

МЕХАНИКА

УДК 517.925.51:517.93:531.36
MSC 93C10, 34H15

Метод усреднения в задаче о лоренцевой стабилизации непрямого положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат*

А. Ю. Александров, Н. Р. Андриянова, А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Александров А. Ю., Андриянова Н. Р., Тихонов А. А. Метод усреднения в задаче о лоренцевой стабилизации непрямого положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 123–137.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.111>

Рассматривается динамически симметричный ИСЗ на круговой орбите малого наклона. Решается задача лоренцевой стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат в непрямом положении равновесия в условиях возмущающего воздействия гравитационного момента. Для решения этой задачи, отличающейся неполным управлением, развивается прием усреднения дифференциальных уравнений. С использованием оригинальной конструкции нестационарной функции Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости программного режима движения ИСЗ в виде конструктивных неравенств относительно параметров управления.

Ключевые слова: ИСЗ, стабилизация, вращательное движение, асимптотическая устойчивость, метод функций Ляпунова.

1. Введение. Разнообразные задачи, связанные с обеспечением программных режимов вращательного движения ИСЗ относительно его центра масс решаются с использованием различных физических принципов и сил различной природы, реализуемых в условиях околоземного пространства [1, 2]. К числу сил и моментов электродинамического характера, возникающих за счет взаимодействия ИСЗ с магнитным полем Земли, относятся момент магнитного взаимодействия и момент сил Лоренца. Соответствующие системы управления, получившие названия магнитная

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00146-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

система управления (МСУ) и лоренцева система управления (ЛСУ), широко освещены в литературе. За время, прошедшее с начала космической эры, особенно обстоятельно изучены принципы построения, теоретические основы функционирования и практические аспекты разработки МСУ [3, 4]. Значительно позже (с 1988 г.) стали разрабатываться теоретические основы функционирования ЛСУ [5]. В работах [6, 7] показано, что управляемый лоренцев момент, действующий на заряженный ИСЗ или эквивалентный ему с механической точки зрения ИСЗ с двойным электростатическим слоем, может быть довольно большим и может успешно использоваться в качестве восстанавливающего момента в окрестности положения относительно равновесия ИСЗ [8–10]. Особенно эффективным может оказаться использование ЛСУ для угловой стабилизации больших экранированных космических аппаратов. Это обстоятельство связано с недавними исследованиями в области активного электростатического экранирования космических аппаратов с целью противорадиационной защиты и с проявляющейся тенденцией к увеличению размеров заряженных экранов [11, 12].

Применение управляемого лоренцева момента не требует перемещения каких-либо массивных тел и не требует никакого расхода рабочего вещества. Эти качества делают лоренцев момент похожим на момент магнитного взаимодействия, который широко используется для стабилизации углового положения ИСЗ. Известно также, что в некоторых случаях ЛСУ имеет ряд преимуществ по сравнению с МСУ [13], в частности, — в тех случаях, когда элементы МСУ, создающие сильные магнитные поля на борту ИСЗ, являются нежелательными.

Возможность угловой стабилизации ИСЗ с использованием управляющего лоренцева момента исследовалась в [13] на основе метода усреднения. Однако из-за определенных трудностей в применении метода усреднения авторам пришлось наложить жесткие ограничения на моменты инерции спутника (рассматривался ИСЗ с тремя равными моментами инерции). К тому же, полученные условия на параметры управления не вполне конструктивны.

В данной работе, следуя той же идее, которая использовалась в [13], развивается техника усреднения для задачи трехосной стабилизации динамически симметричного ИСЗ в орбитальной системе координат с использованием ЛСУ в условиях нестационарных периодических возмущений, входящих в магнитную индукцию геомагнитного поля и обусловленных наклоном орбиты ИСЗ.

Как известно, нестационарные возмущения вызывают немалые трудности при анализе динамики систем управления. Эффективным инструментом исследования таких систем является метод усреднения [14–16]. Подходы, основанные на применении метода усреднения, позволяют свести исследование устойчивости нестационарных систем к исследованию устойчивости соответствующих стационарных усредненных систем с вытекающими отсюда существенными упрощениями.

Однако применение метода усреднения хорошо разработано только для случаев быстро изменяющихся нестационарностей. Для таких случаев метод усреднения широко используется в задачах динамики и управления движением [17, 18]. Существенно более сложной является ситуация, в которой правые части дифференциальных систем не являются быстро изменяющимися функциями времени. Для исследования таких систем в работах [19, 20] предложены варианты развития метода усреднения, позволяющие получать достаточные условия асимптотической устойчивости движения с использованием новых оригинальных подходов к построению нестационарных функций Ляпунова [21, 22].

Другой существенной особенностью рассматриваемой задачи является наличие гравитационного возмущающего момента. Третьей отличительной чертой поставленной задачи стабилизации углового положения ИСЗ является непрямое положение равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат в программном режиме движения. Наконец, четвертая особенность заключается в принципиальной неполноте управления, свойственной ЛСУ.

2. Постановка задачи. Рассматривается динамически симметричный ИСЗ, вращающийся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг центра масс — точки C , движущейся по кеплеровой круговой орбите с радиусом R и с малым наклоном i . ИСЗ обладает управляемым электрическим зарядом $Q = \int_V \sigma dV$, распределенным по некоторому объему V с плотностью σ . Программное угловое движение ИСЗ задается относительно орбитальной системы координат $C\xi\eta\zeta$. Ось $C\xi(\xi_0)$ этой системы направлена вдоль касательной к орбите в сторону движения, ось $C\eta(\eta_0)$ — по нормали к плоскости орбиты, ось $C\zeta(\zeta_0)$ — вдоль радиуса-вектора $\vec{R} = \overline{O_E C} = R\vec{\zeta}_0$, имеющего своим началом центр масс Земли O_E . Орбитальная система координат поворачивается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{\eta}_0$ в инерциальном пространстве. Угловую скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат обозначим $\vec{\omega}'$.

Связанная с ИСЗ система главных центральных осей инерции $Cxyz$ выбирается так, что оси x и y соответствуют двум равным моментам инерции A и B , а ось z — отличному от них моменту инерции C . Поэтому тензор инерции ИСЗ в осях $Cxyz$ имеет вид $\mathbf{J} = \text{diag}\{A, A, C\}$. Следует отметить, что наличие динамической симметрии ИСЗ относительно оси z не предполагает наличия электростатической симметрии ИСЗ относительно этой или какой-либо другой оси. Поэтому рассматриваемая далее задача о стабилизации ИСЗ, несущего пространственно распределенный заряд, в некотором положении, определяемом в том числе углом ψ_0 поворота системы координат $Cxyz$ вокруг оси z , не сводится, вообще говоря, к аналогичной задаче с нулевым значением угла ψ_0 .

