УДК 519.8+330.4 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1
MSC 15A80, 90C24, 90C47, 90B35

Алгебраическое решение задачи оптимального планирования сроков проекта в управлении проектами*

Н. К. Кривулин, С. А. Губанов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кривулин Н. К., Губанов С. А.* Алгебраическое решение задачи оптимального планирования сроков проекта в управлении проектами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 73–87. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.107

Рассматривается задача временного планирования проекта, который состоит в выполнении некоторого набора работ при заданных ограничениях на время начала и завершения работ. В качестве критерия оптимальности плана берется разброс времени начала выполнения работ, который требуется минимизировать. Такие задачи возникают в управлении проектами при необходимости по технологическим, организационным, экономическим или иным причинам обеспечить по возможности одновременное начало выполнения всех работ проекта. Рассматриваемая задача планирования формулируется как минимаксная задача оптимизации с ограничениями, а затем решается при помощи методов тропической (идемпотентной) математики, которая занимается вопросами теории и приложений полуколец с идемпотентным сложением. Сначала изучается задача тропической оптимизации, заданная в терминах общего идемпотентного полуполя (идемпотентного полукольца с обратимым умножением), и находится полное аналитическое решение этой задачи. Полученный результат затем используется для построения прямого решения задачи планирования в компактной векторной форме, удобной для дальнейшего анализа решений и непосредственных вычислений. Приводится иллюстративный численный пример решения задачи оптимального планирования проекта, состоящего из четырех работ.

Ключевые слова: идемпотентное полуполе, тропическая оптимизация, минимаксная задача оптимизации, временное планирование проекта, управление проектом.

1. Введение. Управление проектом заключается в согласовании действий, выполняемых для достижения целей проекта при рациональном распределении имеющихся ресурсов [1, 2]. Для решения задач оптимального планирования сроков выполнения проекта (составления оптимального графика работ) в управлении проектами обычно применяют методы сетевого планирования, которые опираются на анализ проекта с помощью графовых и сетевых моделей (метод критического пути, метод оценки и пересмотра планов), методы линейного и смешанного целочисленного линейного программирования и другие [3–6]. Как правило, указанные методы предлагают алгоритмические решения, которые позволяют получить численные ре-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта (грант № 20-010-00145).

зультаты при помощи итерационных вычислительных процедур или установить, что решений нет.

Еще один подход к решению задач временного планирования проектов состоит в применении методов и результатов тропической оптимизации. Задачи тропической оптимизации формулируются и решаются в терминах тропической (идемпотентной) математики, которая занимается вопросами теории и приложений полуколец с идемпотентным сложением [7–12]. В таких задачах обычно требуется минимизировать (максимизировать) функции, определенные на векторах над идемпотентными полуполями (идемпотентными полукольцами, в которых операция умножения обратима), при ограничениях в виде тропических векторных уравнений и неравенств. Примеры некоторых задач тропической оптимизации можно найти, например, в [13].

Методы тропической оптимизации применяются при решении различных прикладных задач в информатике, исследовании операций, математической экономике и в других областях. Для ряда задач, включая задачи оптимального планирования сроков выполнения проекта, использование указанных методов позволяет находить новые аналитические решения в форме, удобной для последующего анализа и непосредственных вычислений [14–18].

В задачах временного планирования обычно рассматривают проект, который состоит в параллельном выполнении определенного набора работ при заданных ограничениях в форме отношений предшествования и допустимых границ для времени начала и завершения работ. Используются различные критерии оптимальности, включая разброс времени начала или завершения работ, который требуется минимизировать (или, наоборот, максимизировать). Подобные критерии возникают в задачах планирования при необходимости по технологическим, организационным, экономическим или иным причинам, по возможности, обеспечить (или, наоборот, не допустить) одновременное начало или завершение всех работ проекта. Результаты решения таких задач с помощью методов тропической оптимизации представлены в [18–20].

В настоящей работе изучается задача оптимального планирования сроков выполнения работ проекта, для которых установлены отношения предшествования «старт-старт» и «старт-финиш», а также заданы нижние границы для времени начала работ (сроки выпуска) и верхние границы для времени завершения работ (директивные сроки). В качестве критерия оптимальности, который следует минимизировать, берется максимальный разброс времени начала работ.

Сначала рассматриваемая задача планирования формулируется как минимаксная задача оптимизации с ограничениями. Затем изучается некоторая задача тропической оптимизации, заданная в терминах общего идемпотентного полуполя, для которой находится полное аналитическое решение в компактной векторной форме. Полученный результат применяется для решения исходной задачи оптимального планирования, которая для этого представляется в виде задачи тропической оптимизации. Приводится иллюстративный численный пример решения задачи оптимального планирования проекта, состоящего из четырех работ.

2. Задача временного планирования сроков проекта. Рассмотрим следующую задачу временного планирования проекта (обзор задач планирования и методов их решения можно найти, например, в [3–5]). Пусть проект состоит из n работ, которые выполняются параллельно с учетом ограничений на время начала и завершения каждой работы в форме отношений предшествования «старт-старт» и «старт-финиш», и границ для самого раннего допустимого времени начала работ (сроки выпуска) и самого позднего допустимого времени завершения работ (директивные сроки). Требуется определить время начала каждой работы так, чтобы с учетом ограничений минимизировать разброс времени начала работ.

