \dots u^{0_1}_{r+1} < 0$.

Доказательство. Имеем $\alpha = -k/(2l)$, $\tau^d_1 = l+1$, $r = k+l+1$ $(l \geq k+1)$.

Согласно лемме 2 и (12) $q_\tau + 1 \neq 0$ при $\tau = \overline{1, \tau^d_1}$. Уравнение $p_\tau + \alpha = 0$ имеет решение τ' : $\tau^d_1 - 1 < \tau' < \tau^d_1$, и p_τ убывает, поэтому $p_j + \alpha > 0$ при $j = \overline{1, \tau^d_1 - 1}$ и $p_j + \alpha < 0$ при $j = \overline{\tau^d_1, r+1}$, а значит, в (23) v^0_j, $u^0_{j+1} \neq 0$ при $j = \overline{0, \tau^d_1}$.

Далее, $p_{j-1} < 0$ при $j = \overline{\tau^d_1 + 2, r+1}$, поскольку уравнение $p_{\tau-1} = 0$ имеет решение $\tau' = l+2 = \tau^d_1 + 1$. Поэтому в (15) $c_j = p_{j-1}(p_j + \alpha) > 0$ при $j = \overline{\tau^d_1 + 2, r+1}$.

Покажем, что в формуле (17) $g_{\tau j} > 0$ при $\tau = \tau^d_1 + 1$, $\tau^d_1 + 2$, $j = \overline{\tau+1, r+1}$. Согласно (19) $g_{\tau j} = g_{\tau\, j-1} f_{\tau\, j-1}/c_j$, если $f_{\tau\, j-1} \neq 0$.

Введем $\xi_j = -2(j+1)(2\alpha(j-1)+r-j) = 2(j+1)(k(j-1)/l-k-l-1+j) > 0$ при $j = \overline{\tau, r}$. Индукция по j с учетом (18) показывает, что $f_{\tau j} > \xi_j$ $(\tau = \tau^d_1+1, \tau^d_1+2, \; j = \overline{\tau, r})$.

Итак, все $f_{\tau j} > 0$ и в (19) $g_{\tau j} > 0$ при $\tau = \tau^d_1 + 1$, $\tau^d_1 + 2$, $j = \overline{\tau+1, r+1}$, а $g_{\tau\tau} = 1$.

Осталось заметить, что с учетом (19) входящее в u^0_j, $u^{0_1}_j$ в (23) выражение $(p_j + \alpha)\; g_{\tau^d_1+2 j} + (2j-1) g_{\tau^d_1+2\, j-1} < g_{\tau^d_1+2\, j-1}(\xi_{j-1}/p_{j-1} + 2j - 1) = -g_{\tau^d_1+2\, j-1} < 0$ $(j = \overline{\tau^d_1 + 2, r+1})$. □

Лемма 6. *Пусть* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}^d_2$, *тогда в резонансной связи* (24) *все множители* $v^0_0 \dots v^0_{r-2}$, v^0_r, v^0_{r+1}, $u^0_1 \dots u^0_{r+1} \neq 0$.

Доказательство. Имеем $\alpha = 1/2$, $\tau^d_2 = l-2$, $r = l$.

По лемме 2 и (12) имеем $q_\tau + 1 \neq 0$ при $\tau = \overline{1, r-2}$, а также при $\tau = \overline{1, r+1}$ — неравенства $p_\tau + \alpha = r - 1/2 > 0$, $p_{\tau-1} = r - 1 > 0$, поэтому в (15) $c_\tau > 0$.

Отсюда в (23) v^0_j, $u^0_{j+1} \neq 0$ при $j = \overline{0, r-2}$. Кроме того, в (17) $g_{r\,r} = 1$ и $g_{r\,r+1} = -a_r/c_{r+1} = -2(2r^2 - r - 1)/((r - 1/2)(r-1)) < 0$, а входящее в множитель u^0_{r+1} выражение $(p_{r+1} + \alpha) g_{r\,r+1} + (2r+1) g_{r\,r} = 2(2r^2 - r - 1)/(r-1) + 2r + 1 > 0$, так как $r \geq 2$. □

В результате при $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_m^d \ \ (m = 1, 2)$ резонансная связь (24) принимает вид

$$v_0^0 Y_2^{[0,2(r+1)]} + \sum_{j=1}^{\tau_m^d} \left(u_j^0 Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + v_j^0 Y_2^{[2j,2(r-j+1)]} \right) + u_{\tau_m^d+1}^0 Y_1^{[2\tau_m^d+1,2(r-\tau_m^d)]} +$$

$$+ \sum_{j=\tau_m^d+2}^{r+1} \left(u_j^0 Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + v_j^0 Y_2^{[2j,2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c} \ \text{ при } \alpha = -k/(2l),\ \tau_1^d = l+1,$$

$r = k + l + 1 \ \ (l \geq k + 1),$ если $m = 1;\ \alpha = 1/2,\ \tau_2^d = l - 2,\ r = l \ \ (l \geq 2),$ если $m = 2;$ (24_m^d)

$$\sum_{j=\tau_1^d+1}^{r+1} \left(u_j^{0_1} Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]} + v_j^{0_1} Y_2^{[2j,2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}$$

$$\text{при } \ \alpha = -k/(2l),\ \ \tau_1^d = l + 1,\ \ r = k + l + 1 \ \ (l \geq k + 1), \qquad (25_1^d)$$

где входящие в уравнения множители $v_\iota^0, u_\iota^0, v_\iota^{0_1}, u_\iota^{0_1}$ введены в (23) и отличны от нуля.

