УДК 519.224 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1
MSC 60D05, 60F05, 60G70

Посвящается памяти Я. Ю. Никитина

Предельные теоремы для обобщенных периметров случайных вписанных многоугольников. II*

Е. Н. Симарова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
Санкт-Петербургский международный математический институт им. Леонарда Эйлера,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, 14 линия В. О., 29Б

Для цитирования: *Симарова Е. Н.* Предельные теоремы для обобщенных периметров случайных вписанных многоугольников. II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 101–110.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.109

Недавно Лао и Майер (2008) рассмотрели U-max-статистики, где вместо усреднения значений ядра по всевозможным подмножествам рассматривается максимум ядра. Такие статистики часто появляются в стохастической геометрии. Это вторая часть работы, посвященной изучению обобщенного периметра случайного вписанного многоугольника и предельного поведения связанных с ним U-max-статистик. В ней изучается случай, когда параметр, возникающий в определении обобщенного периметра, больше 1. Сформулированы и доказаны предельные теоремы в случае треугольника.

Ключевые слова: U-max-статистики, предельное поведение, равномерное распределение на окружности, обобщенный периметр.

1. Введение. Настоящая статья продолжает работу [1], посвященную предельному поведению обобщенного периметра случайного вписанного многоугольника. Мы сохраняем обозначения из [1], но нумерация формул и утверждений начинается заново.

Напомним определение U-max-статистик. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в некотором измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$. Вещественнозначная симметричная борелевская функция h, определенная на $\mathfrak{X}^m$, называется ядром. Под U-max-статистикой понимается случайная величина

$$H_n = \max_J h(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m}),$$

где $n \geq m$, а множество $J = \{(i_1, \dots, i_m) : 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$ — это множество упорядоченных m-элементных перестановок с множеством индексов из набора $\{1, \dots, n\}$. U-min-статистики определяются аналогично.

В работе [1] было введено понятие обобщенного периметра. Пусть d_i, $i = 1, \dots, m$, — стороны m-угольника, а $h(U_1, \dots, U_m) = \sum_{i=1}^m d_i$ — его периметр. Мы

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2019-1619), а также при поддержке РФФИ (грант № 20-51-12004 ННИОа).

предлагаем рассматривать величину $h_y(U_1,\ldots,U_m)=\sum_{i=1}^m d_i^y,\ y\in\mathbb{R}$, и называем ее обобщенным периметром многоугольника.

Первая часть работы [1] была посвящена случаю $y<1$. Ее результатом являлось доказательство предельных теорем для минимального обобщенного периметра

$$H_{n,m}^y=\min_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} h_y(U_{i_1},\ldots,U_{i_m})$$

при $y<0$ и максимального обобщенного периметра

$$G_{n,m}^y=\max_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} h_y(U_{i_1},\ldots,U_{i_m})$$

при $y\in(0,1)$. Благодаря [2], результат может быть расширен на случай $y=1$. Данная вторая часть работы посвящена изучению случая $y>1$.

2. Случай $y>1$. Формулировки теорем из [1] схожи. Естественно поставить вопрос: будет ли выполняться аналогичная предельная теорема для обобщенных периметров при $y>1$? Оказывается, что нет. Дело в том, что единообразие формул вытекает из того, что при $y\in(-\infty,0)\cup(0,1]$ правильный m-угольник является точкой строгого экстремума обобщенного периметра. Но при $y>1$ это уже не обязательно так. Можно написать следующую грубую оценку на число сторон многоугольника m, при котором указанное свойство нарушается.

Предложение 1. *Для любого фиксированного $y>1$ при $m>\pi/\arccos\frac{1}{\sqrt{y}}$ правильный m-угольник не является точкой максимума обобщенного периметра h_y.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x)=(\sin x)^y$. Из [1] мы знаем, что

$$h_y(U_1,\ldots,U_m)=2^y\sum_{k=1}^m f\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\alpha_k-\alpha_{k-1}}{2}\right),\ \text{где } \alpha_k=\angle U_{k+1}OU_1-\frac{2\pi k}{m},$$

причем можно считать,что точки $U_1,\ldots,U_m$ расположены на окружности именно в таком порядке. Явными вычислениями получаем, что

$$f''(x)=y\,(\sin x)^{y-2}\left(y\cos^2 x-1\right), \tag{1}$$

поэтому при данных ограничениях на m верно, что $f''(\frac{\pi}{m})>0$. При разложении обобщенного периметра имеем

$$h_y(U_1,\ldots,U_m)=2^y\sum_{i=1}^m f\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\alpha_k-\alpha_{k-1}}{2}\right),$$

по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности точек $\frac{\pi}{m}$ линейный член пропадает, но при достаточно малых α_i будет появляться положительный второй член. Поэтому в данном случае правильный m-угольник будет точкой локального минимума, а не максимума. □

Таким образом, предельную теорему для $G_{n,m}^y$ при $y>1$ не удается доказать из-за возникновения других точек максимума, вид которых неизвестен. Нами получено следующее промежуточное утверждение.