Также, как в работах [14–18], введем обозначения, которые позволяют записать задачу планирования в виде, удобном для дальнейшего представления в форме задачи тропической оптимизации. Для каждой работы $i = 1, \dots, n$ обозначим время начала и время завершения через x_i и y_i. Пусть g_i указывает самое раннее допустимое время начала работы, а f_i — наиболее позднее допустимое время завершения работы, которые задают для величин x_i и y_i нижнюю и верхнюю границы:

$$g_i \leq x_i, \qquad y_i \leq f_i. \tag{1}$$

Определим ограничения «старт-старт» для работы i в виде неравенств $b_{ij} + x_j \leq x_i$ для всех $j = 1, \dots, n$, где b_{ij} обозначает минимально допустимый временной интервал между началом работы i и началом работы j. Если величина b_{ij} не задана, то положим $b_{ij} = -\infty$. Объединение неравенств по всем j дает эквивалентное неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i. \tag{2}$$

Чтобы задать ограничения «старт-финиш», обозначим минимальный допустимый интервал между временем начала работы i и завершением работы j через c_{ij} (положим $c_{ij} = -\infty$, если интервал не задан). Тогда все отношения предшествования «старт-финиш» для работы i можно представить с помощью неравенства

$$\max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) \leq y_i.$$

Учитывая, что должно выполняться неравенство $y_i \leq f_i$, получаем ограничение

$$\max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) \leq f_i. \tag{3}$$

Критерием оптимальности плана является максимальный разброс времени начала всех работ, который должен быть минимальным. Представим этот критерий в виде

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i = \max_{1 \leq i \leq n} x_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-x_i). \tag{4}$$

Сформулируем задачу составления оптимального плана работ в соответствии с указанными ограничениями и введенным критерием: при заданных значениях параметров b_{ij}, c_{ij}, g_i и f_i, где $i, j = 1, \dots, n$, найти величины x_i, которые обеспечивают

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_{1 \leq i \leq n} x_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-x_i); \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i, \quad \max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) \leq f_i, \\ & g_i \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

Нетрудно понять, что задача (5) может быть записана в форме задачи линейного программирования и решена в численном виде с помощью известных вычислительных процедур, таких как симплекс-алгоритм [21–23] и алгоритм Кармаркара

[24]. В следующих разделах для построения прямого аналитического решения рассматриваемой задачи будут использованы методы и результаты тропической оптимизации.

3. Элементы тропической алгебры. В этом разделе приводится краткий обзор основных алгебраических определений, обозначений и предварительных результатов, которые используются ниже для построения решения задачи тропической оптимизации и ее приложения к задаче планирования. Дальнейшие сведения по теории и приложениям тропической (идемпотентной) математики можно найти, например, в работах [7–12].

Пусть множество $\mathbb{X}$ замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ и включает их нейтральные элементы нуль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Сложение обладает свойством идемпотентности, что означает выполнение равенства $x \oplus x = x$ для любого $x \in \mathbb{X}$, а умножение является дистрибутивным относительно сложения и обратимым, т. е. для любого ненулевого x существует элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$. Алгебраическую систему $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ обычно называют идемпотентным полуполем. Знак умножения $\otimes$ далее для удобства будет опускаться.

Операция сложения $\oplus$ задает на $\mathbb{X}$ частичный порядок по правилу: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. В терминах этого порядка для сложения и умножения выполняются свойства монотонности, по которым для любых $x, y, z \in \mathbb{X}$ при условии $x \leq y$ справедливы неравенства $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $xz \leq yz$. Операция обращения является антитонной: для всех $x, y \neq \mathbb{0}$ из неравенства $x \leq y$ следует $x^{-1} \geq y^{-1}$.

Сложение имеет экстремальное свойство, которое состоит в том, что для любых $x, y \in \mathbb{X}$ выполняются неравенства $x \leq x \oplus y$ и $y \leq x \oplus y$. Кроме того, неравенство $x \oplus y \leq z$ эквивалентно системе двух неравенств $x \leq z$ и $y \leq z$. Далее будем считать, что указанный частичный порядок дополнен на $\mathbb{X}$ до линейного порядка.

Для каждого $x \neq \mathbb{0}$ и натурального p целая степень определяется обычным путем: $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x^{p-1}x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$ и $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$. Предполагается, что операция возведения в степень естественным образом распространяется на случай рационального показателя.

Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ и рационального числа $\alpha > 0$ справедливо биномиальное тождество $(x \oplus y)^\alpha = x^\alpha \oplus y^\alpha$, из которого вытекает тропический аналог неравенства между арифметическим и геометрическим средними в форме $x \oplus y \geq (xy)^{1/2}$. Эти тождество и неравенство прямо обобщаются на случай произвольного числа слагаемых.

