Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1
УДК 531; 530.1; 521.1; 519.2
MSC 01-00; 49-03; 70-03; 82-02; 93-03

Моделирование задач динамики и развитие научных направлений механики и прикладной математики

Г. В. Алферов, В. С. Королев, Е. Н. Поляхова, $\boxed{\textit{К. В. Холшевников}}$

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Алферов Г. В., Королев В. С., Поляхова Е. Н., Холшевников К. В.* Моделирование задач динамики и развитие научных направлений механики и прикладной математики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 138–149. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.112

Рассматривается развитие научных направлений механики в результате исследований почетного профессора Санкт-Петербургского государственного университета, заслуженного деятеля науки и техники РФ, доктора физико-математических наук Виктора Сергеевича Новоселова, основателя научной школы по аналитической механике, космической динамике, биомеханике и прикладной математике. Основные теоремы аналитической динамики были распространены на механические системы переменного состава. С помощью вариационных методов был получен ряд замечательных результатов по динамике управляемых систем. В частности, была предложена общая схема построения аналитических приближений, которая неоднократно применялась для решения уравнений.

Ключевые слова: аналитическая механика, космическая динамика, управляемые системы, робототехника, биомеханика, квантовая механика и статистическая физика.

1. Задачи аналитической механики систем переменного состава. Исследование задач механики Виктор Сергеевич Новоселов (1926–2019) начинал студентом математико-механического факультета Ленинградского государственного университета под руководством известных советских ученых Юрия Александровича Круткова и Николая Николаевича Поляхова. После окончания в 1951 г. он был оставлен для работы на кафедре теоретической механики, а уже в следующем году защитил кандидатскую диссертацию «Некоторые вопросы механики переменных масс», в которой основные теоремы аналитической динамики были распространены на механические системы переменного состава.

Основные результаты позднее получили подробное развитие в книге «Аналитическая механика систем с переменными массами» [1], где вводится абстрактное понятие точки переменной массы в виде наделенной массой малой области координатной системы, жестко связанной с основным телом. Предметом рассмотрения становится система частиц с постоянными массами, состав которой изменяется. Это позволило учитывать изменение массы и внутреннее движение частиц, приводящих к созданию реактивных сил. Уточняется уравнение Мещерского и обобщается уравнение Жуковского движения материальной точки или тела переменной массы $m(t)$, которое индуцирует на основании закона изменения количества движения появление в дополнение к активным силам F реактивных сил при отделении частиц массы тела $m_1(t)$ с относительной скоростью v_1 или присоединения массы $m_2(t)$ с относительной скоростью v_2. Уравнение имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = F + \frac{dm_1}{dt}(u_1 - v) - \frac{dm_2}{dt}(u_2 - v). \tag{1}$$

Представлены решения задач Циолковского и ряда других задач движения точки переменной массы под действием однородного или центрального гравитационного поля [1, 2]. Дано обоснование для задач аналитической механики систем переменной массы с учетом внутреннего перемещения частиц системы или тел.

Развивая работы Н. Г. Четаева по динамике неголономных систем с нелинейными связями или ограничениями, В. С. Новоселов создал общий подход к проблеме варьирования обобщенных скоростей [3–5]. Полученный фундаментальный результат состоял в обобщении широко известного принципа Гамильтона — Остроградского: *Действие S при $dq = 0$ принимает вид функционала*

$$S = \int_0^t pdq - Hdt = -\int_0^t Hdt. \tag{2}$$

Траектория голономной модели минимизирует функционал действия, если промежуток интегрирования достаточно мал.

Теорема (В. С. Новоселов). *Дифференциальные уравнения нормализуемой по Коши динамической модели с кинетическим потенциалом могут быть представлены в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{3}$$

называемых каноническими уравнениями Гамильтона.