Ориентация системы координат $Cxyz$ относительно системы координат $C\xi\eta\zeta$ задается матрицей \mathbf{A} направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) так, что имеют место равенства

$$\vec{\xi}_0 = \alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k}, \quad \vec{\eta}_0 = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}, \quad \vec{\zeta}_0 = \gamma_1\vec{i} + \gamma_2\vec{j} + \gamma_3\vec{k}.$$

Программная ориентация ИСЗ относительно орбитальной системы координат задается некоторым значением \mathbf{A}_0 матрицы \mathbf{A} . Введем следующие обозначения для текущих значений ортов орбитальной системы координат, заданных в связанной с ИСЗ системе $Cxyz$:

$$\mathbf{A}^\top \vec{\xi}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\top = \vec{s}_1, \quad \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^\top = \vec{s}_2, \quad \mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^\top = \vec{s}_3. \quad (1)$$

Если определять ориентацию ИСЗ в орбитальной системе координат с помощью параметров Родрига — Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ [23], то элементы матрицы \mathbf{A} будут иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2, & \alpha_2 &= 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3), & \alpha_3 &= 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2), \\ \beta_1 &= 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3), & \beta_2 &= \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2, & \beta_3 &= 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1), \\ \gamma_1 &= 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), & \gamma_2 &= 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1), & \gamma_3 &= \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2. \end{aligned}$$

Аналогично введем следующие обозначения для программных значений ортов орбитальной системы координат, заданных в связанной с ИСЗ системе $Cxyz$:

$$\mathbf{A}_0^\top \vec{\xi}_0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30})^\top = \vec{r}_1, \quad \mathbf{A}_0^\top \vec{\eta}_0 = (\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30})^\top = \vec{r}_2, \quad \mathbf{A}_0^\top \vec{\zeta}_0 = (\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})^\top = \vec{r}_3. \quad (2)$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\vec{r}_1 = (\cos \psi_0, -\sin \psi_0, 0)^\top, \quad \vec{r}_2 = (\sin \psi_0, \cos \psi_0, 0)^\top, \quad \vec{r}_3 = (0, 0, 1)^\top,$$

где $\psi_0 = \text{const}$. Программное угловое движение ИСЗ задается равенствами

$$\vec{s}_k = \vec{r}_k, \quad \vec{\omega}' = \vec{0} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Поскольку угол рысканья ψ_0 , входящий в выражение программного движения (3), определяет поворот ИСЗ вокруг оси Cz , а сама ось Cz в программном движении направлена вдоль местной вертикали $C\zeta$, то фактически угол ψ_0 задает поворот осей Cx и Cy относительно местной вертикали. Как известно, широко распространенные методы стабилизации ИСЗ с использованием гравитационного момента позволяют стабилизировать ИСЗ лишь в таком положении, при котором $\psi_0 = 0$, а в случае ИСЗ, динамически симметричного относительно оси Cz , который как раз и рассматривается в работе, гравитационный момент не в состоянии обеспечить однозначную ориентацию осей Cx и Cy . В данной работе показано, что использование лоренцевой системы управления позволяет стабилизировать динамически симметричный ИСЗ в положении, соответствующем любому наперед заданному значению угла ψ_0 .

3. Управляющий лоренцев момент. В процессе движения ИСЗ относительно геомагнитного поля с магнитной индукцией \vec{B} возбуждается действующий на ИСЗ лоренцев момент

$$\vec{M}_L = \vec{P} \times \vec{T},$$

где $\vec{P} = Q\vec{\rho}_0$, $\vec{\rho}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = Q^{-1} \int_V \sigma \vec{\rho} dV$ — радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно центра масс ИСЗ, $\vec{T} = \mathbf{A}^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$,

$$\vec{v}_C = R(\omega_0 - \omega_E)\vec{\xi}_0 + R\omega_E \sin i \cos u \vec{\eta}_0 \quad (4)$$

— скорость точки C относительно геомагнитного поля, ω_E — угловая скорость суточного вращения Земли. Компоненты вектора $\vec{B} = B_\xi \vec{\xi}_0 + B_\eta \vec{\eta}_0 + B_\zeta \vec{\zeta}_0$ (где $\vec{\xi}_0 = (1, 0, 0)^\top$, $\vec{\eta}_0 = (0, 1, 0)^\top$, $\vec{\zeta}_0 = (0, 0, 1)^\top$) являются известными периодическими функциями времени t , вычисленными в точке, совпадающей с центром масс ИСЗ. В простейшем дипольном приближении эти компоненты таковы [1, 3]:

$$B_\xi = -\left(\frac{R_E}{R}\right)^3 g_1^0 \sin i \cos u, \quad B_\eta = -\left(\frac{R_E}{R}\right)^3 g_1^0 \cos i, \quad B_\zeta = 2\left(\frac{R_E}{R}\right)^3 g_1^0 \sin i \sin u. \quad (5)$$

Здесь R_E — радиус Земли, g_1^0 — гауссов коэффициент [24, 25], $u = \omega_0 t$ — безразмерная переменная, называемая аргументом широты.

Для решения задачи угловой стабилизации ИСЗ в программном режиме движения (3) достаточно выбрать электродинамический параметр \vec{P} в виде

$$\vec{P} = k_L \vec{T}_0,$$

где $\vec{T}_0 = \mathbf{A}_0^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$ и k_L — коэффициент, который может быть скалярной функцией времени. Управляющий момент \vec{M}_L принимает следующий вид:

$$\vec{M}_L = k_L \vec{T}_0 \times \vec{T}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что управляющий лоренцев момент обращается в ноль в программном движении $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ и проявляет восстанавливающий эффект в окрестности программного движения. В случае круговой орбиты