4. Условия совместности системы в случае $r \geq 2,\ \ \nu = 1$**.** ***4.1.*** В рассматриваемом случае коэффициенты системы (9) принимают вид

$$\begin{aligned} &a_\tau = 2\alpha(4\tau^2 + 2\tau - 1) + (r - \tau)(4\tau + 3) - 1, \\ &b_\tau = (2\tau + 2)(2\tau + 3); \\ &c_\tau = (\alpha(2\tau - 3) + r - \tau + 1)(2\alpha\tau + r - \tau), \\ &Y_{0,\tau}^r = \widehat{Y}_{2,\tau}^r + (2\alpha\tau + r - \tau)\widehat{Y}_{1,\tau}^r + (2\tau + 2)\widehat{Y}_{1,\tau+1}^r. \end{aligned} \qquad (26)$$

Для нахождения нулей функции c_τ из (26), записанной в виде

$$c_\tau = p_\tau(p_{\tau-1} - \alpha); \quad p_\tau = 2\tau\alpha + r - \tau, \qquad (27)$$

где $1 \leq \tau \leq r + 1$, разобьем множество пар (α, r) с $\alpha \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2],\ r \geq 2$ на четыре непересекающихся семейства и введем отвечающие им индексы $\tau_\mu^c \ \ (\mu = \overline{0, 3})$:

$$\begin{gathered} \{\alpha, r\}_1^c = \{-k/(2l - 1),\, k + l\}_{l \geq k+1}, \quad \tau_1^c = l + 1; \\ \{\alpha, r\}_2^c = \{-k/(2l),\, k + l\}_{l \geq k+1}, \quad \tau_2^c = l; \\ \{\alpha, r\}_3^c = \{1/(2l),\, l - 1\}_{l \geq 3}, \quad \tau_3^c = l; \\ \{\alpha, r\}_0^c = \left\{ (\alpha, r) \notin \bigcup_{\mu=1}^{3} \{\alpha, r\}_\mu^c \right\}, \quad \tau_0^c = 0 \quad (k, l \in \mathbb{N}). \end{gathered}$$

Лемма 7. *Если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_\mu^c \ \ (\mu = \overline{1, 3})$, *то в* (27) $c_\tau = 0$ *только при* $\tau = \tau_\mu^c$ *и* $c_\tau > 0$ $(\tau = \overline{1, \tau_\mu^c - 1})$, *кроме* $c_{\tau_1^c - 1} < 0$. *Если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_0^c$, *то* $c_\tau \neq 0$ *при* $\tau = \overline{1, r + 1}$.

4.2. Введем индекс $\hat{\tau} = \tau_\mu^c \ \ (\mu = \overline{0, 3})$ и при $\mu = 0$ элемент $c_0 = 0$. Тогда $c_{\hat{\tau}} = 0$.

Выделим последние $r - \hat{\tau} + 2$ уравнений системы (9) в отдельную систему

$$\Theta^{r+} h_1^{r+} = Y_0^{r+}, \qquad (28)$$

где

$$\Theta^{r+} = \begin{pmatrix} c_{\hat\tau} & a_{\hat\tau} & b_{\hat\tau} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_{\hat\tau+1} & a_{\hat\tau+1} & b_{\hat\tau+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{r-1} & a_{r-1} & b_{r-1} \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & c_r & a_r \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & c_{r+1} \end{pmatrix}_{(r-\hat\tau+2)\times(r-\hat\tau+2)}, \qquad \begin{aligned} h_1^{r+} &= (h_{1,\hat\tau-1}^r, \dots, h_{1,r}^r), \\ Y_0^{r+} &= (Y_{0,\hat\tau}^r, \dots, Y_{0,r+1}^r). \end{aligned}$$

При $\mu = 0$ система (28) совпадает с (9), только матрица Θ_0^{r+} имеет дополнительные нулевой первый столбец с элементом $c_0 = 0$ $(\tau_0^c = 0)$ и компоненту $h_{1,-1}^r$.