Предложение 2. *Пусть* $f(x) = (\sin x)^y$. *Рассмотрим экстремальную задачу*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} f\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \to \max; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i = 2\pi, \\ 0 \leq \gamma_1 \leq \ldots \leq \gamma_m \leq 2\pi, \end{cases} \tag{2}$$

при $y > 1$ *и* $m \geq 3$. *Тогда для решений этой системы при некотором* $1 \leq k \leq m$ *выполняется одно из следующих двух условий:*

- $0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{k-1}$, *остальные* $\gamma_k = \ldots = \gamma_m = \frac{2\pi}{m+1-k} \geq \delta$;
- $0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{k-2}$, $\gamma_{k-1} \in (0, \delta)$, *остальные* $\gamma_k = \ldots = \gamma_m \geq \delta$.

Здесь $\delta = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Замечание 1. Напомним, что решение данной задачи эквивалентно нахождению вписанного многоугольника с максимальным обобщенным периметром. Таким образом, мы получаем, что последний достигается либо на правильном многоугольнике (возможно, с числом сторон, меньшим m), либо на многоугольнике, где все стороны, кроме одной, равны между собой, но число вершин также может быть меньше m. Это согласуется с уже известными результатами. Например, хорошо известно, что при $y = 2$ максимум обобщенного периметра достигается на правильном треугольнике вне зависимости от количества аргументов m функции h_2, см., например, [3, зад. 11.36].

Доказательство. Максимум в данной задаче достигается, так как мы рассматриваем непрерывную функцию на компакте. Пусть набор $\{\gamma_i\}_{i=1}^{m}$ является решением экстремальной задачи (2). Покажем, что все $\gamma_i \leq \pi$. Предположим, что это не так. Тогда найдутся такие γ_i, γ_j, что $\gamma_i < \pi < \gamma_j$. Подберем такое $\varepsilon > 0$, чтобы было выполнено неравенство $\gamma_i + \varepsilon \leq \pi \leq \gamma_j - \varepsilon$ и заменим γ_i, γ_j на $\gamma_i + \varepsilon, \gamma_j - \varepsilon$. От этого $\sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)$ увеличится, что противоречит (2).

Рассмотрим некоторые $\gamma_i, \gamma_j \in [\delta, \pi]$, такие что $\gamma_i \neq \gamma_j$. Из формулы (1) видно, что $f^{''}(\frac{x}{2}) < 0$ при $x \in (\delta, \pi)$, поэтому аналогично рассуждениям из леммы 1 в [1] замена γ_i и γ_j на $(\gamma_i + \gamma_j)/2, (\gamma_i + \gamma_j)/2$ увеличит рассматриваемую сумму. Следовательно, все γ_i, принадлежащие отрезку $[\delta, \pi]$, равны между собой.

Далее предположим, что существуют два угла $\gamma_i, \gamma_j \in (0, \delta)$. Не умаляя общности, считаем, что $f^{'}(\frac{\gamma_i}{2}) \geq f^{'}(\frac{\gamma_j}{2})$. Подберем такое $\varepsilon > 0$, чтобы $\gamma_i + \varepsilon, \gamma_j - \varepsilon$ тоже принадлежали интервалу $(0, \delta)$. Следуя рассуждениям из леммы 1 работы [1], мы можем написать следующие формулы:

$$f\left(\frac{\gamma_i + \varepsilon}{2}\right) = f\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) + f^{'}\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} f^{''}\left(\varphi_1\right)\frac{\varepsilon^2}{4}, \tag{3}$$

$$f\left(\frac{\gamma_j - \varepsilon}{2}\right) = f\left(\frac{\gamma_j}{2}\right) - f^{'}\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} f^{''}\left(\varphi_2\right)\frac{\varepsilon^2}{4}, \tag{4}$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \frac{\delta}{2})$. Поскольку ввиду (1) выполнено $f^{''}(\varphi_1), f^{''}(\varphi_2) > 0$, а также $f^{'}(\frac{\gamma_i}{2}) \geq f^{'}(\frac{\gamma_j}{2})$, то, просуммировав (3) и (4), получим, что после замены γ_i, γ_j на

$\gamma_i+\varepsilon, \gamma_j-\varepsilon$ значение максимизируемой суммы увеличится. Это снова противоречит условиям (2).