$$\begin{aligned} \vec{T}_0 &= v_{C\eta} B_\zeta \vec{r}_1 - v_{C\xi} B_\zeta \vec{r}_2 + (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi) \vec{r}_3, \\ \vec{T} &= v_{C\eta} B_\zeta \vec{s}_1 - v_{C\xi} B_\zeta \vec{s}_2 + (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi) \vec{s}_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{T}_0 \times \vec{T} &= v_{C\xi}^2 B_\eta^2 \left[\frac{v_{C\eta}^2 B_\zeta^2}{v_{C\xi}^2 B_\eta^2} \vec{r}_1 \times \vec{s}_1 - \frac{v_{C\eta} B_\zeta^2}{v_{C\xi} B_\eta^2} (\vec{r}_1 \times \vec{s}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{s}_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{v_{C\eta} B_\zeta}{v_{C\xi} B_\eta} - \frac{v_{C\eta}^2 B_\xi B_\zeta}{v_{C\xi}^2 B_\eta^2} \right) (\vec{r}_1 \times \vec{s}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{s}_1) + \frac{B_\zeta^2}{B_\eta^2} \vec{r}_2 \times \vec{s}_2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{B_\zeta}{B_\eta} - \frac{v_{C\eta} B_\xi B_\zeta}{v_{C\xi} B_\eta^2} \right) (\vec{r}_2 \times \vec{s}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{s}_2) + \left(1 - 2 \frac{v_{C\eta} B_{C\xi}}{v_{C\xi} B_\eta} + \frac{v_{C\eta}^2 B_\xi^2}{v_{C\xi}^2 B_\eta^2} \right) \vec{r}_3 \times \vec{s}_3 \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Обозначим $\omega_E/\omega_0 = \omega_*$. На основании (4) и (5) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{v_{C\eta}^2 B_\zeta^2}{v_{C\xi}^2 B_\eta^2} &= O(\omega_*^2 \sin^4 i), & \frac{v_{C\eta} B_\zeta^2}{v_{C\xi} B_\eta^2} &= O(\omega_* \sin^3 i), & \frac{v_{C\eta} B_\zeta}{v_{C\xi} B_\eta} &= O(\omega_* \sin^2 i), \\ \frac{v_{C\eta}^2 B_\xi B_\zeta}{v_{C\xi}^2 B_\eta^2} &= O(\omega_*^2 \sin^2 i), & \frac{B_\zeta^2}{B_\eta^2} &= O(\sin^2 i), & \frac{B_\zeta}{B_\eta} &= O(\sin i), \\ \frac{v_{C\eta} B_\xi B_\zeta}{v_{C\xi} B_\eta^2} &= O(\omega_* \sin^3 i), & \frac{v_{C\eta} B_{C\xi}}{v_{C\xi} B_\eta} &= O(\omega_* \sin^2 i), & \frac{v_{C\eta}^2 B_\xi^2}{v_{C\xi}^2 B_\eta^2} &= O(\omega_*^2 \sin^4 i). \end{aligned}$$

Для ИСЗ, находящихся на орбитах малого наклона, $\sin i$ мало. Поэтому в коэффициентах, содержащихся внутри квадратных скобок выражения (7), можно пренебречь членами порядков $O(\sin^4 i)$ и $O(\sin^3 i)$ по сравнению с членами порядков $O(\sin^2 i)$ и $O(\sin i)$. Кроме того, исходя из (4) и (7), следует заметить, что эффективность ЛСУ тем выше, чем больше управляющий лоренцев момент, пропорциональный скорости v_C заряда ИСЗ относительно геомагнитного поля. По мере повышения орбиты ИСЗ и приближения ее к геостационарной орбитальной угловая скорость ИСЗ ω_0 приближается к угловой скорости ω_E суточного вращения Земли и ее магнитного поля, вследствие чего в выражении v_C (формула (4)) стремится к нулю основное слагаемое, обеспечивающее работоспособность метода, и эффективность ЛСУ снижается. Поэтому в данной работе рассматриваются только ИСЗ на орбитах средних и низких высот. Для таких высот ω_* — малая величина порядка 0.01. В этих условиях в выражении (7) в квадратных скобках целесообразно сохранить лишь те слагаемые, которые содержат $\sin i$ в степени не выше второй и при этом не содержат множителем ω_* . В результате получим более простое выражение

$$\vec{T}_0 \times \vec{T} = v_{C\xi}^2 [B_\zeta^2 \vec{r}_2 \times \vec{s}_2 - B_\eta B_\zeta (\vec{r}_2 \times \vec{s}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{s}_2) + B_\eta^2 \vec{r}_3 \times \vec{s}_3]. \quad (8)$$

4. Динамика и управление вращательным движением ИСЗ. Дифференциальные уравнения вращательного движения ИСЗ под действием управляющего лоренцева момента \vec{M}_L , диссипативного момента \vec{M}_D и возмущающего момента \vec{M}_G строятся по схеме Эйлера — Пуассона и имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \vec{M}_L + \vec{M}_D + \vec{M}_G, \quad (9)$$

$$\dot{\vec{\xi}}_0 = \vec{\xi}_0 \times \vec{\omega} - \omega_0 \vec{\zeta}_0, \quad \dot{\vec{\eta}}_0 = \vec{\eta}_0 \times \vec{\omega}, \quad \dot{\vec{\zeta}}_0 = \vec{\zeta}_0 \times \vec{\omega} + \omega_0 \vec{\xi}_0. \quad (10)$$

Диссипативный момент модельного типа пропорционален относительной угловой скорости ИСЗ:

$$\vec{M}_D = -h \vec{\omega}', \quad (11)$$

где $h > 0$. Модель (11) является широко распространенной в задачах рассматриваемого типа [2, 26]. Учитывается также гравитационный момент, являющийся во многих случаях наибольшим из возмущающих моментов [1]: $\vec{M}_G = 3\omega_0^2 (\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0)$.

С учетом обозначений (1) и (2) перепишем систему (9), (10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{J}(\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{s}_2)] + (\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{s}_2) \times [\mathbf{J}(\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{s}_2)] = \\ = k_L \vec{T}_0 \times \vec{T} - h \vec{\omega}' + 3\omega_0^2 \vec{s}_3 \times (\mathbf{J} \vec{s}_3), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{\vec{s}}_k + \vec{\omega}' \times \vec{s}_k = \vec{0} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (13)$$

где выражение $\vec{T}_0 \times \vec{T}$ определяется по формуле (8). Требуется определить условия на параметры k_L и h , при выполнении которых можно гарантировать асимптотическую устойчивость положения равновесия (3).

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$\vec{\omega}' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)^\top, \quad \bar{b}_1 = v_{C\xi}^2 \langle B_\eta B_\zeta \rangle_t, \quad \bar{b}_2 = v_{C\xi}^2 \langle B_\zeta^2 \rangle_t, \quad \bar{b}_3 = v_{C\xi}^2 \langle B_\eta^2 \rangle_t,$$

$$\vec{\Phi} = \bar{b}_2 \vec{r}_2 \times \vec{s}_2 - \bar{b}_1 (\vec{r}_2 \times \vec{s}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{s}_2) + \bar{b}_3 \vec{r}_3 \times \vec{s}_3.$$

Тогда

$$\vec{T}_0 \times \vec{T} = \vec{\Phi} + \left[\bar{b}_2(t) \vec{r}_2 \times \vec{s}_2 - \bar{b}_1(t) (\vec{r}_2 \times \vec{s}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{s}_2) + \bar{b}_3(t) \vec{r}_3 \times \vec{s}_3 \right].$$

Здесь $\bar{b}_1(t)$, $\bar{b}_2(t)$, $\bar{b}_3(t)$ — периодические функции с нулевыми средними значениями.

Пусть $\Psi_k(t) = \int_0^t \bar{b}_k(\tau) d\tau$, $k = 1, 2, 3$. Функции $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, $\Psi_3(t)$ непрерывно дифференцируемы и ограничены при $t \geq 0$.