Этой теме посвящена докторская диссертация В. С. Новоселова «Некоторые вопросы неголономной механики». С помощью вариационной методики был получен ряд замечательных результатов по динамике управляемых систем. В частности, была предложена и многократно применена общая схема построения аналитических приближений для решения уравнений, описывающих необходимые условия при оптимизации импульсных космических траекторий.

В работе «Вариационные методы в механике» [3] были получены фундаментальные результаты по движению неголономных механических систем, в том числе нелинейных. Было введено новое понятие нелинейных неголономных координат, с помощью которых удалось получить наиболее общую форму уравнений движения неголономных систем с нелинейными и нестационарными связями.

Вводится оператор голономной динамической модели с помощью функционала на пространстве линейных форм. Изучаются динамические модели Лагранжа и модели с обобщенным кинетическим потенциалом. Получены условия стационарности функционалов, а также их оптимальности на множестве расширенных экстремалей управляемого движения.

Важный класс составляют стохастические управляемые модели (системы), которые отличаются учетом влияния случайных факторов как при отработке управлений и оценке состояния, так и при записи оператора динамической модели или условий выбора фазовых переменных.

Получены обыкновенные дифференциальные уравнения движения в неголономных координатах для модели Лагранжа в двух эквивалентных видах: уравнений Воронца—Гамеля и уравнений Чаплыгина.

В работе «Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях» [6] построена общая схема аналитического решения вариационных задач оптимизации движения космических аппаратов в гравитационном поле.

Основные результаты были представлены в докладе на XXIV конгрессе Международной федерации астронавтики (Баку, 1973).

Для выбора оптимальных управлений получены необходимые условия экстремума в теории оптимальных процессов. Движение механической системы описывается n-мерным вектором $x(t)$ и заданным вектором кусочно-непрерывных функций $u(t)$ из множества U, для которых выполняются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad x \in C^2, \quad F \in C^1, \quad F'_x \in C^1. \tag{4}$$

Функционал критерия качества или оптимальности решений

$$S = \int_{t_n}^{t_k} F_0(x, u, t) dt + \Phi_0(x^n, x^k, t_n, t_k) \to \min$$

на допустимых траекториях, которые являются решениями уравнений (4) при выборе управлений $u(t)$, после введения дополнительных множителей Лагранжа $\lambda(t)$ равносилен условному функционалу вида

$$V = \int_{t_n}^{t_k} L(x, \dot{x}, \lambda, u, t) dt + \Phi(x^n, x^k, t_n, t_k). \tag{5}$$

При вычислении вариации функционала (5) целесообразно от функции Лагранжа L перейти к соответствующей функции Гамильтона H аналогично (3) с помощью преобразования Лежандра, которое используется при переходе к каноническим уравнениям с учетом уравнений (4). Получаются соотношения

$$L = F_0 + \lambda(\dot{x} - F), \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda, \qquad H(x, \lambda, u, t) = -F_0 + \lambda F. \tag{6}$$

В пространстве допустимых кривых сравнения вариации являются независимыми. Одну или несколько вариаций можно выбрать отличными от нуля, остальные полагать равными нулю. На этом основании получены следующие необходимые условия стационарности:

— уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\dot{\lambda_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial F_0}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i}, \tag{7}$$

— уравнения движения в виде

$$\dot{x_i} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = F_i, \tag{8}$$

— общее условие трансверсальности

$$(\lambda \Delta x - H \Delta t)_{t_n}^{t_k} + \Delta \Phi = 0. \tag{9}$$

При рассмотрении слабых вариаций управлений получаем еще одно условие:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad u_{j1} < u_j < u_{j2}. \tag{10}$$

Необходимое условие оптимальности процесса в общем случае, как известно, получило название *принципа максимума Понтрягина.* При выборе ограниченного множества U допустимых управлений $u(t, x)$ оно равносильно соотношению

$$H(x, \lambda, u^*, t) = \max_{u \in U} H(x, \lambda, u, t). \tag{11}$$

Был предложен один из вариантов обоснования этого принципа и представлены возможности его применения для решения ряда задач.