Таким образом, для любого решения данной задачи все углы γ_i, большие δ, равны между собой, а также существует не более одного угла γ_i из интервала $(0,\delta)$. $\square$

Дальнейшее изучение U-max-статистик, связанных с обобщенным периметром, зависит от структуры точек максимума рассмотренной экстремальной задачи. Из предложения 1 следует, что при $y>1$ правильный m-угольник не всегда является точкой максимума, причем максимум может достигаться на более сложных системах точек.

Но и в случае, когда максимум достигается на правильном k-угольнике при $k<m$ (например, в случае $y=2$), провести те же рассуждения не удается. Проблема состоит в том, что производные в точках 0 и $\frac{2\pi}{k}$ в общем случае не совпадают, и линейный член сохраняется. Поэтому дополним предложение 1 еще одним утверждением, связанным со случаем совпадения исходных случайных точек.

Предложение 3. *При $y>1$ и $m>1+\pi/\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$ обобщенный периметр достигает максимума, когда некоторые U_i совпадают.*

Доказательство. Это несложное утверждение сразу следует из предложения 2. Действительно, если все $\gamma_i\neq 0$, то либо они все равны $\frac{2\pi}{m}$, либо $\gamma_1<\delta$, а для остальных выполняется $\delta\leq\gamma_2=\ldots=\gamma_m=\frac{2\pi-\gamma_1}{m-1}<\frac{2\pi}{m-1}$. Но при данных условиях верно неравенство $\frac{2\pi}{m-1}<\delta$, что приводит нас к противоречию. $\square$

Можно рассматривать иную задачу: зафиксировать m и попытаться узнать, при каких $y>1$ правильный m-угольник еще будет точкой максимума, а при каких уже нет. Грубые оценки на y содержатся в предложениях 1 и 3 этого параграфа. Немного дальше удается продвинуться в случае $m=3$.

3. Случай треугольника. Для треугольника оказалось возможным полностью исследовать случай $y\in[1,2]$. Предельная теорема для U-max-статистик выглядит здесь следующим образом.

Теорема А. *Пусть $U_1,\ldots,U_n$ — независимо и равномерно распределенные точки на единичной окружности S_1 с центром в точке O. Пусть h_y — обобщенный периметр, определенный выше. Обозначим*

$$G^y_{3,n}=\max_{1\leq i<j<k\leq n} h_y(U_i,U_j,U_k).$$

Тогда при условии $y\in[1,2]$ для любого $t>0$ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{n^3(3^{\frac{y+2}{2}}-G^y_{3,n})\leq t\}=1-e^{-\frac{t}{K_2(y)}},$$

где $K_2(y)=3^{\frac{y+1}{2}}\pi y(2-\frac{y}{2})$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы идейно такое же, как у теорем 3 и 4 из [1]. Надо доказать аналоги лемм 1 и 2 из этих теорем, тогда остаток доказательства будет очень похожим, а константы в теореме А получатся из констант в теореме 4 из [1] подстановкой $m=3$. Аналог леммы 1, утверждающий, что при $y \in [1, 2]$ максимум функции h_y достигается только на правильном треугольнике, а максимальное значение равно $3^{\frac{y+2}{2}}$, известен давно. Возможно, впервые он появился в работе Хилле [4].

Для доказательства аналога леммы 2 необходимо оценить отличие центральных углов от $\frac{2\pi}{3}$. Для удобства обозначим их через $2\psi_1, 2\psi_2$ и $2\psi_3$. В данных обозначениях

$$h_y(U_1, U_2, U_3) = h_y(2\psi_1, 2\psi_2, 2\psi_3) = 2^y \sum_{1 \le i \le 3} \sin^y \psi_i = 2^y \sum_{1 \le i \le 3} f(\psi_i). \qquad (5)$$

Мы вводили функцию h_y как функцию от трех точек, взятых на единичной окружности, но она также определяется тремя центральными углами. Поэтому мы можем записывать периметр h_y как функцию от неотрицательных углов, дающих в сумме 2π. Верна следующая лемма.