5. Построение функции Ляпунова. Для нахождения условий асимптотической устойчивости применяем прямой метод Ляпунова. Функцию Ляпунова выбираем в виде $\tilde{V} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$. Здесь

1) функция

$$V_1 = \frac{\beta}{2} \vec{\omega}'^\top \mathbf{J} \vec{\omega}' + \frac{\bar{b}_2}{2} |\vec{r}_2 - \vec{s}_2|^2 - \bar{b}_1 (\vec{r}_2 - \vec{s}_2)^\top (\vec{r}_3 - \vec{s}_3) + \frac{\bar{b}_3}{2} |\vec{r}_3 - \vec{s}_3|^2,$$

где β — вспомогательный положительный параметр, строится на основе подхода, разработанного в [27];

2) $V_2 = -\vec{\Phi}^\top \mathbf{J} \vec{\omega}' / h$ — перекрестный член (применение слагаемых такого типа в задачах управления вращательным движением твердого тела было предложено в [28]);

3) функция

$$V_3 = \frac{\beta}{2} \omega_0^2 (A - C) \beta_3^2 + \frac{3\beta}{2} \omega_0^2 (A - C) (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

прибавляется для получения более удобного для дальнейшего анализа вида производной \dot{V} в силу системы (12), (13) (конструкции такого рода использовались в [10, 29]);

4) для построения функции

$$V_4 = \frac{k_L}{h} \vec{\Phi}^\top (\Psi_2(t) \vec{r}_2 \times \vec{s}_2 - \Psi_1(t) (\vec{r}_2 \times \vec{s}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{s}_2) + \Psi_3(t) \vec{r}_3 \times \vec{s}_3)$$

применяется подход, развитый в [21, 22], который учитывает структуру нестационарных возмущений, действующих на рассматриваемые системы.

Замечание. Таким образом, предлагаемый подход к анализу устойчивости программного движения основан на применении метода усреднения для построения функции Ляпунова. Сначала строится функция Ляпунова для усредненных уравнений (см. пункты 1–3), а затем она достраивается с учетом нестационарных возмущений, действующих на систему (см. пункт 4). Далее получающаяся функция Ляпунова применяется к исходной нестационарной системе. Следует также отметить, что при выполнении пункта 4 используются не все нестационарные возмущения, действующие на систему. Это обусловлено сравнением различных вариантов построения функции Ляпунова. Оказалось, что использование только части «нестационарностей» приводит к более широкой области значений параметров системы и параметров управления.

С помощью компьютерного моделирования можно показать, что для всех допустимых с физической точки зрения значений R выполнено неравенство $\bar{b}_2 \bar{b}_3 > \bar{b}_1^2$. Поэтому

$$\frac{\bar{b}_2}{2} |\vec{r}_2 - \vec{s}_2|^2 - \bar{b}_1 (\vec{r}_2 - \vec{s}_2)^\top (\vec{r}_3 - \vec{s}_3) + \frac{\bar{b}_3}{2} |\vec{r}_3 - \vec{s}_3|^2 \geq \frac{\bar{\nu}}{2} (|\vec{r}_2 - \vec{s}_2|^2 + |\vec{r}_3 - \vec{s}_3|^2),$$

где $\bar{\nu} = (\bar{b}_2 + \bar{b}_3 - \sqrt{(\bar{b}_2 - \bar{b}_3)^2 + 4\bar{b}_1^2}) / 2 > 0$.

Кроме того, используя параметры Родрига — Гамильтона, получаем

$$|\vec{r}_2 - \vec{s}_2|^2 + |\vec{r}_3 - \vec{s}_3|^2 = 8\chi_1^2 + 4(\chi_2^2 + \chi_3^2),$$

$$|\vec{\Phi}|^2 = 4((\bar{b}_2 + \bar{b}_3)^2 \chi_1^2 + (\bar{b}_1^2 + \bar{b}_3^2) \chi_2^2 + (\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2) \chi_3^2 - 2\bar{b}_1(\bar{b}_2 + \bar{b}_3) \chi_2 \chi_3) + \Delta(\chi_1, \chi_2, \chi_3),$$

где

$$\chi_1 = \lambda_1 \cos \frac{\psi_0}{2} - \lambda_2 \sin \frac{\psi_0}{2}, \quad \chi_2 = \lambda_1 \sin \frac{\psi_0}{2} + \lambda_2 \cos \frac{\psi_0}{2},$$

$$\chi_3 = \left(\lambda_0 - \cos \frac{\psi_0}{2} \right) \sin \frac{\psi_0}{2} - \left(\lambda_3 - \sin \frac{\psi_0}{2} \right) \cos \frac{\psi_0}{2},$$

а для функции $\Delta(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ справедлива оценка

$$|\Delta(\chi_1, \chi_2, \chi_3)| \leq c(|\chi_1| + |\chi_2| + |\chi_3|)^3, \quad c = \text{const} > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &\geq \frac{\beta}{2}(A\omega'_1{}^2 + A\omega'_2{}^2 + C\omega'_3{}^2) + \frac{\bar{\nu}}{2}(|\bar{r}_2 - \bar{s}_2|^2 + |\bar{r}_3 - \bar{s}_3|^2) - \frac{1}{h}|\bar{\Phi}||\mathbf{J}\bar{\omega}'| - \\
&\quad - \frac{k_L}{h}|\bar{\Phi}||\Psi_2(t)\bar{r}_2 \times \bar{s}_2 - \Psi_1(t)(\bar{r}_2 \times \bar{s}_3 + \bar{r}_3 \times \bar{s}_2) + \Psi_3(t)\bar{r}_3 \times \bar{s}_3| + V_3 \geq \\
&\geq \frac{\beta}{2}(A\omega'_1{}^2 + A\omega'_2{}^2 + C\omega'_3{}^2) + \left(\frac{\bar{\nu}}{2} - \frac{\beta}{2}\omega_0^2 c_1\right)(|\bar{r}_2 - \bar{s}_2|^2 + |\bar{r}_3 - \bar{s}_3|^2) - \\
&\quad - \frac{a_1}{2h}|\bar{\Phi}|^2 - \frac{1}{2ha_1}(A^2\omega_1'^2 + A^2\omega_2'^2 + C^2\omega_3'^2) - \frac{k_L a_2}{2h}|\bar{\Phi}|^2 - \\
&\quad - \frac{k_L}{2ha_2}|\Psi_2(t)\bar{r}_2 \times \bar{s}_2 - \Psi_1(t)(\bar{r}_2 \times \bar{s}_3 + \bar{r}_3 \times \bar{s}_2) + \Psi_3(t)\bar{r}_3 \times \bar{s}_3|^2 \geq \\
&\geq \left(\frac{\bar{\nu}}{2} - \frac{a_1\nu_{\max}}{8h} - \frac{k_L \sup_{t \geq 0} \hat{\nu}(t)}{8ha_2} - \frac{k_L a_2 \nu_{\max}}{8h} - \frac{\beta}{2}\omega_0^2 c_1\right)(|\bar{r}_2 - \bar{s}_2|^2 + |\bar{r}_3 - \bar{s}_3|^2) + \\
&\quad + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{c_2}{2ha_1}\right)(A\omega_1'^2 + A\omega_2'^2 + C\omega_3'^2) + \tilde{\Delta}(t, \bar{s}_2 - \bar{r}_2, \bar{s}_3 - \bar{r}_3).
\end{aligned}$$