Дано обобщение метода Ляпунова — Пуанкаре для решения системы дифференциальных уравнений в виде ряда по степеням малого параметра ε применительно к исследованию необходимых условий оптимальности. Доказана теорема о преобразовании лагранжевых множителей, функции Понтрягина и условий трансверсальности при замене переменных. Разработана методика приближенного аналитического решения задач оптимизации.

Предполагается, что управления, для которых граничные значения u_{j1} и u_{j2} конечны, входят в функцию H линейно. Приращение условного функционала, вызванное сильными вариациями таких управлений, можно в смысле эквивалентности бесконечно малых величин записать так:

$$\Delta \Psi \approx -\int_{t_H}^{t_K} \frac{\partial H}{\partial u_j} (u_j' - u_j)\, dt, \tag{12}$$

где $\frac{\partial H}{\partial u_j}$ не будет зависеть от разрывных управлений. Вариация функционала (12), вызванная разностью линейных разрывных управлений на точном решении и приближенном с точностью до ε решении, имеет порядок ε^2.

Теорема (В. С. Новоселов). *Пусть функция H линейно зависит от разрывных управлений. Опустим в уравнениях Эйлера — Лагранжа в условиях трансверсальности и в функции H при получении условий ее максимальности члены порядка μ^{m-1}, а в уравнениях движения и граничных условиях — члены порядка μ^m. Тогда ошибка оптимального значения функционала имеет порядок μ^m при $m \geqslant 2$.*

С помощью вариационной методики В. С. Новоселовым был получен ряд замечательных результатов по динамике управляемых систем с приложениями к механике космического полета при решении задач оптимизации в гравитационных полях.

2. Оптимальный переход в центральном гравитационном поле. Рассматривается задача оптимального маневрирования точки переменной массы в центральном гравитационном поле. Пусть y_1, y_2, y_3 — декартовы координаты точки относительно неподвижной системы координат с началом в центре планеты, принимаемой за притягивающий центр. Производные координат по времени обозначим соответственно v_1, v_2, v_3. Уравнения движения (4), составленные на основе уравнения И. В. Мещерского (1) для точки переменной массы, будут представлены в виде

$$\dot{v}_i = g_i + \mu u_r m^{-1} \alpha_i, \quad \dot{y}_i = v_i, \quad \dot{m} = -\mu, \tag{13}$$

$$g_i = -\varkappa^2 y_i (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь g_i — компоненты ускорения, вызванные притяжением к планете, $\varkappa^2$ — произведение универсальной гравитационной постоянной на массу центрального тела, $\mu \geqslant 0$ — расход массы в единицу времени, u_r — положительная постоянная относительная скорость истечения частиц, m — масса точки, α_i — направляющие косинусы вектора тяги.

Управлениями будут величины α_i, подчиненные ограничению

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \tag{14}$$

а также величина μ, которая вследствие ограниченности тяги двигателя должна удовлетворять условию $0 \leqslant \mu \leqslant \nu$, $\nu = \mathrm{const} > 0$.

Общая задача оптимизации решений уравнений (13) по минимуму расхода массы (топлива или энергии) содержит семь фазовых переменных $x = (v_i, y_i, m)$, т. е. $x \in \mathbf{R}^7$, и четыре управляющие функции $u = (\alpha_i, \mu) \in \mathbf{R}^4$. Задача заключается в минимизации функционала:

$$V = \int_{t_H}^{t_K} \mu \, dt.$$

Поскольку используются зависимые управления α_i, следует расширить постановку вариационной задачи механики управляемого движения и при переходе к варьированию условного функционала ввести дополнительный множитель Лагранжа, отвечающий уравнению связи (14). Функция Лагранжа с учетом ограничений будет иметь вид

$$L = \mu + \lambda_i(\dot{v}_i - g_i - \mu u_r m^{-1}\alpha_i) + \lambda_{3+i}(\dot{y}_i - v_i) + \lambda_7(\dot{m} + \mu) + \lambda_8(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 1). \tag{15}$$

По дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3. Лагранжиану (15) соответствует гамильтониан

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L,$$

$$H = -\mu + \lambda_i(g_i + \mu u_r m^{-1}\alpha_i) + \lambda_{3+i}v_i - \lambda_7\mu - \lambda_8(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 1). \tag{16}$$

С помощью введения лагранжевых множителей исходная задача заменяется задачей оптимизации условного функционала в расширенном пространстве, в котором все фазовые переменные, лагранжевы множители и все управления варьируются независимо. Экстремум по управлениям α_i внутренний, поэтому в числе условий максимума функции H (16) будут

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \mu u_r m^{-1}\lambda_i - 2\lambda_8\alpha_i = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \alpha_i^2} = -2\lambda_8 \leqslant 0, \quad \lambda_8 \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Максимуму H ввиду линейной зависимости от μ могут отвечать следующие варианты участков движения:

а) $\mu = 0$ при $\frac{\partial H}{\partial \mu} \leqslant 0$, режим нулевой тяги,

б) $\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0$, режим промежуточной тяги,

в) $\mu = \nu$ при $\frac{\partial H}{\partial \mu} \geqslant 0$, режим максимальной тяги.

В точках переключения управления μ и для режима промежуточной тяги выполняется условие

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = -1 + u_r m^{-1} \lambda_i \alpha_i - \lambda_7 = 0. \tag{18}$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа (7) принимают вид

$$\dot{\lambda}_i = -\lambda_{3+i}, \quad \dot{\lambda}_{3+i} = -\lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i}, \quad \dot{\lambda}_7 = \mu u_r m^{-2} \lambda_i \alpha_i. \tag{19}$$

Решение задачи связано с интегрированием 14 дифференциальных уравнений на указанных участках траектории движения, стыковке этих участков и удовлетворению граничным условиям и условиям трансверсальности.

В соответствии с отмеченными режимами управления оптимальная переходная траектория может состоять из дуг баллистического полета при отключении двигателя, режима промежуточной или *программируемой тяги* и, наконец, движения с наибольшей тягой. Если на участках первого и третьего типов управление μ известно (на первом — ноль, на третьем — ν), то для режима программируемой тяги имеем вырождение, так как условие (18) не содержит величины μ.

Если имеется участок промежуточной тяги, то соотношение (18) должно выполняться не только в изолированных точках (точках переключения управления μ), но и на некотором конечном интервале времени.

Проведенное рассмотрение выявляет сложность проблемы определения оптимального перехода в гравитационном поле. Выбор условий на граничные значения переменных приводит к постановке конкретных задач, для которых при упрощающих предположениях удается построить решение, в том числе

— задачи перехода с эллиптической орбиты на круговую,

— задачи движения на участках с максимальным реактивным ускорением,

— задачи в нулевом приближении,

— задачи управления с точностью до членов второго порядка,

— задачи двухимпульсного компланарного перехода между орбитами с малыми эксцентриситетами,

— задачи уточнения движения в нецентральном гравитационном поле с учетом действующих возмущений.

Основное направление исследований В. С. Новоселова было связано с задачами оптимального управления в космической динамике, но тематика и методы исследования постоянно расширялись [7–14]. Постоянный интерес В. С. Новоселова к трудным или новым проблемам аналитической механики, управления движением механических систем и космической динамики определил новые темы: робототехника, квантовая механика и статистическая физика, биомеханика живых систем и нейродинамика.

На факультете ПМ–ПУ была создана учебно-научная лаборатория робототехники и мехатроники. По постановлению Президиума АН СССР в 1981 г. открыт филиал кафедры при Институте информатики и автоматизации РАН. Одновременно с организацией филиала кафедры была усилена работа лабораторий и кафедры на факультете ПМ–ПУ, которые выполняли важные государственные работы [10] по разработке алгоритмов и программному обеспечению.