Лемма B. *Пусть выполнено условие*

$$h_y(2\psi_1, 2\psi_2, 2\psi_3) > 3^{\frac{y+2}{2}} - s. \qquad (6)$$

Тогда существуют константы $C, D > 0$, зависящие только от y, такие, что при $0 < s < D$ верно неравенство

$$\max_{1 \le i \le 3} \left| \psi_i - \frac{\pi}{3} \right| < C\sqrt{s}.$$

Иными словами, при малых s центральные углы отличаются от $\frac{2\pi}{3}$ на $O(\sqrt{s})$.

Доказательство. Будем опираться на формулу (5). Из формулы (1) вытекает, что $f''(x) < 0$ при $y \in [1, 2]$ и $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. Зафиксируем некоторое малое $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{8})$, которое выберем позже. Функция $f''(x)$ непрерывна на промежутке $[\frac{\pi}{4} + \varepsilon, \frac{3\pi}{4} - \varepsilon]$ и отрицательна, поэтому существует $\Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$f''(x) < -\Delta(\varepsilon) < 0 \text{ при } x \in \left[\frac{\pi}{4} + \varepsilon, \frac{3\pi}{4} - \varepsilon\right].$$

Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. *Пусть выполнено условие* (6). *Предположим, что в наборе углов ψ_1, ψ_2, ψ_3 найдутся ψ_i и $\psi_j \in \left[\frac{\pi}{4} + \varepsilon, \frac{3\pi}{4} - \varepsilon\right]$. Тогда $|\psi_i - \psi_j| < C(\varepsilon, y)\sqrt{s}$, где константа $C(\varepsilon, y)$ зависит только от ε и y.*

Доказательство. Заменим центральные углы $2\psi_i, 2\psi_j$ на $\psi_i + \psi_j, \psi_i + \psi_j$. Аналогично рассуждениям из леммы 2 работы [1] получаем, что

$$s > 2^y \left(2\sin^y\left(\frac{\psi_i + \psi_j}{2}\right) - (\sin\psi_i)^y - (\sin\psi_j)^y\right) =$$
$$= -2^{y-3}(\psi_i - \psi_j)^2 \left(f''(\varphi_1) + f''(\varphi_2)\right), \qquad (7)$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in [\frac{\pi}{4} + \varepsilon, \frac{3\pi}{4} - \varepsilon]$. Это приводит нас к соотношению $4s > 2^y \Delta(\varepsilon)(\psi_i - \psi_j)^2$, поэтому

$$|\psi_i - \psi_j| < C(\varepsilon, y)\sqrt{s} = O(\sqrt{s}), \text{ где } C(\varepsilon, y) = \frac{2}{\sqrt{2^y \Delta(\varepsilon)}} > 0.$$

□

Теперь разберем все возможные случаи соотношения углов ψ_1, ψ_2 и ψ_3. Покажем, что можно выбрать константы D и ε таким образом, чтобы условие (6) могло выполняться только в случае 2, и тогда центральные углы будут отличаться от $\frac{2\pi}{m}$ не более чем на $2C(\varepsilon, y)\sqrt{s}$. Константа $C(\varepsilon, y)$ взята из вышеприведенного утверждения. Не умаляя общности, считаем, что $\psi_3 \geq \psi_2 \geq \psi_1$.

Случай 1: $\frac{\pi}{2} \geq \psi_3$; $\frac{\pi}{4} + \varepsilon \geq \psi_2 \geq \psi_1$.

Как было заявлено ранее, мы хотим показать, что при подходящих ограничениях на ε и D условие (6) не будет выполнено. Это покажет невозможность данного случая в условиях леммы B.

Воспользуемся условием $\sum_{1 \leq i \leq 3} \psi_i = \pi$. В совокупности с условием, определяющим случай 1, получаются следующие ограничения на углы:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \geq \psi_3 \geq \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon, \\ \frac{\pi}{4} + \varepsilon \geq \psi_1, \psi_2 \geq \frac{\pi}{4} - \varepsilon. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что при малых ε значение $h_y(2\psi_1, 2\psi_2, 2\psi_3)$ будет незначительно отличаться от $h_y(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi)$. Действительно, каждый из синусов можно разложить по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности близкой точки ($\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{4}$). Получится следующее неравенство:

$$h_y\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3\right) \leq h_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\right) + 2\left(\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)\varepsilon + 3M\varepsilon^2, \tag{8}$$

где

$$M = \max_{x \in [\frac{\pi}{8}, \pi]} |f''(x)|.$$

Мы хотим подобрать такие оценки сверху на D и ε, чтобы было выполнено неравенство

$$s + 2\left(\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)\varepsilon + 3M\varepsilon^2 < 3^{\frac{y+2}{2}} - h_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\right). \tag{9}$$

В совокупности с (8) неравенство (9) влечет невыполнение (6) и невозможность данного случая.