Примером вещественного полуполя, которое обычно называют $(\max, +)$-алгеброй, является алгебраическая система $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle$, где сложение $\oplus$ определено как $\max$, умножение $\oplus$ как $+$, в роли нуля $\mathbb{0}$ выступает $-\infty$, в роли единицы $\mathbb{1}$ — число 0. Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует обратное x^{-1}, которому соответствует противоположное число $-x$ в обычной алгебре. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ степени x^y соответствует арифметическое произведение xy. Определяемое идемпотентным сложением отношение порядка соответствует обычному линейному порядку на $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц, которые состоят из m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$. Матрица, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, является нулевой. Матрица, которая не имеет нулевых столбцов, называется регулярной по столбцам.

Сложение и умножение матриц, а также умножение матрицы на скаляр выполняются по обычным правилам с заменой арифметических операций $+$ и $\times$ на операции $\oplus$ и $\otimes$. Отношение порядка, введенное выше, и связанные с ним свойства операций обобщаются на матрицы и понимаются покомпонентно.

Рассмотрим квадратные матрицы из множества $\mathbb{X}^{n\times n}$. Единичной является матрица $\boldsymbol{I}$ с элементами, равными $\mathbb{1}$ на главной диагонали и $\mathbb{0}$ вне ее.

Для квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ и натурального p неотрицательная целая степень определяется как обычно: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}$. Для степени суммы матриц справедливо биномиальное тождество

$$(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})^p = \boldsymbol{B}^p \oplus \bigoplus_{k=1}^{p} \bigoplus_{i_0+\cdots+i_k=p-k} \boldsymbol{B}^{i_0}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}).$$

След матрицы $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{X}^{n\times n}$ вычисляется по формуле $\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = a_{11}\oplus\cdots\oplus a_{nn}$. Для любых подходящих по размеру матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ справедливы равенства:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{A}\oplus\operatorname{tr}\boldsymbol{B}, \qquad \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}), \qquad \operatorname{tr}(x\boldsymbol{A}) = x\operatorname{tr}\boldsymbol{A}.$$

Для любой матрицы $\boldsymbol{A}\in\mathbb{X}^{n\times n}$ можно ввести тропические аналоги определителя и спектрального радиуса матрицы, которые вычисляются соответственно по формулам

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{A}\oplus\cdots\oplus\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^n, \qquad \lambda = \operatorname{tr}\boldsymbol{A}\oplus\cdots\oplus\operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n).$$

Если выполняется условие $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A})\leq\mathbb{1}$, то определена матрица Клини в виде

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I}\oplus\boldsymbol{A}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Применяя биномиальное тождество для матриц, можно представить матрицу Клини для суммы матриц $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{X}^{n\times n}$ следующим образом:

$$(\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^* \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=0}^{n-k-1}\bigoplus_{i_0+i_1+\cdots+i_k=m} \boldsymbol{B}^{i_0}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}). \tag{6}$$

Обозначим множество векторов-столбцов из n элементов через $\mathbb{X}^n$. Вектор, не имеющий нулевых компонент, называется регулярным.

Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ транспонированный вектор обозначается через $\boldsymbol{x}^T$. Для ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x}=(x_i)\in\mathbb{X}^n$ определим его мультипликативно сопряженный вектор-строку $\boldsymbol{x}^-=(x_i^-)$, где $x_i^-=x_i^{-1}$, если $x_i\neq\mathbb{0}$, и $x_i^-=\mathbb{0}$ в противном случае. Вектор, состоящий из единиц, обозначим через $\mathbf{1}=(\mathbb{1},\ldots,\mathbb{1})^T$.

Для вектора $x=(x_i)\in\mathbb{X}^n$ и матрицы $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{X}^{m\times n}$ введем тропические аналоги нормы вектора и матрицы с помощью формул

$$\|\boldsymbol{x}\| = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{1}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\mathbf{1}, \qquad \|\boldsymbol{A}\| = \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij} = \mathbf{1}^T\boldsymbol{A}\mathbf{1}.$$

4. Задачи тропической оптимизации. Задачи оптимизации, которые формулируются и решаются в терминах тропической алгебры (задачи тропической оптимизации), находят применение в различных областях техники, экономики и управления. С помощью методов тропической оптимизации нередко можно построить новое прямое аналитическое решение задач, для которых известны только алгоритмические численные решения, включая задачи оптимального планирования сроков выполнения проектов (см., например, [13–18]).

Рассмотрим пример задачи тропической оптимизации и ее решения. Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и векторы $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{X}^{n}$. Требуется найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, которые решают задачу

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}; \\
& \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Для описания решения задачи (7) введем обозначения:

$$
\boldsymbol{S}_k = \bigoplus_{0 \leq i_1 + \cdots + i_k \leq n-k} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}, \qquad k = 1, \ldots, n; \tag{8}
$$

$$
\boldsymbol{T}_k = \bigoplus_{0 \leq i_0 + i_1 + \cdots + i_k \leq n-k-1} \boldsymbol{B}^{i_0}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}), \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{9}
$$

Решение задачи можно получить как прямое следствие результатов, полученных в [14, 16], и представить в следующей форме.

Теорема. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— матрица со спектральным радиусом* $\lambda > \mathbb{0}$, *а* $\boldsymbol{B}$ *— матрица, для которой* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. *Пусть* $\boldsymbol{C}$ *— регулярная по столбцам матрица,* $\boldsymbol{g}$ *— вектор, а* $\boldsymbol{f}$ *— регулярный вектор такие, что* $\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$.