Положим в (17) $\tau_* = \hat\tau$, тогда, умножая левую и правую части системы (28) слева на матрицу G, приходим к диагональной системе $c_\tau h_{1,\tau-1}^r = \sum_{j=\tau}^{r+1} g_{\tau j} Y_{0,j}^r$ $(\tau = \overline{\hat\tau, r+1})$ или к системе $c_\tau h_{1,\tau-1}^r = \sum_{j=\tau}^{r+1} (((2\alpha j+r-j) g_{\tau j} + 2j g_{\tau\, j-1}) \widehat{Y}_{1,j}^r + g_{\tau j} \widehat{Y}_{2,j}^r)$ $(\tau = \overline{\hat\tau, r+1})$ после замены компонент $Y_{0,j}^r$ из (26) на $\widehat{Y}_{i,j}^r$.

По лемме 7 в левой части полученной системы только коэффициент $c_{\tau_\mu^c} = 0$, поэтому ее первое уравнение, в котором $\tau = \hat\tau = \tau_\mu^c$, задает резонансную связь

$$\sum_{j=\tau_\mu^c}^{r+1} (u_j^1 \widehat{Y}_{1,j}^r + v_j^1 \widehat{Y}_{2,j}^r) = 0; \;\; u_j^1 = (2\alpha j + r - j) g_{\tau_\mu^c j} + 2j g_{\tau_\mu^c\, j-1}, \; v_j^1 = g_{\tau_\mu^c j} \quad (\mu = \overline{0,3}). \tag{29}$$

При этом компонента $h_{1,\tau_\mu^c-1}^r$ при $\mu \neq 0$ не имеет ограничений, а при $\mu = 0$ отсутствует.

4.3. При $\mu = 0$ других резонансных связей нет из-за разрешимости системы, полученной после исключения первой строки из системы (9).

Пусть теперь $\mu = 1, 2, 3$. Докажем разрешимость первых $\hat\tau$ уравнений системы (9) с $\hat\tau$ неизвестными $h_{1,0}^r, \dots, h_{1,\hat\tau-1}^r$, в последнем из которых слагаемое с $h_{1,\hat\tau}^r$ перенесено в правую часть, так что оно имеет вид $c_{\hat\tau-1} h_{1,\hat\tau-2}^r + a_{\hat\tau-1} h_{1,\hat\tau-1}^r = Y_{0,\hat\tau-1}^r - b_{\hat\tau-1} h_{1,\hat\tau}^r$. Для этого достаточно показать, что $\det \Theta^{r-} \neq 0$, где

$$\Theta^{r-} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & c_{\hat\tau-3} & a_{\hat\tau-3} & b_{\hat\tau-3} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c_{\hat\tau-2} & a_{\hat\tau-2} & b_{\hat\tau-2} \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & c_{\hat\tau-1} & a_{\hat\tau-1} \end{pmatrix}_{\hat\tau\times\hat\tau}.$$

Докажем методом Гаусса, что матрица Θ^{r-} может быть преобразована в двухдиагональную матрицу $\hat\Theta^{r-}$ с главной диагональю $(d_0, \dots, d_{\hat\tau-1})$ и сохраненной наддиагональю $(b_0, \dots, b_{\hat\tau-2})$ по рекуррентным формулам

$$d_0 = a_0, \quad d_\tau = a_\tau - c_\tau b_{\tau-1}/d_{\tau-1} \quad (1 \le \tau \le \hat\tau - 1).$$

Лемма 8. *В матрице $\hat\Theta^{r-}$ диагональные элементы $d_0, \dots, d_{\hat\tau-1}$ отличны от нуля.*

Доказательство. Пусть $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$. Тогда $\alpha = -k/(2l-1),\ r = k+l$.

Введем $\xi_\tau = (2\tau+2)(\alpha(2\tau-1)+r-\tau)(r-\tau-\alpha-1)/(r-\tau-\alpha) > 0$ при $\tau = \overline{0, \tau_1^c - 2}$. Индукцией по τ можно показать с учетом леммы 7, что $d_\tau > \xi_\tau$ при $\tau = \overline{0, \tau_1^c - 2}$.

Поскольку $c_{\tau_1^c-1} b_{\tau_1^c-2} < 0$, то $d_{\tau_1^c-1} = a_{\tau_1^c-1} - c_{\tau_1^c-1} b_{\tau_1^c-2}/d_{\tau_1^c-2} < a_{\tau_1^c-1} - c_{\tau_1^c-1} b_{\tau_1^c-2}/\xi_{\tau_1^c-2} = 2\alpha(4(\tau_1^c-1)^2 + 2(\tau_1^c-1)-1) + (r-\tau_1^c+1)(4\tau_1^c-1) - 1 - (2\tau_1^c - 1)(2\alpha(\tau_1^c-1)+r-\tau_1^c+1)(r-\tau_1^c-\alpha+2)/(r-\tau_1^c-\alpha+1) = 2\alpha(2\tau_1^{c2} - 3\tau_1^c) + 2\tau_1^c(r - \tau_1^c) - \alpha(2\tau_1^c-1)/(r-\tau_1^c-\alpha+1) = -2l-1+2/(2l-1) < 0$.