Выпишем условия для выполнения (9). Для этого потребуем, чтобы выполнялись два неравенства:

$$\begin{aligned} &D < \left(3^{\frac{y+2}{2}} - h_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\right)\right)/2, \\ &2\left(\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)\varepsilon + \varepsilon^2 M < \left(3^{\frac{y+2}{2}} - h_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\right)\right)/2. \end{aligned}$$

Сложив эти два неравенства, получим (9). Как отмечалось выше, максимум функции h_y, равный $3^{\frac{y+2}{2}}$, достигается только, если все центральные углы равны $\frac{2\pi}{3}$. Это означает, что в правой части неравенств стоят положительные выражения, а требуемые неравенства корректны. Это равносильно следующим ограничениям на ε и D:

$$D<\left(3^{\frac{y+2}{2}}-h_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)/2, \tag{10}$$

$$M\varepsilon<\left[-\left(\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)+\sqrt{\left(\left|f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right)^2+M\left(3^{\frac{y+2}{2}}-h_y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)/2}\right].$$

Итак, этот случай также невозможен при подходящих ограничениях на D и ε.

Случай 2: $\frac{\pi}{2}\geq\psi_3\geq\psi_2\geq\psi_1\geq\frac{\pi}{4}+\varepsilon$.

Нетрудно видеть, что $\psi_1,\psi_2,\psi_3\in\left[\frac{\pi}{4}+\varepsilon,\frac{3\pi}{4}-\varepsilon\right]$, поэтому в силу вышеприведенного утверждения в случае, когда (6) выполнено, верно неравенство $|\psi_i-\psi_j|<C(\varepsilon,y)\sqrt{s}$ для любых $i,j\in\{1,2,3\}$. В совокупности с условием $\sum_{1\leq i\leq 3}\psi_i=\pi$, мы получаем, что $|\frac{\pi}{3}-\psi_i|<C(\varepsilon,y)\sqrt{s}$ для любого $i\in\{1,2,3\}$, что мы и хотели доказать.

Случай 3: $\frac{\pi}{2}\geq\psi_3\geq\psi_2>\frac{\pi}{4}+\varepsilon>\psi_1$.

Покажем, что можно ввести ограничения на D и ε так, что условие (6) в данном случае также невозможно.

Углы $\psi_2,\psi_3\in[\frac{\pi}{4}+\varepsilon,\frac{\pi}{2}]$, поэтому из формулы (7) ясно, что при замене центральных углов $2\psi_2,2\psi_3$ на углы $\psi_2+\psi_3,\psi_2+\psi_3$ значение функции h_y не уменьшится. Это означает, что если условие (6) было выполнено, то после такой замены оно не могло перестать выполняться. Таким образом, мы можем рассматривать случай, когда два центральных угла равны 2γ, а третий угол равен $2(\pi-2\gamma)<\frac{\pi}{2}+2\varepsilon$. Если мы докажем, что при достаточно малых D и ε такой случай невозможен, то докажем, что и условие (6) в данном случае не выполнено.

Заметим, что условие $0\leq\pi-2\gamma<\frac{\pi}{4}+\varepsilon$ означает, что $\gamma\in(\frac{3\pi}{8}-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\pi}{2}]$. Будем рассматривать лишь $\varepsilon<\frac{\pi}{24}$. Тогда $\gamma\in[\frac{17\pi}{48},\frac{\pi}{2}]$. Найдем максимум функции

$$g(\gamma)=h(2\pi-4\gamma,2\gamma,2\gamma)=2^y(2f(\gamma)+f(\pi-2\gamma))\text{ при }\gamma\in\left[\frac{17\pi}{48},\frac{\pi}{2}\right].$$

Точки локального экстремума функции g, не являющиеся концами отрезка, должны удовлетворять соотношению

$$g^{'}(x)=2^y(2f^{'}(x)-2f^{'}(\pi-2x))=0.$$

Это равносильно условию $f^{'}(x)=f^{'}(\pi-2x)$.