Здесь $c_1 = 3 \max\{0; C - A\}$, $c_2 = \max\{A; C\}$, a_1, a_2 — произвольным образом выбранные положительные постоянные,

$$|\tilde{\Delta}(t, \bar{s}_2 - \bar{r}_2, \bar{s}_3 - \bar{r}_3)| \leq \tilde{c}(|\bar{s}_2 - \bar{r}_2|^3 + |\bar{s}_3 - \bar{r}_3|^3), \quad \tilde{c} = \text{const} > 0,$$

ν_{\max} и $\hat{\nu}(t)$ — наибольшие собственные числа матриц

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 4(\bar{b}_1^2 + \bar{b}_3^2) & 4\bar{b}_1(\bar{b}_2 + \bar{b}_3) & 0 \\ 4\bar{b}_1(\bar{b}_2 + \bar{b}_3) & 4(\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\bar{b}_2 + \bar{b}_3)^2 \end{pmatrix}, \quad (14) \\
&\begin{pmatrix} 4(\Psi_1^2(t) + \Psi_3^2(t)) & 4\Psi_1(t)(\Psi_2(t) + \Psi_3(t)) & 0 \\ 4\Psi_1(t)(\Psi_2(t) + \Psi_3(t)) & 4(\Psi_1^2(t) + \Psi_2^2(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\Psi_2(t) + \Psi_3(t))^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для положительной определенности функции \tilde{V} достаточно выполнения неравенств

$$\beta > \frac{c_2}{ha_1}, \quad (15)$$

$$\bar{\nu} > \frac{a_1\nu_{\max}}{4h} + \frac{k_L \sup_{t \geq 0} \hat{\nu}(t)}{4ha_2} + \frac{k_L a_2 \nu_{\max}}{4h} + \beta\omega_0^2 c_1. \quad (16)$$

6. Исследование производной функции Ляпунова. Дифференцируя функцию \tilde{V} в силу системы (12), (13), получаем

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{V}} &= -\beta h|\bar{\omega}'|^2 - \frac{k_L}{h}|\bar{\Phi}|^2 + \beta k_L \bar{\omega}'^\top \bar{\Phi} - \frac{\omega_0}{h} \bar{\Phi}^\top \mathbf{J}(\bar{\omega}' \times \bar{r}_2) + \frac{\omega_0}{h} \omega'_3 (C - A) \bar{\Phi}^\top \bar{r}_1 + \\
&+ \frac{1}{h}(\bar{b}_2 \bar{r}_2 \times (\bar{\omega}' \times \bar{r}_2) - \bar{b}_1(\bar{r}_2 \times (\bar{\omega}' \times \bar{r}_3) + \bar{r}_3 \times (\bar{\omega}' \times \bar{r}_2)) + \bar{b}_3 \bar{r}_3 \times (\bar{\omega}' \times \bar{r}_3))^\top \mathbf{J} \bar{\omega}' - \\
&- \frac{k_L}{h} \bar{\Phi}^\top (\Psi_2(t)\bar{r}_2 \times (\bar{\omega}' \times \bar{r}_2) - \Psi_1(t)(\bar{r}_2 \times (\bar{\omega}' \times \bar{r}_3) + \bar{r}_3 \times (\bar{\omega}' \times \bar{r}_2)) + \Psi_3(t)\bar{r}_3 \times (\bar{\omega}' \times \bar{r}_3)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k_L}{h} \left(\Psi_2(t) \vec{r}_2 \times \vec{s}_2 - \Psi_1(t) (\vec{r}_2 \times \vec{s}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{s}_2) + \Psi_3(t) \vec{r}_3 \times \vec{s}_3 \right)^\top \left(\bar{b}_2 \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_2) + \right. \\
& \quad \left. + \beta k_L \vec{\omega}'^\top \left(\Psi_2(t) \vec{r}_2 \times \vec{s}_2 - \Psi_1(t) (\vec{r}_2 \times \vec{s}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{s}_2) + \Psi_3(t) \vec{r}_3 \times \vec{s}_3 \right) - \right. \\
& \quad \left. - \bar{b}_1 (\vec{r}_2 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_3) + \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_2)) + \bar{b}_3 \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_3) \right) + \\
& \quad + \frac{\omega_0^2}{h} \beta_3 (C - A) \vec{\Phi}^\top \vec{r}_1 - \frac{3\omega_0^2}{h} (C - A) \vec{\Phi}^\top \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ -\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta_1(t, \vec{\omega}', \vec{s}_2 - \vec{r}_2, \vec{s}_3 - \vec{r}_3) \leq \\
& \leq -\beta h |\vec{\omega}'|^2 - \frac{k_L}{h} |\vec{\Phi}|^2 + \frac{\omega_0^2}{h} |C - A| |\vec{\Phi}| (|\vec{s}_2 - \vec{r}_2| + 3|\vec{s}_3 - \vec{r}_3|) + \\
& \quad + \left(\beta k_L + \frac{\omega_0}{h} C \right) |\vec{\omega}'| |\vec{\Phi}| + \frac{1}{2} \beta k_L \sqrt{\sup_{t \geq 0} \tilde{\lambda}(t)} |\vec{\omega}'| \sqrt{|\vec{r}_2 - \vec{s}_2|^2 + |\vec{r}_3 - \vec{s}_3|^2} + \\
& + \frac{k_L}{h} |\vec{\Phi}| \left| \Psi_2(t) \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_2) - \Psi_1(t) (\vec{r}_2 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_3) + \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_2)) + \Psi_3(t) \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_3) \right| + \\
& \quad + \frac{k_L}{2h} \sqrt{\sup_{t \geq 0} \hat{\nu}(t)} \sqrt{|\vec{r}_2 - \vec{s}_2|^2 + |\vec{r}_3 - \vec{s}_3|^2} |\bar{b}_2 \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_2) - \\
& \quad - \bar{b}_1 (\vec{r}_2 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_3) + \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_2)) + \bar{b}_3 \vec{r}_3 \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}_3)| + \\
& \quad + \frac{\mu}{h} |\vec{\omega}'|^2 + \Delta_1(t, \vec{\omega}', \vec{s}_2 - \vec{r}_2, \vec{s}_3 - \vec{r}_3) \leq \\
& \leq - \left(\beta h - \frac{\mu}{h} \right) |\vec{\omega}'|^2 - \left(\frac{k_L}{h} - \frac{2\omega_0^2}{h} \sqrt{\frac{10}{\nu_{\min}}} |C - A| \right) |\vec{\Phi}|^2 + \\
& \quad + \theta |\vec{\omega}'| |\vec{\Phi}| + \Delta_2(t, \vec{\omega}', \vec{s}_2 - \vec{r}_2, \vec{s}_3 - \vec{r}_3) \leq - \left(\beta h - \frac{\mu}{h} - \frac{1}{2} \theta a_3 \right) |\vec{\omega}'|^2 - \\
& \quad - \left(\frac{k_L}{h} - \frac{2\omega_0^2}{h} \sqrt{\frac{10}{\nu_{\min}}} |C - A| - \frac{1}{2a_3} \theta \right) |\vec{\Phi}|^2 + \Delta_2(t, \vec{\omega}', \vec{s}_2 - \vec{r}_2, \vec{s}_3 - \vec{r}_3).
\end{aligned}$$