Проводились теоретические и прикладные исследования по аналитическим и численным алгоритмам динамики управляемого движения, гамильтоновым системам, методам численного интегрирования, оптимизации в нелинейных задачах механики. В. С. Новоселов неоднократно обращался к исследованию управляемого движения систем при действии случайных возмущений или сил. Решены базовые задачи механики систем с переменными массами. Ряд интересных результатов получен в сотрудничестве с зарубежными учеными.

В работах [8, 9] изложено построение теории движения системы при действии случайных возмущений или случайных сил. Введены понятия стохастических моделей теоретической механики и теории автоматического регулирования, которая отвечает обобщенной задаче определения отклика по одной из фазовых переменных для линейной механической системы со случайными возмущениями.

Проведено их исследование с использованием обобщенных функций и спектрального представления стационарных случайных процессов. Дано описание движения статистического ансамбля на основе рассмотрения системы большого, но конечного числа частиц, фазовые переменные каждой из которых удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона. Приведены модели термодинамики неравновесных статистических процессов движения молекул, с помощью которых получены основные уравнения механики сплошных сред с учетом теплообмена.

Отмечается история исследований классиками науки [9] и успехи предшественников при создании математических моделей: «*Первые научные высказывания о природе теплоты как движении мельчайших частиц были даны Р. Гуком (1665). Корифей отечественной науки М. В. Ломоносов (1750) заложил более основательно основы молекулярно-кинетической теории вещества... Кинетическая теория молекул и теория броуновского движения по существу статистические, так как невозможно получить решение для чрезвычайно большого числа уравнений. Эти теории оперируют с математическими ожиданиями и вторыми моментами фазовых координат молекул... Теорема о возвращении Пуанкаре и эргодические теоремы Биркгофа указали на сложные и неожиданные свойства гамильтоновой системы*».

Получены основные уравнения механики сплошных сред с учетом теплообмена. Построена теория диффузных процессов. С помощью теории броуновского движения оценивается эффект воздействия ударов молекулярных частиц на движение макроскопической механической системы. На примере автоматического регулирования курса самолета при помощи автопилота подробно рассматриваются две важные задачи: возмущение нелинейной механической системы обобщенным случайным процессом с обоснованием стохастического дифференциала в форме Ито и определение характеристик на основе фильтрации по методу максимума правдоподобия. Анализ особенностей движения такой частицы позволяет установить свойства плотности вероятности перехода и построить теорию, приводящую к уравнению Фоккера — Планка. Получено прямое и обратное уравнения Колмогорова для трехмерного случайного диффузионного процесса.

Нервная система состоит из большого числа нейронов, у человека их несколько миллиардов. Макроскопические результаты микроскопической передачи сигналов этой системы представляют собой математические ожидания своеобразных статистических процессов.

Предложено феноменологическое описание квантовой механики микрообъектов, основанное на применении линейных операторов в гильбертовом пространстве при использовании энергии как основной характеристики изучаемого процесса. Операторы действуют на волновые функции [11], которые выступают как своеобразные элементарные события вероятностного пространства и принадлежат комплексному гильбертову пространству. Предложена модель возбуждения и распространения нервных импульсов по нейрону [12], а также модель мышечного возбуждения с учетом цели движения. Математическая модель [13] пейсмекера (водителя сердечного ритма) рассматривается на основе ионного возбуждения мембраны клетки с нелинейным диффузионным процессом и приводит к простейшей автоколебательной модели для специализированных мышечных клеток. Ритм автовозбуждений регулируется внешними нервными воздействиями.

Информационные нервные импульсы зарождаются в шейках сенсорных нейронов, передаются с помощью химического синапса на сеть ассоциативных нейронов и поступают в центральную нервную систему. Команды центральной нервной системы на мышцы и различные внутренние органы передаются также с помощью подобных импульсов. Для модели распространения нервных импульсов по нейронному волокну предлагается использовать длинноволновое уравнение Кортевега — де Фриса. Для управления целенаправленными движениями человека важное значение имеет создание практической теории передачи информации в реальных нейронных сетях.