Тогда минимальное значение целевой функции в задаче (7) *равно*

$$
\theta = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_k) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{g})^{1/k}, \tag{10}
$$

а все регулярные решения записываются в параметрической форме

$$
\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \tag{11}
$$

где $\boldsymbol{u}$ *— регулярный вектор параметров, который удовлетворяет условиям*

$$
\boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}. \tag{12}
$$

Заметим, что условие $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$ имеет смысл требования наличия регулярных решений $\boldsymbol{x}$ у неравенства $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}$. Условие $\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$ обеспечивает существование общих регулярных решений для всех неравенств системы ограничений задачи.

Чтобы применить результат теоремы для решения задачи планирования, потребуется изучить частный случай задачи (7). Положим $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{T}$ и рассмотрим задачу:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{T} \boldsymbol{x}; \\
& \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

В следующем разделе для задачи (13) будет получено прямое решение, представленное в компактной векторной форме.

5. Решение задачи оптимизации. Для решения задачи тропической оптимизации (13) будем использовать результат вышеприведенной теоремы. Полученное решение затем представим в более компактном виде, опираясь на особую форму целевой функции задачи. Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $\boldsymbol{B}$ *— матрица, для которой* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. *Пусть* $\boldsymbol{C}$ *— регулярная по столбцам матрица,* $\boldsymbol{g}$ *— вектор, а* $\boldsymbol{f}$ *— регулярный вектор такие, что* $\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$.

Тогда минимальное значение целевой функции в задаче (13) *равно*

$$\theta = \|\boldsymbol{B}^{*}\| \oplus \bigoplus_{0 \leq i+j \leq n-2} \|\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{i}\|\|\boldsymbol{B}^{j}\boldsymbol{g}\|, \tag{14}$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}^{*} \oplus \bigoplus_{0 \leq i+j \leq n-2} \theta^{-1}\boldsymbol{B}^{i}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{j}, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{u}$ *— любой регулярный вектор, который удовлетворяет условиям*

$$\boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}\boldsymbol{G})^{-}. \tag{16}$$

Доказательство. В силу того, что задача (13) имеет вид (7), применим теорему, приведенную выше. Для этого сначала найдем минимум θ по формуле (10). Подставляя $\boldsymbol{A} = \mathbf{1}\mathbf{1}^{T}$ в выражение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}$ и записывая скалярные множители в виде нормы матриц, получим

$$\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_k} = (\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_k}. \tag{17}$$

Тогда равенство (8) принимает вид

$$\boldsymbol{S}_k = \bigoplus_{0 \leq i_1 + \cdots + i_k \leq n-k} (\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_k}.$$

Найдем след матрицы под знаком суммы. С учетом свойств следа имеем

$$\mathrm{tr}((\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_k}) = \|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_k}\|.$$

С помощью полученного результата запишем сумму

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_k) = \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{0 \leq i_1 + \cdots + i_k \leq n-k} (\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_k}\|)^{1/k}.$$

Рассмотрим первое слагаемое, соответствующее $k = 1$ в суммах слева и справа,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_1) = \bigoplus_{0 \leq i_1 \leq n-1} \|\boldsymbol{B}^{i_1}\|.$$

Покажем, что другие слагаемые по величине не больше первого. Действительно, применяя неравенство между геометрическим и арифметическим средними, получим

$$(\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_k}\|)^{1/k} \leq \|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \oplus \cdots \oplus \|\boldsymbol{B}^{i_k}\|,$$

откуда следует, что при всех $k = 2, \ldots, n$ выполняется

$$\bigoplus_{0 \leq i_1 + \cdots + i_k \leq n-k} (\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_k}\|)^{1/k} \leq \bigoplus_{i=0}^{n-k} \|\boldsymbol{B}^{i}\| \leq \bigoplus_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{B}^{i}\| = \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_1).$$

В силу того, что первое слагаемое доминирует над остальными, в результате имеем

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_k) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}_1) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{B}^i\| = \|\boldsymbol{B}^*\|.$$

Теперь, используя равенство (17), запишем (9) в виде

$$\boldsymbol{T}_k = \bigoplus_{0 \le i_0+i_1+\cdots+i_k \le n-k-1} (\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|) \boldsymbol{B}^{i_0} \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{B}^{i_k}.$$

После умножения матрицы под знаком суммы слева на $\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}$ и справа на $\boldsymbol{g}$ и замены скалярных множителей на норму соответствующих векторов получим равенство

$$\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}(\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\boldsymbol{B}^{i_0}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{B}^{i_k}\boldsymbol{g} = \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{i_0}\|(\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\|\boldsymbol{B}^{i_k}\boldsymbol{g}\|.$$

С учетом этого равенства составим сумму

$$\bigoplus_{k=1}^{n-1}(\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{g})^{1/k} = \bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{0 \le i_0+i_1+\cdots+i_k \le n-k-1} (\|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{i_0}\|(\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\|\boldsymbol{B}^{i_k}\boldsymbol{g}\|)^{1/k}$$

и рассмотрим первое слагаемое, которое соответствует $k=1$ и имеет вид

$$\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{g} = \bigoplus_{0 \le i_0+i_1 \le n-2} \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{i_0}\|\|\boldsymbol{B}^{i_1}\boldsymbol{g}\|.$$