Итак, доказано, что если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$, то $d_\tau \neq 0\ \ (\tau = \overline{0, \tau_1^c - 1})$.

Отличие доказательства леммы для других семейств заключается в следующем: если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$, то оценочная функция ξ_τ та же и $d_\tau > \xi_\tau > 0$ $(\tau = \overline{0, \tau_2^c - 1})$; если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^c$, то $\xi_\tau = (2\tau+3)(\alpha(2\tau+2)+r-\tau-1)$ и $d_\tau > \xi_\tau \geq 0$ $(\tau = \overline{0, \tau_3^c - 1})$. □

4.4. Возвращаясь к единственной резонансной связи (29), запишем ее в виде резонансного уравнения, предварительно разобравшись, какие множители u^1, v^1, входящие в нее, не могут равняться нулю. Будем действовать также, как в разделе 3.6.

Лемма 9. *Если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_0^c$, *то* v_0^1, u_0^1, v_1^1, u_1^1, $v_2^1 \neq 0$; $u_2^1 = 0$ *при* $\alpha = 1/4$, *и* $r = 2$.

Поэтому резонансная связь (29) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{r+1} \left(u_j^1 Y_1^{[2j, 2(r-j+1)]} + v_j^1 Y_2^{[2j+1, 2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c} \quad \text{при} \quad (\alpha, r) \notin \bigcup_{\mu=1}^{3} \{\alpha, r\}_\mu^c, \qquad (29_0)$$

где v_0^1, u_0^1, v_1^1, u_1^1, $v_2^1 \neq 0$, а другие множители v_j^1, u_j^1 могут обращаться в нуль.

Лемма 10. *Если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$, *то в* (29) $v_{\tau_1^c}^1 \dots v_{r+1}^1$, $u_{\tau_1^c}^1 \dots u_{r+1}^1 \neq 0$.

Доказательство. Имеем $\alpha = -k/(2l-1),\ \tau_1^c = l+1,\ r = k+l\ \ (l \geq k+1)$.

В (27) $p_\tau = 0$ при $\tau = l-1+(2l+k-1)/(2l+2k-1)$, а $p_{\tau-1} - \alpha = 0$ при $\tau = l+1$, значит, $c_\tau > 0$ при $\tau \geq l+2$.

Рассмотрим теперь матрицу G из (17) с $\tau_* = \hat{\tau}$, где $\hat{\tau} = \tau_1^c = l+1$. Покажем, что в (17) элементы $g_{\hat{\tau} j} > 0$ при $j = \overline{\hat{\tau}+1, r+1}$. Согласно (19) $g_{\hat{\tau} j} = g_{\hat{\tau}\, j-1} f_{\hat{\tau}\, j-1}/c_j$ для тех j, при которых $f_{\tau\, j-1} \neq 0$.

Введем $\xi_j = -2(j+1)(\alpha(2j-1)+r-j) > 0$ при $j = \overline{\hat{\tau}, r}$. Индукцией по j с учетом (18) можно показать, что $f_{\hat{\tau} j} > \xi_j$ при $j = \overline{\hat{\tau}, r}$. Тогда в (19) $g_{\hat{\tau} j} > 0$ при $j = \overline{\hat{\tau}+1, r+1}$, а $g_{\hat{\tau}\hat{\tau}} = 1$ по определению.

Итак, в (29) $v_j^1 > 0$, а $u_j^1 < 0$, поскольку $2\alpha j + r - j < 0$ при $j \geq \hat{\tau}$ и выражение $(2\alpha j + r - j) g_{\hat{\tau} j} + 2j g_{\hat{\tau} j-1} < g_{\hat{\tau} j-1}(\xi_{j-1}(2\alpha j + r - j)/c_j + 2j) = 0$ по определению ξ_j. □

В результате, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^c$, то резонансная связь (29) принимает вид

$$\sum_{j=\tau_1^c}^{r+1} \left(u_j^1 Y_1^{[2j, 2(r-j+1)]} + v_j^1 Y_2^{[2j+1, 2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}$$

при $\alpha = -k/(2l-1)$, $\tau_1^c = l+1$, $r = k+l\ \ (l \geq k+1)$; $\ v_\iota^1$, $u_\iota^1 \neq 0$ согласно лемме 10. (29_1)

Лемма 11. *Если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$, *то в* (29) $u_{\tau_2^c}^1 = 0$, *а остальные множители* $v_{\tau_2^c}^1 \dots v_{r+1}^1$, $u_{\tau_2^c+1}^1 \dots u_{r+1}^1 \neq 0$.

Доказательство. Имеем $\alpha = -k/(2l)$, $\tau_2^c = l$, $r = k + l$ $(l \geq k+1)$. В (27) $p_\tau = 0$ при $\tau = l + 1 + k/(2l + 2k)$, а $p_{\tau-1} - \alpha = 0$ при $\tau = l$, значит, $c_\tau > 0$ при $\tau \geq l + 2$.