Для нейронной сети рассмотрены статистические модели обучения и распознавания образов. Рассматриваются парные взаимодействия системы нейронов. Возбуждения нейронов различаются по величине напряжения. Взаимодействие нейронов описывается простейшей моделью с потенциальной энергией в виде квадратичной формы, а задачей обучения является определение всех параметров матрицы квадратичной формы. Картину возбуждения нейронов во времени можно представить в виде последовательности строк таблицы, каждая из которых выражает развертку возбуждения соответствующего нейрона. Столбцы отвечают моментам времени.

На основе интегрального преобразования Фурье рассмотрено спектральное представление стационарных случайных процессов. Вводятся понятия передаточной функции и импульсной переходной функции, использование которых потребовало изложения теории обобщенных функций и интегрального преобразования Лапласа. Рассматриваются базовые вопросы квантовой статистики и оптимального управления состоянием квантово-механических систем. Исследованы модели эволюции состояния в квантовой механике, опирающейся на представления Гейзенберга, на основе оператора подобия и уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} + \Pi\varphi(x,t). \tag{20}$$

Здесь важнейшими переменными уравнения, определяющими движение квантового статистического ансамбля или системы, являются волновая функция $\varphi(x,t)$ и совокупность возможных состояний, для которых определена вероятность.

Связь уравнения Шредингера с классической механикой можно пояснить на примере задачи описания движения частицы массой m и потенциальной энергией $\Pi(q_\nu, t)$, где q_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ — декартовы координаты. Решение уравнения Шредингера (20), которое в этом случае имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \Pi(q,t)\psi, \tag{21}$$

можно искать в виде

$$\psi = e^{i\hbar^{-1}V}. \tag{22}$$

Вспомогательные соотношения

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t}\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_\nu} = i\hbar^{-1}\frac{\partial V}{\partial q_\nu}\psi,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q_\nu^2} = -\hbar^{-2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_\nu}\right)^2\psi + i\hbar^{-1}\frac{\partial^2 V}{\partial q_\nu^2}\psi$$

позволяют подставить (22) в (21). Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial q_\nu}\right)^2 + \Pi(q,t) - \frac{1}{2m}i\hbar\Delta V = 0. \tag{23}$$

Решение уравнения (23) в виде отрезка степенного ряда по степеням малого параметра $i\hbar$ при ограничении двумя первыми членами разложения

$$V = V_0 + i\hbar V_1$$

при нулевом приближении приводит к уравнению Гамильтона — Якоби классической механики

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial V_0}{\partial q_\nu}\right)^2 + \Pi(q,t) = 0, \tag{24}$$

для которого справедлива следующая теорема Якоби: *Если найден полный интеграл, т. е. удовлетворяющая уравнению* (24) *функция*

$$V_0(q_\nu, \alpha_\gamma, t), \qquad \alpha_\gamma = \text{const} \quad (\gamma = 1, 2, 3),$$

такая, что

$$\det\left[\frac{\partial^2 V_0}{\partial q_\nu \partial \alpha_\gamma}\right] \neq 0,$$

то координаты $q(\alpha,\beta,t)$ частицы определяются из интегралов гамильтоновых уравнений механики вида $\partial V/\partial\alpha_\nu = \beta_\nu$, где β_ν — независимые постоянные. Импульсы равны

$$p_\nu(q,\alpha,t) = \frac{\partial V_0}{\partial q_\nu}. \tag{25}$$

Поэтому в нулевом приближении положение частицы достоверно определяется и векторы поля импульсов ортогональны к поверхностям уровня $V_0(q,\alpha,t) = \text{const}$.