Проверим, что величина других слагаемых не больше суммы $\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}_1) \oplus \boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{g}$. Применяя неравенство между геометрическим и арифметическим средними, получим

$$(\|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{i_0}\|(\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\|\boldsymbol{B}^{i_k}\boldsymbol{g}\|)^{1/k} \le (\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \oplus \cdots \oplus \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|) \oplus \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{i_0}\|\|\boldsymbol{B}^{i_k}\boldsymbol{g}\|.$$

Следовательно, для всех $k = 2, \ldots, n$ будет выполняться неравенство

$$\bigoplus_{0 \le i_0+i_1+\cdots+i_k \le n-k-1} (\|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{i_0}\|(\|\boldsymbol{B}^{i_1}\| \cdots \|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\|\boldsymbol{B}^{i_k}\boldsymbol{g}\|)^{1/k} \le$$

$$\le \bigoplus_{i=0}^{n-1} \|\boldsymbol{B}^i\| \oplus \bigoplus_{0 \le i+j \le n-2} \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^i\|\|\boldsymbol{B}^j\boldsymbol{g}\| = \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}_1) \oplus \boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{g}.$$

С учетом последнего соотношения имеем двойное неравенство

$$\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{g} \le \bigoplus_{k=1}^{n-1}(\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{g})^{1/k} \le \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}_1) \oplus \boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{g}.$$

Чтобы получить (14), осталось объединить полученные результаты:

$$\theta = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_k) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1}(\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{g})^{1/k} = \|\boldsymbol{B}^*\| \oplus \bigoplus_{0 \le i+j \le n-2} \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^i\|\|\boldsymbol{B}^j\boldsymbol{g}\|.$$

Перейдем к параметрическому представлению всех решений задачи на основе формул (11) и (12). Составим матрицу Клини $(\theta^{-1}\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B})^{*}=(\theta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\oplus\boldsymbol{B})^{*}$ и воспользуемся тождеством (6). Применяя, как и раньше, равенство (17) для преобразования выражения под знаком суммы, окончательно получим

$$(\theta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\oplus\boldsymbol{B})^{*}=\boldsymbol{B}^{*}\oplus\bigoplus_{k=1}^{n-1}\bigoplus_{m=0}^{n-k-1}\bigoplus_{i_0+\ldots+i_k=m}\theta^{-m}\boldsymbol{B}^{i_0}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_k}(\|\boldsymbol{B}^{i_1}\|\cdots\|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|).$$

Исследуем сумму в правой части и рассмотрим слагаемое при $k=1$ в виде

$$\bigoplus_{m=0}^{n-2}\bigoplus_{i_0+i_1=m}\theta^{-1}\boldsymbol{B}^{i_0}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_1}=\bigoplus_{0\leq i+j\leq n-2}\theta^{-1}\boldsymbol{B}^{i}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{j}.$$

Заметим, что из найденного выражения (14) для минимума целевой функции задачи следует, что для всех $i=0,\ldots,n-1$ выполняются неравенства $\theta\geq\|\boldsymbol{B}^{*}\|\geq\|\boldsymbol{B}^{i}\|$ и, в частности, что $\theta\geq\|\boldsymbol{I}\|=\mathbb{1}>\mathbb{0}$. Учитывая, что тогда для всех i будут справедливы неравенства $\theta^{-1}\|\boldsymbol{B}^{i}\|\leq\mathbb{1}$, получим неравенство

$$\theta^{-1}\boldsymbol{B}^{i_0}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_k}(\theta^{-1}\|\boldsymbol{B}^{i_1}\|\cdots\theta^{-1}\|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\leq\theta^{-1}\boldsymbol{B}^{i_0}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_k}.$$

С учетом последнего неравенства для всех $k=2,\ldots,n-1$ выполняется

$$\bigoplus_{m=0}^{n-k-1}\bigoplus_{i_0+\ldots+i_k=m}\theta^{-m}\boldsymbol{B}^{i_0}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{i_k}(\|\boldsymbol{B}^{i_1}\|\cdots\|\boldsymbol{B}^{i_{k-1}}\|)\leq\bigoplus_{0\leq i+j\leq n-2}\theta^{-1}\boldsymbol{B}^{i}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{j},$$

откуда следует, что слагаемое суммы для $k=1$ доминирует над остальными, которые поэтому можно отбросить. Тогда матрица Клини приобретает вид

$$(\theta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\oplus\boldsymbol{B})^{*}=\boldsymbol{B}^{*}\oplus\bigoplus_{0\leq i+j\leq n-2}\theta^{-1}\boldsymbol{B}^{i}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{j}=\boldsymbol{G}.$$

Подставляя полученное выражение в формулы (11) и (12), приходим к параметрическому описанию решений задачи в виде (15) и (16). □

Оценим вычислительную сложность построенного решения. Сначала заметим, что матрица $\boldsymbol{B}^{*}$ находится путем прямых матричных вычислений за $O(n^4)$ скалярных операций или с помощью алгоритма Флойда — Уоршелла [22] за $O(n^3)$ операций.