Рассмотрим матрицу G из (17) с $\tau_* = \hat{\tau}$, где $\hat{\tau} = \tau_2^c = l$. Покажем, что в (17) $g_{\hat{\tau}j} > 0$ при $j = \overline{\hat{\tau}+1, r+1}$. Согласно (18) $g_{\hat{\tau}\,\hat{\tau}+1} = -a_{\hat{\tau}}/c_{\hat{\tau}+1} = 2l(lk + k - l)/(k^2 + lk) > 0$.

Введем $\xi_j = -2(j+1)(\alpha(2j-1) + r - j) > 0$ при $j = \overline{\hat{\tau}+1, r}$. Индукцией по j можно показать с учетом (18), что $f_{\hat{\tau}j} > \xi_j$ при $j = \overline{\hat{\tau}+1, r}$. Тогда в (19) $g_{\hat{\tau}j} > 0$ при $j = \overline{\hat{\tau}+1, r+1}$, а $g_{\hat{\tau}\hat{\tau}} = 1$ по определению.

Итак, в (29) $v_{\hat{\tau}}^1 = 1$, $u_{\hat{\tau}}^1 = 0$; $v_j^1 > 0$; $u_{\hat{\tau}+1}^1 = 2l/k > 0$, а остальные $u_j^1 < 0$, так как $2\alpha j + r - j < 0$ при $j \geq \hat{\tau} + 1$ и $(2\alpha j + r - j)g_{\hat{\tau}j} + 2jg_{\hat{\tau}j-1} < g_{\hat{\tau}j-1}(\xi_{j-1}(2\alpha j + r - j)/c_j + 2j) = 0$. □

В результате, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_2^c$, то резонансная связь (29) принимает вид

$$Y_2^{[2\tau_2^c+1, 2(r-\tau_2^c+1)]} + \sum_{j=\tau_2^c+1}^{r+1} \left(u_j^1 Y_1^{[2j, 2(r-j+1)]} + v_j^1 Y_2^{[2j+1, 2(r-j+1)]} \right) = \widetilde{c}$$

при $\alpha = -k/(2l)$, $\tau_2^c = l$, $r = k + l$ $(l \geq k+1)$; $v_\iota^1, u_\iota^1 \neq 0$ согласно лемме 11. (29_2)

Наконец, если $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_3^c$, то $\alpha = 1/(2l)$, причем $l \geq 3$, $r = l - 1$, $\tau_3^c = l$, $u_{\tau_3^c}^2 = 2\alpha\tau_3^c + r - \tau_3^c = 0$, $v_{\tau_3^c}^2 = 1$, и резонансная связь (29) принимает вид

$$Y_2^{[2l+1, 0]} = \widetilde{c} \quad \text{при} \quad \alpha = 1/(2l), \quad r = l - 1 \quad (l \geq 3). \qquad (29_3)$$

5. Полученные результаты и их практическое применение. ***5.1.*** Запишем сначала резонансные связи (7^2), (7^3) в виде резонансных уравнений:

$$(3\alpha-1)Y_1^{[3,0]} + Y_2^{[4,0]} = \tilde{c}, \quad Y_1^{[1,2]} + 6Y_1^{[3,0]} + (1-2\alpha)Y_2^{[0,4]} + 2Y_2^{[2,2]} = \tilde{c} \ \ (h_1^{[0,2]} - \forall); \quad (30^2)$$

$$\alpha^2 Y_1^{[0,4]} - Y_1^{[4,0]} + \alpha^2 Y_2^{[1,4]} - \alpha Y_2^{[3,2]} + Y_2^{[5,0]} = \tilde{c}; \quad \alpha = 1/4\colon\ Y_2^{[5,0]} = \tilde{c} \ \ (h_1^{[3,0]} - \forall). \quad (30^3)$$

5.2. Перейдем к формулировке утверждений, фактически, доказанных выше.

Теорема 1. *Система* (1) *формально эквивалентна системе* (3), *если после произвольного выбора в замене* (2) *коэффициентов* $h_1^{[0,2]}$, $h_1^{[3,0]}$ *при* $\alpha = 1/4$, $h_1^{[2\tau_1^d, 2(r-\tau_1^d)]}$ *при* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^d$ *коэффициенты квазиоднородного многочлена* $Y^{[n]}$ *удовлетворяют следующим резонансным уравнениям:* 1) *при* $n = 2$ $(r = 1,\ \nu = 0)$ — $(30_1^2), (30_2^2)$; 2) *при* $n = 3$ $(r = 1,\ \nu = 1)$ — (30_1^3), *а если* $\alpha = 1/4$ *то и* — (30_2^3); 3) *при* $n = 2r$ $(r \geq 2,\ \nu = 0)$ *в зависимости от* α *одному из уравнений* (24_2^c), (24_3^c), (24_0^0), (24_1^d), (24_2^d), *а при* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^d$ — *также уравнению* (25_1^d); 4) *при* $n = 2r + 1$ $(r \geq 2,\ \nu = 1)$ *в зависимости от значения параметра* α *одному из уравнений* (29_μ) $(\mu = \overline{0, 3})$.