Предложение 4. *При $y\in[1,2]$ уравнение $f^{'}(x)=f^{'}(\pi-2x)$ имеет только один корень на отрезке $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$, равный $\frac{\pi}{3}$.*

Доказательство. Мы уже знаем, что $f^{'}(x)=y(\sin x)^{y-1}\cos x$. Подставим эту формулу в требуемое уравнение. Получим, что $(\sin x)^{y-1}\cos x=(\sin 2x)^{y-1}\cos(\pi-2x)$. Это равносильно уравнению

$$(\sin x)^{y-1}\cos x=-(2\sin x\cos x)^{y-1}\cos 2x.$$

Перенесем все в одну часть и получим, что

$$r(x):=\cos 2x(\cos x)^{y-2}=-\frac{1}{2^{y-1}}.$$

Ясно, что $x=\frac{\pi}{3}$ является решением этого уравнения. Также видно, что при $y\in[1,2]$ функция $r(x)$ отрицательна и строго убывает на интервале $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, поэтому решение данного уравнения единственно. $\square$

Так как $\frac{\pi}{3} \notin (\frac{17\pi}{48}, \frac{\pi}{2})$, то функция g монотонна на отрезке $[\frac{17\pi}{48}, \frac{\pi}{2}]$, и ее максимальное значение равно $\max\left(h_y\left(\frac{28\pi}{48}, \frac{34\pi}{48}, \frac{34\pi}{48}\right), h_y(0,\pi,\pi)\right)$. Данное значение зависит только от y, и вследствие единственности максимума оно меньше $3^{\frac{y+2}{2}}$. Это означает, что можно наложить следующие условия на D и ε :

$$D < 3^{\frac{y+2}{2}} - \max\left(h_y\left(\frac{28\pi}{48}, \frac{34\pi}{48}, \frac{34\pi}{48}\right), h_y(0,\pi,\pi)\right), \qquad \varepsilon < \frac{\pi}{24}. \tag{11}$$

При этих ограничениях $3^{\frac{y+2}{2}} - s > \max_{\gamma \in [\frac{17\pi}{48}, \frac{\pi}{2}]} g(\gamma) \geq h_y(2\psi_1, 2\psi_2, 2\psi_3)$, что противоречит (6). Это завершает разбор случая 3.

Случай 4: $\psi_3 > \frac{\pi}{2} > \psi_2 \geq \psi_1$.

Предположим, что выполнено неравенство (6). Поскольку функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и убывает при $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, то при замене углов ψ_3 и ψ_2 на углы $\frac{\pi}{2}$ и $\psi_2 + \psi_3 - \frac{\pi}{2}$ значение функции h_y не уменьшится, и неравенство (6) продолжает выполняться. Обозначим новые углы через $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. Теперь все углы φ_i не превосходят $\frac{\pi}{2}$, и данная ситуация относится к одному из предыдущих трех случаев. Ранее было показано, что при выполнении условий (10) и (11) неравенство (6) не может быть выполнено в случаях 1 и 3. Тогда должен быть выполнен случай 2. По доказанному ранее в случае 2 верно неравенство $|\frac{\pi}{3} - \varphi_i| < C(\varepsilon, y)\sqrt{s}$ для всех $i \in \{1,2,3\}$, в том числе и для $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, мы получаем, что должно быть выполнено следующее неравенство:

$$\frac{\pi}{6} = \left|\frac{\pi}{3} - \varphi_3\right| < C(\varepsilon, y)\sqrt{s} < C(\varepsilon, y)\sqrt{D}.$$

Но это неравенство нарушается, если наложить следующее ограничение на D :

$$D < \left(\frac{\pi}{6C(\varepsilon, y)}\right)^2. \tag{12}$$

Таким образом, при выполнении (10), (11) и (12) неравенство (6) в случае 4 не может быть выполнено.