При условии, что имеются все необходимые степени матрицы $\boldsymbol{B}$, определение значений $\|\boldsymbol{B}^{*}\|$ и $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B})$ дополнительно потребует $O(n^2)$ скалярных операций. Вычисление векторов $\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{i}$ и $\boldsymbol{B}^{j}\boldsymbol{g}$ и их норм имеет вычислительную сложность порядка $O(n^3)$.

Вычисление всех матриц $\boldsymbol{B}^{i}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}^{j}$ можно осуществить следующим образом: сначала найти все векторы $\boldsymbol{B}_i\mathbf{1}$ и $\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{B}_j$, выполнив $O(n^3)$ операций, а затем перемножить соответствующие векторы за не более чем $O(n^4)$ операций. При этом общий порядок сложности таких вычислений (и всего решения в целом) не будет превосходить $O(n^4)$.

6. Приложение к задаче оптимального планирования. Вернемся к задаче оптимального планирования (5) и запишем ее в терминах $(\max,+)$-алгебры (полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$) в виде задачи тропической оптимизации. Чтобы сформулировать задачу в векторной форме, введем матрицы и векторы:

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij}), \qquad \boldsymbol{C} = (c_{ij}), \qquad \boldsymbol{x} = (x_i), \qquad \boldsymbol{g} = (g_i), \qquad \boldsymbol{f} = (f_i).$$

Используя операции $(\max, +)$-алгебры для того, чтобы представить целевую функцию (4) в скалярной, а затем в векторной формах, получим

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq n} x_i \bigoplus_{1 \leq j \leq n} x_j^{-1} = \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{x}.$$

Ограничения (2), (3) и (1) в скалярной форме принимают вид

$$\bigoplus_{1 \leq j \leq n} b_{ij}x_j \leq x_i, \qquad \bigoplus_{1 \leq j \leq n} c_{ij}x_j \leq f_i, \qquad g_i \leq x_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

После перехода к векторным обозначениям имеем неравенства

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x}.$$

Записывая вместе целевую функцию и ограничения, приходим к задаче

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{x}; \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Для решения полученной задачи с помощью вышеприведенной леммы, необходимо проверить условия леммы. Заметим, что в контексте задач временного планирования в управлении проектами элементы неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$ определяют время начала работ, а элементы заданного вектора $\boldsymbol{f}$ показывают самое позднее время завершения работ. Поскольку указанное время естественно считать определенным (т. е. большим, чем $\mathbb{0} = -\infty$), требование регулярности векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{f}$ оказывается выполненным. Условие $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$ обеспечивает непротиворечивость отношений предшествования «старт-старт», а условие $\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$ — непротиворечивость отношений «старт-старт», «старт-финиш» вместе с заданными сроками выпуска и директивными сроками работ.

Пусть условия леммы выполнены. Тогда ее применение позволяет вычислить минимальный разброс θ времени начала работ по формуле (14). Все векторы $\boldsymbol{x}$, которые задают время начала работ с минимальным разбросом, записываются в параметрической форме с помощью соотношений (15) и (16).

Для иллюстрации полученного результата и демонстрации вычислительной техники приведем пример решения задачи планирования проекта, состоящего из $n = 4$ работ.

Пример. Рассмотрим проект, в котором ограничения заданы с использованием обозначения $\mathbb{0} = -\infty$ при помощи следующих матриц и векторов:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 1 & 0 & 0 & \mathbb{0} \\ -2 & -1 & 0 & \mathbb{0} \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ 1 & 3 & \mathbb{0} & 2 \\ 4 & \mathbb{0} & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Чтобы применить результат леммы, сначала проверим выполнение ее условий. Вычисление степеней матрицы $\boldsymbol{B}$ дает результат:

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \mathbb{0} \\ 1 & 0 & 0 & \mathbb{0} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbb{0} \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{B}^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \mathbb{0} \\ 1 & 0 & 0 & \mathbb{0} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbb{0} \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем следы $\operatorname{tr}\boldsymbol{B} = \operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2 = \operatorname{tr}\boldsymbol{B}^3 = \operatorname{tr}\boldsymbol{B}^4 = 0$. После вычисления величины

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{B} \oplus \operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2 \oplus \operatorname{tr}\boldsymbol{B}^3 \oplus \operatorname{tr}\boldsymbol{B}^4 = 0$$

заключаем, что условие $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1} = 0$ выполняется. Далее находим

$$\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B}^2 \oplus \boldsymbol{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \mathbb{0} \\ 1 & 0 & 0 & \mathbb{0} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbb{0} \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{g} = -1,$$

откуда следует, что условие $\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{g} = -1 < \mathbb{1}$ также выполнено.