Здесь a_3 — произвольным образом выбранное положительное число, ν_{\min} — наименьшее собственное число матрицы (14),

$$|\Delta_i(t, \vec{\omega}', \vec{s}_2 - \vec{r}_2, \vec{s}_3 - \vec{r}_3)| \leq \rho_i (|\vec{\omega}'|^3 + |\vec{s}_2 - \vec{r}_2|^3 + |\vec{s}_3 - \vec{r}_3|^3), \quad i = 1, 2,$$

ρ_1 и ρ_2 — положительные постоянные,

$$\begin{aligned}
\theta = \beta k_L + \frac{\omega_0}{h} C + \frac{k_L}{h} \sup_{t \geq 0} (|\Psi_1(t)| + |\Psi_2(t)| + |\Psi_3(t)|) + \\
+ \frac{k_L}{h} \sqrt{\frac{\sup_{t \geq 0} \hat{\nu}(t)}{\nu_{\min}}} (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3) + \beta k_L \sqrt{\frac{\sup_{t \geq 0} \tilde{\lambda}(t)}{\nu_{\min}}},
\end{aligned}$$

$\tilde{\lambda}(t)$ и μ — наибольшие собственные числа матриц

$$\begin{pmatrix} 4(\tilde{b}_1^2(t) + \tilde{b}_3^2(t)) & 4\tilde{b}_1(t)(\tilde{b}_2(t) + \tilde{b}_3(t)) & 0 \\ 4\tilde{b}_1(t)(\tilde{b}_2(t) + \tilde{b}_3(t)) & 4(\tilde{b}_1^2(t) + \tilde{b}_2^2(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\tilde{b}_2(t) + \tilde{b}_3)^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_3 A + \bar{b}_2 A \cos^2 \psi_0 & -\bar{b}_2 A \sin \psi_0 \cos \psi_0 & \frac{1}{2} \bar{b}_1 (A + C) \sin \psi_0 \\ -\bar{b}_2 A \sin \psi_0 \cos \psi_0 & \bar{b}_3 A + \bar{b}_2 A \sin^2 \psi_0 & \frac{1}{2} \bar{b}_1 (A + C) \cos \psi_0 \\ \frac{1}{2} \bar{b}_1 (A + C) \sin \psi_0 & \frac{1}{2} \bar{b}_1 (A + C) \cos \psi_0 & C \bar{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, при выполнении неравенств

$$\beta h > \frac{\mu}{h} + \frac{1}{2} \theta a_3, \quad (17)$$

$$\frac{k_L}{h} > \frac{2\omega_0^2}{h} \sqrt{\frac{10}{\nu_{\min}}} |C - A| + \frac{1}{2a_3} \theta \quad (18)$$

производная функции \tilde{V} в силу системы (12), (13) отрицательно определена.

7. Условия асимптотической устойчивости. Таким образом, если имеют место соотношения (15)–(18), то функция \tilde{V} удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. В указанные соотношения входят вспомогательные параметры a_1, a_2, a_3 .

Нетрудно проверить, что для получения наиболее широкой области допустимых значений величин h и k_L нужно взять $a_2 = \sqrt{\sup_{t \geq 0} \dot{\nu}(t) / \nu_{\max}}$. Подставляя это значение в (15) и (16) и исключая параметры a_1 и a_3 , приводим условия (15)–(18) к виду

$$\alpha \left(4h\bar{\nu} - 2k_L \sqrt{\nu_{\max} \cdot \sup_{t \geq 0} \dot{\nu}(t)} - 4\alpha\omega_0^2 c_1 \right) - A \max\{1, \varepsilon\} \nu_{\max} > 0, \quad (19)$$

$$4(\alpha h - \mu) \left(k_L - \frac{2\omega_0^2}{h} \sqrt{\frac{10}{\nu_{\min}}} A |1 - \varepsilon| \right) - h^2 \theta^2 > 0, \quad (20)$$

где $\alpha = \beta h$, $\varepsilon = C/A$. Неравенства (19), (20) позволяют получить достаточные условия асимптотической устойчивости стабилизируемого движения ИСЗ с заданными значениями параметров.

8. Результаты численного моделирования. В качестве примера рассмотрим ИСЗ с моментами инерции $A = B = 1000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $C = 1100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, движущийся по круговой орбите с радиусом $R = 7 \cdot 10^6 \text{ м}$ и наклонением $i = 20^\circ$. Как известно [1], при таком соотношении моментов инерции ИСЗ гравитационный момент, действующий на ИСЗ, является возмущающим в окрестности программного движения (3). Поэтому стабилизация программного движения ИСЗ в рассматриваемом случае происходит исключительно за счет лоренцева и диссипативного моментов.

Предположим, что ИСЗ в начальный момент времени отклонен от прямого положения равновесия так, что «самолетные» углы крена, тангажа и рыскания, определяющие ориентацию ИСЗ в базовой системе координат, равны $\varphi(0) = 0.5$, $\theta(0) = 0.5$, $\psi(0) = -0.5$, а проекции угловой скорости ИСЗ на главные центральные оси инерции равны $\omega_1(0) = 0.1\omega_0$, $\omega_2(0) = 1.1\omega_0$, $\omega_3(0) = 0.1\omega_0$. В программном движении $\psi_0 = 0.5$. Выберем $k_L = 0.02$, $h = 0.4$.

Процесс стабилизации «самолетных» углов крена $\varphi(u)$, тангажа $\theta(u)$ и рыскания $\psi(u)$ в зависимости от аргумента широты $u = \omega_0 t$ показан на рис. 1.

Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений вращательного движения ИСЗ использовалась не только дипольная модель (5) геомагнитного поля, но и международная модель IGRF [25]. Оба варианта расчетов дают

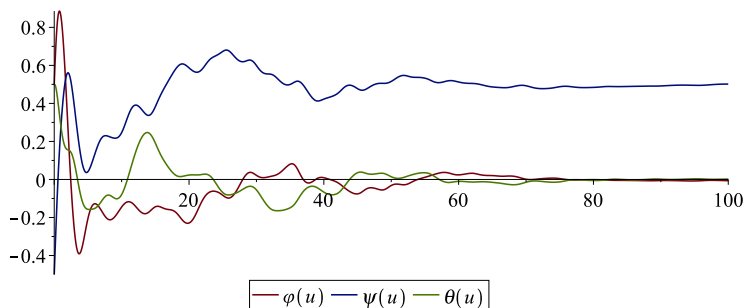


Рис. 1. «Самолетные» углы в процессе стабилизации ИСЗ.