Для поправки первого порядка получают уравнение

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial V_0}{\partial q_\nu}\frac{\partial V_1}{\partial q_\nu} - \frac{1}{2m}\Delta V_0 = 0. \tag{26}$$

Плотность вероятности обнаружения частицы в окрестности точки q в момент времени t в соответствии с формулами (22) и (24) будет

$$w(q,t) = |(\psi(q,t)|^2 = e^{-2V_1}. \tag{27}$$

Поэтому в первом приближении возникает вероятностное уточнение возможного положения частицы. Волновая функция согласно формулам (22) и (24) получает дополнительный множитель e^{-V_1}.

Для установления аналога уравнения (26) в классической механике с учетом (27) записывают

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -e^{-2V_1}\frac{\partial V_1}{\partial t}, \qquad \frac{\partial w}{\partial q_\nu} = -2e^{-2V_1}\frac{\partial V_1}{\partial q_\nu}. \tag{28}$$

После умножения (26) на $-2e^{-2V_1}$ получается

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_\nu}\left(w\frac{\partial V_0}{\partial q_\nu}\right) = 0. \tag{29}$$

Поскольку по формуле (25) $\frac{\partial V_0}{\partial q_\nu} = p_\nu(q,\alpha,t) = \frac{1}{m}\dot{q}_\nu$, уравнения (28) приводятся к уравнению (29), соответствующему уравнению неразрывности гидродинамики.

Литература

1. Новоселов В. С. *Аналитическая механика систем с переменными массами.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1969).

2. Новоселов В. С. Траектория перехода точки переменной массы в центральном поле. *Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 19 (1965).

3. Новоселов В. С. *Вариационные методы в механике.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1966).

4. Новоселов В. С. *Голономные системы в лагранжевых координатах.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1967).

5. Новоселов В. С. *Варьирование динамических моделей движения.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1983).

6. Новоселов В. С. *Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1972).

7. Новоселов В. С., Королев В. С. *Аналитическая механика управляемой системы*, учеб. пособие. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2005).

8. Новоселов В. С. *Статистические модели механики*, учеб. пособие. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1999).

9. Новоселов В. С. *Статистическая динамика*, учеб. пособие. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2009).

10. Новоселов В. С., Кирпичников С. Н., Королев В. С., Поляхова Е. Н., Шмыров А. С. *Аналитические и качественные методы исследования вырожденных случаев возмущенных и управляемых гамильтоновых систем.* Отчет НИР 96-01-00609, Российский фонд фундаментальных исследований (1996).

11. Новоселов В. С. Интегральные инварианты и солитонные решения длинноволновых уравнений. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, вып. 3, 69–75 (2010).

12. Новоселов В. С. К имитационному моделированию нервного импульса. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, вып. 4, 73–83 (2011).

13. Новоселов В. С. К математической модели пейсмекера. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, вып. 4, 58–64 (2012).

14. Novoselov V. S., Korolev V. S. Stochastic model of the universe matter. *2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov) (CNSA)*, St. Petersburg, 1–4 (2017). https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7973974

Статья поступила в редакцию 28 мая 2020 г.;
после доработки 2 сентября 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

К о н т а к т н а я   и н ф о р м а ц и я:

Алферов Геннадий Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; alferovgv@gmail.com
Королев Владимир Степанович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vokorol@bk.ru
Поляхова Елена Николаевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; pol@astro.spbu.ru
Холшевников Константин Владиславович — д-р физ.-мат. наук, проф. (1939–2021)

Dynamics modeling and scientific development directions of mechanics and applied mathematics

G. V. Alferov, V. S. Korolev, E. N. Polyakhova, K. V. Kholshevnikov†

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Alferov G. V., Korolev V. S., Polyakhova E. N., Kholshevnikov K. V. Dynamics modeling and scientific development directions of mechanics and applied mathematics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 138–149. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.112 (In Russian)

The development of scientific areas of mechanics as a result of the research of the Honorary Professor of St. Petersburg State University, Honored Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics Viktor Sergeevich Novoselov, the founder of the scientific school on analytical mechanics, space dynamics and applied mathematics is considered. The main theorems of analytic dynamics were extended to mechanical systems of variable composition. Using a variational technique, a number of remarkable results were obtained on the dynamics of controlled systems. In particular, a general scheme for constructing analytical approximations was proposed and repeatedly applied to solve equations.