Определим минимальный разброс θ времени начала работ. Сначала построим вспомогательные векторы:

$$\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим нормы $\|\boldsymbol{B}^*\| = 2$, $\|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\| = \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^2\| = -1$, а также нормы $\|\boldsymbol{g}\| = 0$, $\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}\| = \|\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{g}\| = 2$. Окончательно находим θ по формуле

$$\theta = \|\boldsymbol{B}^*\| \oplus \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{g}\| \oplus \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{g}\| \oplus \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}\| \oplus \\ \oplus \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^2\|\|\boldsymbol{g}\| \oplus \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\|\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{g}\| \oplus \|\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{g}\| = 2.$$

Опишем все решения $\boldsymbol{x}$ задачи в параметрической форме. Вычисление вспомогательных матриц дает результат:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T = \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем следующие матрицу и вектор:

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}^* \oplus (-2)(\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \boldsymbol{B}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \boldsymbol{B}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{B}^2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{G})^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно записать все решения $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ с помощью вектора параметров $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ в форме

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{u} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что все столбцы матрицы $\boldsymbol{G}$ коллинеарны, ее можно представить в виде

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Введем скалярный параметр $u = u_1 \oplus (-1)u_2 \oplus u_3 \oplus (-2)u_4$. После замены вектора параметров $\boldsymbol{u}$ на новый параметр u и вычисления границ для u получим решение

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u, \qquad 0 \leq u \leq 1.$$

В терминах обычных арифметических операций координаты вектора $\boldsymbol{x}$ записываются в виде

$$x_1 = u, \qquad x_2 = u + 1, \qquad x_3 = u, \qquad x_4 = u + 2, \qquad 0 \leq u \leq 1.$$

Авторы благодарят рецензентов за ряд важных замечаний и предложений, которые были учтены при подготовке окончательного варианта статьи.

Литература

1. Троцкий М., Груча Б., Огонек К. *Управление проектами*, пер. с польск. Москва, Финансы и статистика (2006).

2. Kerzner H. *Project Management.* 10th ed. Hoboken, Wiley (2010).

3. Pinedo M. L. *Scheduling.* 3rd ed. New York, Springer (2008).

4. Vanhoucke M. *Project Management with Dynamic Scheduling.* 2nd ed. Berlin, Springer (2012). https://doi.org/10.1007/978-3-642-40438-2

5. Blazewicz J., Ecker K. H., Pesch E., Schmidt G., Sterna M., Weglarz J. *Handbook on Scheduling.* In: International Handbooks on Information Systems. Cham, Springer (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-319-99849-7

6. Бурков В. Н., Буркова И. В., Засканов В. Г. Метод сетевого программирования в задачах календарного планирования. *Автомат. и телемех.*, (6), 17–28 (2020). https://doi.org/10.31857/S0005231020060025

7. Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P. *Synchronization and Linearity.* In: Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester, Wiley (1993).

8. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* Москва, Физматлит (1994).

9. Golan J. S. *Semirings and Affine Equations Over Them.* In: Mathematics and Its Applications, vol. 556. New York, Springer (2003). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

10. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. *Max Plus at Work.* In: Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton, Princeton Univ. Press (2006).

11. Gondran M., Minoux M., *Graphs, Dioids and Semirings.* In: Operations Research/Computer Science Interfaces, vol. 41. New York, Springer (2008). https://doi.org/10.1007/978-0-387-75450-5

12. Butkovič P. *Max-linear Systems.* In: Springer Monographs in Mathematics. London, Springer (2010). https://doi.org/10.1007/978-1-84996-299-5

13. Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints. *Optimization* **64** (5), 1107–1129 (2015). https://doi.org/10.1080/02331934.2013.840624

14. Krivulin N. A constrained tropical optimization problem: complete solution and application example. In: G. L. Litvinov, S. N. Sergeev (eds). *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications.* Contemporary Mathematics, vol. 616, 163–177. Providence, AMS (2014). https://doi.org/10.1090/conm/616/12308

15. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems. *Linear Algebra Appl.* **468**, 211–232 (2015). https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

16. Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling. *Comput. Manag. Sci.* **14** (1), 91–113 (2017). https://doi.org/10.1007/s10287-016-0259-0

17. Krivulin N. Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan. *Ann. Oper. Res.* **256** (1), 75–92 (2017). https://doi.org/10.1007/s10479-015-1939-9

18. Krivulin N. Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling. *Optimization* **66** (2), 205–224 (2017). https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1264946

19. Кривулин Н. К., Губанов С. А. Решение задачи сетевого планирования на основе методов тропической оптимизации. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* **12**, вып. 3, 62–72 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2016.306

20. Кривулин Н. К., Губанов С. А. Использование методов тропической оптимизации в задачах сетевого планирования. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* **13**, вып. 4, 384–397 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.405

21. Kantorovich L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Sci.* **6** (4), 366–422 (1960). https://doi.org/10.1287/mnsc.6.4.366

22. Романовский И. В. *Алгоритмы решения экстремальных задач.* Москва, Наука (1977).

23. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. *Линейное программирование.* 3-е изд. Москва, Факториал Пресс (2008).

24. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica* **4** (4), 373–395 (1984). https://doi.org/10.1007/BF02579150

Статья поступила в редакцию 30 мая 2020 г.;
после доработки 7 сентября 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Кривулин Николай Кимович — д-р физ.-мат. наук, проф.; nkk@math.spbu.ru
Губанов Сергей Александрович — аспирант; segubanov@mail.ru

Algebraic solution of a problem of optimal project scheduling in project management*

N. K. Krivulin, S. A. Gubanov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Krivulin N. K., Gubanov S. A. Algebraic solution of a problem of optimal project scheduling in project management. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 73–87.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.107 (In Russian)

A problem of optimal scheduling is considered for a project that consists of a certain set of works to be performed under given constraints on the times of start and finish of the works. As the optimality criterion for scheduling, the maximum deviation of the start time of works is taken to be minimized. Such problems arise in project management when it is required, according to technological, organizational, economic or other reasons, to provide, wherever possible, simultaneous start of all works. The scheduling problem under consideration is formulated as a constrained minimax optimization problem and then solved using methods of tropical (idempotent) mathematics which deals with the theory and applications of semirings with idempotent addition. First, a tropical optimization problem is investigated defined in terms of a general idempotent semifield (an idempotent semiring with invertible multiplication), and a complete analytical solution of the problem is derived. The result obtained is then applied to find a direct solution of the scheduling problem in a compact vector form ready for further analysis of solutions and straightforward computations. As an illustration, a numerical example of solving optimal scheduling problem is given for a project that consists of four works.

Keywords: idempotent semifield, tropical optimization, minimax optimization problem, project scheduling, project management.

References

1. Trocki M., Grucza B., Ogonek K. *Zarządzanie Projectami.* Warszawa, PWE (2003). (In Polish) [Russ. ed.: *Upravlenie proektami.* Moscow, Finansy i statistika Publ. (2006)].

2. Kerzner H. *Project Management.* 10th ed. Hoboken, Wiley (2010).

3. Pinedo M. L. *Scheduling.* 3rd ed. New York, Springer (2008).

4. Vanhoucke M. *Project Management with Dynamic Scheduling.* 2nd ed. Berlin, Springer (2012). https://doi.org/10.1007/978-3-642-40438-2

5. Blazewicz J., Ecker K. H., Pesch E., Schmidt G., Sterna M., Weglarz J. *Handbook on Scheduling.* In: International Handbooks on Information Systems. Cham, Springer (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-319-99849-7

6. Burkov V. N., Burkova I. V., Zaskanov V. G. The network programming method in project scheduling problems. *Avtomat. i Telemekh.*, (6), 17–28 (2020). https://doi.org/10.31857/S0005231020060025 (In Russian) [Engl. transl.: *Autom. Remote Control* **81** (6), 978–987 (2020). https://doi.org/10.1134/S000511792006003X].

7. Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P. *Synchronization and Linearity.* In: Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester, Wiley (1993).

8. Maslov V. P., Kolokoltsov V. N. *Idempotent analysis and its applications to optimal control theory.* Moscow, Nauka Publ. (1994). (In Russian)

9. Golan J. S. *Semirings and Affine Equations Over Them.* In: Mathematics and Its Applications, vol. 556. New York, Springer (2003). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

10. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. *Max Plus at Work.* In: Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton, Princeton Univ. Press (2006).

11. Gondran M., Minoux M., *Graphs, Dioids and Semirings.* In: Operations Research/Computer Science Interfaces, vol. 41. New York, Springer (2008). https://doi.org/10.1007/978-0-387-75450-5

*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant No. 20-010-00145).

12. Butkovič P. *Max-linear Systems*. In: Springer Monographs in Mathematics. London, Springer (2010). https://doi.org/10.1007/978-1-84996-299-5

13. Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints. *Optimization* **64** (5), 1107–1129 (2015). https://doi.org/10.1080/02331934.2013.840624

14. Krivulin N. A constrained tropical optimization problem: complete solution and application example. In: G. L. Litvinov, S. N. Sergeev (eds). *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications.* Contemporary Mathematics, vol. 616, 163–177. Providence, AMS (2014). https://doi.org/10.1090/conm/616/12308

15. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems. *Linear Algebra Appl.* **468**, 211–232 (2015). https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

16. Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling. *Comput. Manag. Sci.* **14** (1), 91–113 (2017). https://doi.org/10.1007/s10287-016-0259-0

17. Krivulin N. Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan. *Ann. Oper. Res.* **256** (1), 75–92 (2017). https://doi.org/10.1007/s10479-015-1939-9

18. Krivulin N. Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling. *Optimization* **66** (2), 205–224 (2017). https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1264946

19. Krivulin N. K., Gubanov S. A. Solution of a project scheduling problem by using methods of tropical mathematics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer science. Control processes* **12**, iss. 3, 62–72 (2016). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2016.306 (In Russian)

20. Krivulin N. K., Gubanov S. A. The use of tropical optimization methods in problems of project scheduling. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes* **13**, iss. 4, 384–397 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.405 (In Russian)

21. Kantorovich L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Sci.* **6** (4), 366–422 (1960). https://doi.org/10.1287/mnsc.6.4.366

22. Romanovskiy I. V. *Algorithms for Solving Extremal Problems.* Moscow, Nauka Publ. (1977). (In Russian)

23. Vasilyev F. P., Ivanitskiy A. Y. *Linear Programming.* 3rd ed. Moscow, Factorial Press (2008). (In Russian)

24. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica* **4** (4), 373–395 (1984). https://doi.org/10.1007/BF02579150

Received: May 30, 2020
Revised: September 7, 2020
Accepted: September 17, 2020

Authors' information:

Nikolay K. Krivulin — nkk@math.spbu.ru
Sergey A. Gubanov — segubanov@mail.ru