Пусть $s_n = \begin{cases} 1, \text{ если } \ a)\ n=3,\ \alpha \neq 1/4, \ \ b)\ n=2r,\ (\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_1^d, \ \ c)\ n=2r+1; \\ 2, \text{ если } \ a)\ n = 2, \ \ b)\ n = 3,\ \alpha = 1/4, \ \ c)\ n = 2r,\ (\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^d. \end{cases}$

Следствие. *В системе* (3) s_n *различных резонансных коэффициентов КОМ* $Y^{[n]}$ *образуют резонансный набор, если это коэффициенты:*
1) $n = 2$: *a)* $Y_1^{[3,0]}$ *или* $Y_2^{[4,0]}$, *b) любой из* (30_2^2), *кроме* $Y_1^{[3,0]}$, *если он выбран в a);*
2) $n = 3$: *a) любой из* (30_1^3), *b) при* $\alpha = 1/4$ *любой из* (30_2^3), *кроме выбранного в a);*
3) $n = 2r$ $(r \geq 2)$: *a) любой из* $Y^{\{2r\}}$, *входящий в соответствующее резонансное уравнение* (24_2^c), (24_3^c), (24_0^0), (24_1^d), (24_2^d), *b) если* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^d$, *то любой из* $Y^{\{2r\}}$,

входящий в резонансное уравнение (25_1^d), *отличный от выбранного в* (24_1^d) *и такой, что уравнения* (24_1^d) *и* (25_1^d) *разрешимы относительно выбранных коэффициентов;* 4) $n = 2r+1$ $(r \geq 2)$*: любой из* $Y^{\{2r+1\}}$, *входящий в соответствующее резонансное уравнение* (29_μ) $(\mu \in \{0,1,2,3\})$ *с ненулевым множителем.*

Таким образом, система (3) по определению является обобщенной нормальной формой, если для каждого $n \geq 2$ все коэффициенты ее КОМ $Y^{[n]}(y)$ равны нулю, кроме s_n коэффициентов из любого резонансного набора, описанного в следствии, имеющих произвольные значения.

Теорема 2. *Зафиксируем произвольным образом структуру ОНФ* (3), *т. е. для всякого* $n \geq 2$ *зафиксируем обобщенные порядки тех* s_n *КОМ* $Y^{[n]}$, *коэффициенты которых входят в выбранный для данного n резонансный набор, зафиксируем также в замене* (2) *коэффициенты* $h_1^{[0,2]}$, $h_1^{[3,0]}$ *при* $\alpha = 1/4$ *и* $h_1^{[2\tau_1^d, 2(r-\tau_1^d)]}$ *при* $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_1^d$. *Тогда существует и единственна почти тождественная замена* (2), *приводящая систему* (1) *к ОНФ* (3) *с выбранной структурой, в которой при каждом* $n \geq 2$ *коэффициенты из выбранного резонансного набора, описанного в следствии, однозначно находятся из тех резонансных уравнений, в которые они входят.*

5.3. Применим полученные результаты для получения различных ОНФ.

Пример 1. Выберем параметр α иррациональным числом. Тогда при $\nu = 0$ пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_0^d \setminus \bigcup_{\mu=1}^3 \{\alpha, r\}_\mu^c$ и при $\nu = 1$ пара $(\alpha, r) \in \{\alpha, r\}_0^c$, где семейство $\{\alpha, r\}_0^d$ описано в разд. 3.2, семейства $\{\alpha, r\}_\mu^c$ — в разд. 3.3, а $\{\alpha, r\}_0^c$ — в разд. 4.1.

Поскольку $(\alpha, r) \notin \{\alpha, r\}_1^d$, то для каждого порядка $n \geq 4$ резонансный набор состоит из одного коэффициента. Ситуация аналогична при $n = 3$, что видно из уравнений (30^3). Однако при $n = 2$ имеются два резонансных уравнения (30^2), в первое из которых входят только коэффициенты $Y_1^{[3,0]}$ и $Y_2^{[4,0]}$, а значит, в резонансный набор обязательно входит один из них. Поэтому система (1) формально эквивалентна ОНФ (3), имеющей, например, следующие две структуры:

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_2 + Y_1^{[3,0]} y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{[1,2r]} y_1 y_2^r + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{[0,2(r+1)]} y_2^{r+1}, \qquad \dot{y}_2 = y_1 y_2;$$

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_2 + Y_1^{[3,0]} y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{[0,2(r+1)]} y_2^{r+1}, \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2 + \sum_{r=1}^{\infty} Y_2^{[0,2(r+1)]} y_2^{r+1}.$$

Это, действительно, возможно, поскольку выбранные в системах коэффициенты входят в резонансные уравнения (24_*^c) и (29_0) с ненулевыми множителями. Стоит заметить, что попытка написать ОНФ, возмущение которой не зависит от y_2 для любого иррационального α, наталкивается на сложность, поскольку в уравнении (29_0) не установлено, равны ли нулю множители u_{r+1}^0, v_{r+1}^0, стоящие при $Y_1^{[2(r+1),0]}$, $Y_2^{[2(r+1)+1,0]}$.