Keywords: analytical dynamics, celestial mechanics, control systems, robotics, biomechanics, quantum mechanics and statistical physics.

References

1. Novoselov V. S. *Analytical mechanics of systems with variable masses.* Leningrad, Leningrad University Press (1969). (In Russian)

2. Novoselov V. S. The trajectory of the transition point of variable mass in the central field. *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 19 (1965). (In Russian)

3. Novoselov V. S. *Variational methods in mechanics.* Leningrad, Leningrad University Press (1966). (In Russian)

4. Novoselov V. S. *Holonomic systems in Lagrangian coordinates.* Leningrad, Leningrad University Press (1967). (In Russian)

5. Novoselov V. S. *Variation of dynamic motion patterns.* Leningrad, Leningrad University Press (1983). (In Russian)

6. Novoselov V. S. *Analytical theory of optimization in gravitational fields.* Leningrad, Leningrad University Press (1972). (In Russian)

7. Novoselov V. S., Korolev V. S. *Analytical mechanics of a controlled system*, St. Petersburg, St. Petersburg University Press (2005). (In Russian)

8. Novoselov V. S. *Statistical models of mechanics*, St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1999). (In Russian)

9. Novoselov V. S. *Statistical dynamics*, St. Petersburg, St. Petersburg University Press (2009). (In Russian)

10. Novoselov V. S., Kirpichnikov S. N., Korolev V. S., Polyakhova E. N., Shmyrov A. S. *Analytical and qualitative methods for the study of degenerate cases of excited and controlled Hamiltonian systems*, Research Report 96-01-00609, Russian Foundation for Basic Research (1996). (In Russian)

11. Novoselov V. S. Integral invariants and soliton solutions of long-wave equations. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seria 10. Prikladnaa matematika. Informatika. Processy upravlenia*, iss. 3, 69–75 (2010). (In Russian)

12. Novoselov V. S. To simulation of nerve impulses. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seria 10. Prikladnaa matematika. Informatika. Processy upravlenia*, iss. 4, 73–83 (2011). (In Russian)

13. Novoselov V. S. To the mathematical model of pacemaker. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seria 10. Prikladnaa matematika. Informatika. Processy upravlenia*, iss. 4, 58–64 (2012). (In Russian)

14. Novoselov V. S., Korolev V. S. Stochastic model of the universe matter. *2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov) (CNSA)*, St. Petersburg, 1–4 (2017). https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7973974

Received: May 28, 2020
Revised: September 2, 2020
Accepted: September 17, 2020

Authors' information:

Gennadiy V. Alferov — alferovgv@gmail.com
Vladimir S. Korolev — vokorol@bk.ru
Elena N. Polyakhova — pol@astro.spbu.ru
Konstantin V. Kholshevnikov — (1939–2021)

ХРОНИКА

23 сентября 2020 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН выступили кандидат физ.-мат. наук, доцент Б. А. Смольников и ассистент А. С. Смирнов (СПбПУ Петра Великого) с докладом на тему «Нелинейные формы колебаний двойного маятника и управление его резонансными режимами».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассматриваются нелинейные колебания двойного математического маятника с идентичными параметрами звеньев и концевых грузов. На основе точного решения в линейной зоне строятся и анализируются приближенные решения в нелинейной зоне, которые иллюстрируют дрейф частот и форм двойного маятника. Помимо этого осуществляется синтез управляющих воздействий, которые позволили бы раскачивать двойной маятник по каждой из форм его колебаний с плавным переходом в нелинейную зону. Полученные результаты полезны при исследовании свободных и управляемых режимов движения всевозможных манипуляторов и разнообразных робототехнических конструкций. Эти решения также интересны и в качестве наглядных примеров нелинейной механики в педагогической и инженерной практике.