Мы разобрали всевозможные конфигурации положительных углов ψ_1, ψ_2, ψ_3 при условии, что $\sum_{i=1}^{3} \psi_i = \pi$. Рассмотрим неравенства, выполнения которых мы добивались. Исходно мы заявляли, что $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{8})$, а также нам необходимо выполнение неравенств (10), (11) и (12). Заметим, что все неравенства на ε строгие, выполнены при $\varepsilon = 0$, а также включают в себя только константы, зависящие от y, а значит, существует подходящее $\varepsilon > 0$, зависящее только от y. Все неравенства на D также строгие, выполнены при $D = 0$ и включают в себя только константы, зависящие от y и ε, поэтому при выбранном ранее ε существует некоторое $D > 0$, удовлетворяющее неравенствам (10), (11) и (12). При данных ε и D выполнение неравенства (6) невозможно в случаях 1, 3, 4, а в случае 2 влечет заключение леммы B. $\square$

Таким образом, мы доказали аналоги лемм 1 и 2 из первой части работы. Окончание доказательства теоремы А повторяет доказательство теорем 3 и 4 из [1]. $\square$

Замечание 2. Из предложения 3 следует, что при $y > 4$ максимум обобщенного периметра треугольника будет достигаться на конфигурации, представляющей собой пару диаметрально противоположных точек, третья точка будет совпадать с одной из них. Что происходит при $y \in (2, 4]$ — открытый вопрос.

4. Заключение. В настоящем цикле из двух работ было рассмотрено предельное поведение экстремальных значений случайного обобщенного периметра. Нам удалось изучить данную задачу в тех случаях, когда экстремум в детерминированном ее аналоге достигается только на правильном многоугольнике. В тех случаях, когда это удавалось доказать, а именно при $y \leq 1$ для многоугольника и при $y \in [1, 2]$ для треугольника, были получены предельные теоремы для соответствующих U-max-статистик. Дальнейшее изучение предельного поведения обобщенного периметра зависит от строения многоугольников, на которых достигается его экстремум.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Никитину Якову Юрьевичу за постановку задачи и неоценимую помощь в редактировании статьи.

Литература

1. Симарова Е. Н. Предельные теоремы для обобщенных периметров случайных вписанных многоугольников. I. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7 (65)**, вып. 4, 678–687 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.409

2. Koroleva E. V., Nikitin Ya. Yu. U-max-statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons. *J. Multivariate Anal.* **127**, 99–111 (2014).

3. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.* Изд-во МЦНМО (2006).

4. Hille E. Some geometric extremal problems. *Journal of the Australian Mathematical Society* **6**, iss. 1, 122–128 (1966).

Статья поступила в редакцию 1 марта 2020 г.;
после доработки 28 июня 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Симарова Екатерина Николаевна — аспирант; katerina.1.14@mail.ru

Limit theorems for generalized perimeters of random inscribed polygons. II*

E. N. Simarova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
Leonhard Euler International Mathematical Institute,
29B, 14 liniya V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Simarova E. N. Limit theorems for generalized perimeters of random inscribed polygons. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 101–110. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.109 (In Russian)

Lao and Mayer (2008) recently developed the theory of U-max statistics, where instead of the usual sums over subsets, the maximum of the kernel is considered. Such statistics often appear in stochastic geometry. Examples include the greatest distance between random points in a ball, the maximum diameter of a random polygon, the largest scalar product in a sample of points, etc. Their limit distributions are related to distribution of extreme values. This is the second article devoted to the study of the generalized perimeter of a polygon and the limit behavior of the U-max statistics associated with the generalized

*The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-15-2019-1619), and by joint RFBR-DFG (grant No. 20-51-12004).

perimeter. Here we consider the case when the parameter y, arising in the definition of the generalized perimeter, is greater than 1. The problems that arise in the applied method in this case are described. The results of theorems on limit behavior in the case of a triangle are refined.

Keywords: U-max statistics, limit behavior, uniform distribution on a circle, the sum of the degrees of the sides of the polygon.

References

1. Simarova E. N. Limit theorems for generalized perimeters of random inscribed polygons. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7 (65)**, iss. 4, 678–687 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.409 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **53**, iss. 4, 434–442 (2020)].

2. Koroleva E. V., Nikitin Ya. Yu. U-max-statistics and limit theorems for perimeters and areas of random polygons. *J. Multivariate Anal.* **127**, 99–111 (2014).

3. Prasolov V. V. *Problems in plane geometry.* Moscow Center for Cont. Math. Education Publ. (2006). (In Russian)

4. Hille E. Some geometric extremal problems. *Journal of the Australian Mathematical Society* **6**, iss. 1, 122–128 (1966).

Received: March 1, 2020
Revised: June 28, 2020
Accepted: September 17, 2020

Author's information:

Ekaterina N. Simarova — katerina.1.14@mail.ru