Пример 2. Пусть $\alpha = -1/4$. Тогда при $r = 1$ уравнения (30) принимают вид

$$n = 2\colon \quad 7Y_1^{[3,0]} - 4Y_2^{[4,0]} = \tilde{c}, \quad 2Y_1^{[1,2]} + 12Y_1^{[3,0]} + 3Y_2^{[0,4]} + 4Y_2^{[2,2]} = \tilde{c} \quad (h_1^{[0,2]} - \forall);$$
$$n = 3\colon \quad Y_1^{[0,4]} - 16Y_1^{[4,0]} + Y_2^{[1,4]} + 4Y_2^{[3,2]} + 16Y_2^{[5,0]} = \tilde{c}.$$

При $n = 2r$ $(r \geq 2,\ \nu = 0)$ параметр $\alpha = -1/4$ встречается в семействе $\{\alpha, r\}_1^d$ из раздела 3.2.

Пара $(-1/4, r) \in \{-1/4, r\}_1^d$, если $l = 2k$. В этом случае $\tau_1^d = 2k+1$, $r = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$ и резонансные уравнения (24_1^d), (25_1^d) принимают вид

$$n = 6k+2: \quad v_0^0 Y_2^{[0,6k+4]} + \sum_{j=1}^{2k+1} \left(u_j^0 Y_1^{[2j-1,6k+4-2j]} + v_j^0 Y_2^{[2j,6k+4-2j]} \right) +$$
$$+ (4k+3) Y_1^{[4k+3,2k]} + \sum_{j=2k+3}^{3k+2} \left(u_j^0 Y_1^{[2j-1,6k+4-2j]} + v_j^0 Y_2^{[2j,6k+4-2j]} \right) = \widetilde{c},$$
$$\sum_{j=2k+2}^{3k+2} \left(u_j^{0_1} Y_1^{[2j-1,6k+4-2j]} + v_j^{0_1} Y_2^{[2j,6k+4-2j]} \right) = \widetilde{c}.$$

Следовательно, при четных $n \neq 6k+2$ пара $(-1/4, r) \in \{-1/4, r\}_0^d \cap \{-1/4, r\}_0^c$ (см. разд. 3.3), и должно выполняться только основное резонансное уравнение (24_0^0).

При $n = 2r+1$ $(r \geq 2,\ \nu = 1)$ параметр $\alpha = -1/4$ встречается в семействе $\{\alpha, r\}_2^c$ из раздела 4.1. В этом случае $l = 2k$, $\tau_2^c = 2k$, $r = 3k$ $(k \in \mathbb{N})$, и единственное резонансное уравнение (29_2) принимает вид

$$n = 6k+1: \quad Y_2^{[4k+1,2k+2]} + \sum_{j=2k+1}^{3k+1} \left(u_j^2 Y_1^{[2j,6k+2-2j]} + v_j^2 Y_2^{[2j+1,6k+2-2j]} \right) = \widetilde{c}.$$

А при нечетных $n \neq 6k+1$ пара $(-1/4, r) \in \{-1/4, r\}_0^c$, и должно выполняться (29_0).

В результате система (1) формально эквивалентна, например, ОНФ (3) вида

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1^2 + y_2 + Y_1^*(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = y_1 y_2$$

с

$$Y_1^* = Y_1^{[3,0]} y_1^3 + \sum_{r=1}^{\infty} Y_1^{[1,2r]} y_1 y_2^r +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(Y_1^{[4k+2,2k]} + Y_1^{[4k+3,2k]} y_1 \right) y_1^{4k+2} y_2^k + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq 3k}}^{\infty} Y_1^{[0,2r+2]} y_2^{r+1}.$$

Здесь пары коэффициентов $Y_1^{[1,2r]}$ с $r = 3k+1$ и $Y_1^{[4k+3,2k]}$, очевидно, образуют резонансные наборы при любом $k \in \mathbb{N}$. А $Y_1^{[4k+2,2k]}$ — из уравнения (29_2).

Литература

1. Басов В. В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами. *Дифференц. уравнения* **39** (2), 154–170 (2003).

2. Басов В. В., Федотов А. А. Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 1, 13–33 (2007).

3. Басов В. В., Слуцкая А. Г. Обобщенные нормальные формы двумерных вещественных систем ОДУ с квазиоднородным полиномом в невозмущенной части. *Дифференц. уравнения и процессы управления* (4), 108–133 (2010).