качественно совпадающие результаты. На рис. 1 показаны результаты, полученные на базе модели IGRF.

Для оценки реализуемости предложенного управления были рассчитаны величины управляющих (лоренцева и диссипативного) и возмущающего (гравитационного) моментов. Показано, что указанные моменты принимают близкие по величине значения. Кроме того, рассчитана величина управляемого вектора \vec{P} и величина $|\vec{\rho}_0|$ смещения центра заряда относительно центра масс ИСЗ.

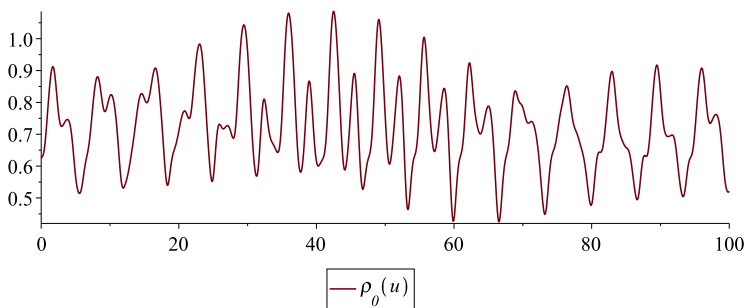


Рис. 2. Смещение центра заряда относительно центра масс ИСЗ.

Из рис. 2 видно, что величина $|\vec{\rho}_0|$ находится в пределах одного метра. Таким образом, результаты численного моделирования согласуются с выводами, полученными в статье, и подтверждают работоспособность предложенного управления.

9. Заключение. В работе рассмотрен динамически симметричный ИСЗ, находящийся на орбите малого наклона. В строгой нелинейной постановке решена задача о лоренцевой стабилизации ИСЗ в непрямом положении равновесия в орбитальной системе координат. С учетом возмущающего гравитационного момента доказана возможность выбора параметров управления, обеспечивающих выполнение достаточных условий асимптотической устойчивости программного режима движения ИСЗ. Указанные условия представлены в виде системы двух неравенств относительно параметров управления. Предложенный конструктивный подход к решению задачи основан на построении нестационарной функции Ляпунова и модификации метода усреднения для случая медленно осциллирующих нестационарных возмущений. Представлены результаты компьютерного моделирования, подтверждающие работоспособность и реализуемость предложенного управления.

Литература

1. Белецкий В. В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс*. Москва, Наука (1965).
2. Сарычев В. А. *Вопросы ориентации искусственных спутников*. В: Исследование космического пространства. Т. 11. Итоги науки и техники. Москва, ВИНТИ АН СССР (1978).
3. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. *Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли*. В: Исследование космического пространства. Т. 23. Итоги науки и техники. Москва, ВИНТИ АН СССР (1985).
4. Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I. Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation. *Acta Astronautica* **77**, 48–60 (2012).
5. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame. *Acta Astronautica* **139**, 122–129 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.06.033>
6. Петров К. Г., Тихонов А. А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 1: Напряженность магнитного поля Земли в орбитальной системе координат. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 1, 92–100 (1999).
7. Петров К. Г., Тихонов А. А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 2: Вычисление момента и оценки его составляющих. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 3, 81–91 (1999).
8. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле. *Космические исследования* **41** (1), 69–79 (2003).
9. Антипов К. А., Тихонов А. А. Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли. *Автомат. и телелек.*, (8), 44–56 (2007).
10. Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A. Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the Konig frame. *Nonlinear Dynamics* **82**, 1493–1505 (2015). <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2256-1>
11. Sussingham J. C., Watkins S. A., Cocks F. H. Forty years of development of active systems for radiation protection of spacecraft. *J. Astronaut. Sci.* **47**, 165–175 (1999).
12. Joshi R. P., Qiu H., Tripathi R. K. Configuration studies for active electrostatic space radiation shielding. *Acta Astronautica* **88**, 138–145 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.03.011>
13. Giri D. K., Sinha M. Three-axis attitude control of Earth-pointing isoinertial magnetoCoulombic satellites. *Int. J. Dynam. Control* **5**, 644–652 (2017).
14. Митропольский Ю. А. *Метод усреднения в нелинейной механике*. Киев, Наукова думка (1971).
15. Гребеников Е. А. *Метод усреднения в прикладных задачах*. Москва, Наука (1986).
16. Найфэ А. *Введение в методы возмущений*, пер. с англ. Москва, Мир (1984).
17. Красильников П. С. Об усреднении дифференциальных уравнений с двумя независимыми малыми параметрами. *Доклады Академии наук* **436** (3), 332–335 (2011).
18. Красильников П. С. *Прикладные методы исследования нелинейных колебаний*. Ижевск, Институт компьютерных исследований (2015).
19. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Rigid body stabilization under time-varying perturbations with zero mean values. *Cybernetics and Physics* **7** (1), 5–10 (2018). <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2018-7-1-5-10>
20. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Одноосная стабилизация вращательного движения твердого тела при наличии возмущений с нулевыми средними значениями. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 2, 270–280 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209>
21. Александров А. Ю. Об устойчивости равновесия нестационарных систем. *Прикладная математика и механика* **60**, вып. 2, 205–209 (1996).
22. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P. Stability analysis for a class of nonlinear nonstationary systems via averaging. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **13** (4), 332–343 (2013).
23. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*. Москва, Наука (1973).
24. Тихонов А. А., Петров К. Г. Мультипольные модели магнитного поля Земли. *Космические исследования* **40** (3), 219–229 (2002).
25. International Geomagnetic Reference Field. Доступно на: <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html> (дата обращения: 05.12.2020).

26. Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium. *Journal of Mathematical Sciences* **110** (2), 2528–2557 (2002). <https://doi.org/10.1023/a:1015026512786>

27. Зубов В. И. *Динамика управляемых систем*. Москва, Высшая школа (1982).

28. Смирнов Е. Я. *Некоторые задачи математической теории управления*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1981).

29. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация ИСЗ на экваториальной орбите. *Космические исследования* **50** (4), 335–340 (2012).