4. Басов В. В., Скитович А. В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением. I. *Дифференц. уравнения* **39** (8), 1016–1029 (2003).

5. Kokubu H., Oka H., Wang D. Linear grading function and further reduction of normal forms. *J. Diff. Eq.* **132**, 293–318 (1996).

6. Богданов Р. И. Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел. *Функц. анализ и его прил.* **9** (2), 63 (1975).

7. Takens F. Singularities of vector fields. *IHES* **43** (2), 47–100 (1974).

8. Baider A., Sanders J. Further reduction of the Takens — Bogdanov normal form. *J. Diff. Eq.* **99**, 205–244 (1992).

9. Белицкий Г. Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев, Наукова думка (1979).

10. Брюно А. Д., Петрович В. Ю. Нормальные формы системы ОДУ. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 18 (2000).

Статья поступила в редакцию 28 июля 2020 г.;
после доработки 13 сентября 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Басов Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vlvlbasov@rambler.ru
Зефиров Артем Викторович — аспирант; zefirovart@gmail.com

Generalized normal forms of the systems of ordinary differential equations with a quasi-homogeneous polynomial $(\alpha x_1^2 + x_2, x_1x_2)$ in the unperturbed part

V. V. Basov, A. V. Zefirov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Basov V. V., Zefirov A. V. Generalized normal forms of the systems of ordinary differential equations with a quasi-homogeneous polynomial $(\alpha x_1^2 + x_2, x_1x_2)$ in the unperturbed part. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 12–28. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.102 (In Russian)

In this paper a study on constructive construction of the generalized normal forms (GNF) is continued. The planar real-analytical at the origin system is considered. Its unperturbed part forms a first degree quasi-homogeneous first degree polynomial $(\alpha x_1^2 + x_2,\ x_1x_2)$ of type $(1, 2)$ where parameter $\alpha \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]$. For given value of α this polynomial is a canonical form, that is an element of a class of equivalence relative to quasi-homogeneous substitutions of zero order into which any first order quasi-homogeneous polynomial of type $(1, 2)$ is divided in accordance with the chosen structural principles due to it only making sense to reduce the systems with the various canonical forms in their unperturbed part to GNF. Based on the constructive method of resonance equations and sets, the resonance equations are derived. Perturbations of the acquired system satisfies these equations if an almost identity quasi-homogeneous substitution in the given system is applied. Their validity guarantees formal equivalence of the systems. Besides, resonance sets of coefficients are specified that allows to get all possible GNF structures and prove reducibility of the given system to a GNF with any of specified structures. In addition, some examples of characteristic GNFs are provided including that with the parameter α leading to appearance of an additional resonance equation and the second nonzero coefficient of the appropriate orders in GNFs.

Keywords: generalized normal form, quasi-homogeneous polynomial, resonance equation.

References

1. Basov V. V. Generalized normal forms and formal equivalence of systems of differential equations with zero eigenvalues *Differential Equations* **39** (2), 154–170 (2003). (In Russian)

2. Basov V. V., Fedotov A. A. Generalized normal forms for two-dimensional systems of ordinary differential equations with linear and quadratic unperturbed parts. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 1, 13–33 (2007). (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **40**, iss. 1, 6–26 (2007). https://doi.org/10.3103/S1063454107010025].

3. Basov V. V., Slutskaya A. G. Generalized normal forms for two-dimensional real systems of ordinary differential equations with quasi-homogeneous polynomial in unperturbed part. *Differential Equations and Control Processes* (4), 108–133 (2010). (In Russian)

4. Basov V. V., Skitovich A. V. A generalized normal form and formal equivalence of twodimensional systems with quadratic zero approximation. I. *Differ. Uravn.* **39** (8), 1067–1081 (2003). (In Russian) [Engl. transl.: *Differ. Equ.* **39** (8), 1067–1081 (2003). https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000011279.99967.1d].

5. Kokubu H., Oka H., Wang D. Linear grading function and further reduction of normal forms. *J. Diff. Eq.* **132**, 293–318 (1996).

6. Bogdanov R. Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **9** (2), 63 (1975). (In Russian) [Engl. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **9** (2), 144–145 (1975). https://doi.org/10.1007/BF01075453].

7. Takens F. Singularities of vector fields. *IHES* **43** (2), 47–100 (1974).

8. Baider A., Sanders J. Further reduction of the Takens — Bogdanov normal form. *J. Diff. Eq.* **99**, 205–244 (1992).

9. Belickii G. R. *Normal forms, invariants and local mappings.* Kiev, Naukova Dumka Publ. (1979). (In Russian)

10. Bruno A. D., Petrovich V. Yu. Normal forms of system of ODE. *Keldysh Institute preprints*, 18 (2000). (In Russian)

Received: July 28, 2020
Revised: September 13, 2020
Accepted: September 17, 2020

Authors' information:

Vladimir V. Basov — vlvlbasov@rambler.ru
Artem V. Zefirov — zefirovart@gmail.com