Статья поступила в редакцию 26 февраля 2020 г.;
после доработки 27 апреля 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Александров Александр Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.u.alexandrov@spbu.ru

Андрьянова Наталья Романовна — магистрант; st040174@student.spbu.ru

Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.tikhonov@spbu.ru

Averaging technique in the problem of satellite attitude stabilization in indirect position in the orbital reference frame with the use of Lorentz torque*

A. Yu. Aleksandrov, N. R. Andriyanova, A. A. Tikhonov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Aleksandrov A. Yu., Andriyanova N. R., Tikhonov A. A. Averaging technique in the problem of satellite attitude stabilization in indirect position in the orbital reference frame with the use of Lorentz torque. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 123–137. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.111> (In Russian)

A dynamically symmetric satellite in a circular orbit of small inclination is considered. The problem of the Lorentzian stabilization of the satellite in the orbital coordinate system in the indirect equilibrium position is solved under the conditions of the perturbing effect of the gravitational torque. To solve this problem, which is characterized by incomplete control, a method of averaging differential equations is developed. Using the original construction of the unsteady Lyapunov function, we obtain sufficient conditions for the asymptotic stability of the programmed satellite motion mode in the form of constructive inequalities with respect to the control parameters.

Keywords: satellite, stabilization, attitude motion, asymptotic stability, Lyapunov function method.

References

1. Beletsky V. V. *Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass*. Moscow, Nauka Publ. (1965). (In Russian)

2. Sarychev V. A. *Problems of artificial satellites orientation*. In: Space Research, vol. 11, Advances in Science and Technology, Moscow, VINITI of the USSR Academy of Sciences (1978). (In Russian)

3. Sarychev V. A., Ovchinnikov M. Yu. *Magnetic systems for orientation of satellites*. In: Space Research, vol. 23, Advances in Science and Technology, Moscow, VINITI of the USSR Academy of Sciences (1985). (In Russian)

4. Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D. S., Penkov V. I. Asymptotic study of a complete magnetic attitude control cycle providing a single-axis orientation. *Acta Astronautica* **77**, 48–60 (2012).

*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant No. 19-01-00146-a).

5. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame. *Acta Astronautica* **139**, 122–129 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.06.033>
6. Petrov K. G., Tikhonov A. A. The moment of Lorentz forces, acting upon the charged satellite in the geomagnetic field. Part 1. The strength of the Earth's magnetic field in the orbital coordinate system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 1, 92–100 (1999). (In Russian)
7. Petrov K. G., Tikhonov A. A. The moment of Lorentz forces, acting upon the charged satellite in the geomagnetic field. Part 2. The determination of the moment and estimations of its components. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 3, 81–91 (1999). (In Russian)
8. Tikhonov A. A. A method of semipassive attitude stabilization of a spacecraft in the geomagnetic field. *Kosmicheskie issledovaniya* **41** (1), 69–79 (2003). (In Russian) [Engl. transl.: *Cosmic Research* **41** (1), 63–73 (2003)]. <https://doi.org/10.1023/A:1022355730291>.
9. Antipov K. A., Tikhonov A. A. Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field. *Avtomat. i Telemekh.*, (8), 44–56 (2007). (In Russian) [Engl. transl.: *Autom. Remote Control* **68** (8), 1333–1345 (2007)].
10. Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A. Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the Konig frame. *Nonlinear Dynamics* **82**, 1493–1505 (2015). <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2256-1>
11. Sussingham J. C., Watkins S. A., Cocks F. H. Forty years of development of active systems for radiation protection of spacecraft. *J. Astronaut. Sci.* **47**, 165–175 (1999).
12. Joshi R. P., Qiu H., Tripathi R. K. Configuration studies for active electrostatic space radiation shielding. *Acta Astronautica* **88**, 138–145 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.03.011>
13. Giri D. K., Sinha M. Three-axis attitude control of Earth-pointing isoinertial magnetoCoulombic satellites. *Int. J. Dynam. Control* **5**, 644–652 (2017).
14. Mitropolsky Y. A. *The Averaging Method in Nonlinear Mechanics*. Kiev, Naukova Dumka Publ. (1971). (In Russian)
15. Grebennikov E. A. *The Averaging Method in Applied Problems*. Moscow, Nauka Publ. (1986). (In Russian)
16. Nayfeh A. H. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York, Wiley Interscience (1981). [Russ. ed.: *Vvedenie v metody vozmushhenij*. Moscow, Mir Publ. (1984)].
17. Krasil'nikov P. S. On the average of differential equations with two independent small parameters. *Doklady Akademii Nauk* **436** (3), 332–335 (2011). (In Russian) [Engl. transl.: *Doklady Physics* **56**, 58–61 (2011)]. <https://doi.org/10.1134/S1028335811010113>.
18. Krasil'nikov P. S. *Applied Methods for the Study of Nonlinear Oscillations*. Izhevsk, Institute of Computer Science Press (2015). (In Russian)
19. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Rigid body stabilization under time-varying perturbations with zero mean values. *Cybernetics and Physics* **7** (1), 5–10 (2018). <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2018-7-1-5-10>
20. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Uniaxial attitude stabilization of a rigid body under conditions of nonstationary perturbations with zero mean values. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 2, 270–280 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg. Univ. Math.* **52** (2), 187–193 (2019)]. <https://doi.org/10.1134/S106345411902002X>.
21. Aleksandrov A. Yu. On the stability of equilibrium of unsteady systems. *Prikladnaya matematika i mekhanika* **60** (2), 205–209 (1996). (In Russian)
22. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P. Stability analysis for a class of nonlinear nonstationary systems via averaging. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **13** (4), 332–343 (2013).
23. Branets V. N., Shmygolevsky I. P. *Application of Quaternions in the Problems of the Rigid Body Attitude Determination*. Moscow, Nauka Publ. (1973). (In Russian)
24. Tikhonov A. A. Petrov K. G. Multipole models of the Earth's magnetic field. *Kosmicheskie issledovaniya* **40** (3), 219–229 (2002). (In Russian) [Engl. transl.: *Cosmic Research* **40** (2), 203–212 (2002)]. <https://doi.org/10.1023/A:1015916718570>.
25. International Geomagnetic Reference Field. Available at: <http://www.ngdc.noaa.gov/IGAG/vmod/igrf.html> (accessed: Dec. 05, 2020).
26. Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium. *Journal of Mathematical Sciences* **110** (2), 2528–2557 (2002). <https://doi.org/10.1023/a:1015026512786>

27. Zubov V. I. *Dynamics of Controlled Systems*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. (1982). (In Russian)

28. Smirnov E. Ya. *Some Problems of the Mathematical Control Theory*. Leningrad, Leningrad University Press (1981). (In Russian)

29. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Electrodynamic stabilization of Earth-orbiting satellites in equatorial orbits. *Kosmicheskie issledovaniya* **50** (4), 335–340 (2012). (In Russian) [Engl. transl.: *Cosmic Research* **50** (4), 313–318 (2012). <https://doi.org/10.1134/S001095251203001X>].

Received: February 26, 2020

Revised: April 27, 2020

Accepted: September 17, 2020

Authors' information:

Aleksandr Yu. Aleksandrov — a.u.aleksandrov@spbu.ru

Natalya R. Andriyanova — st040174@student.spbu.ru

Aleksey A. Tikhonov — a.tikhonov@spbu.ru