

Влияние параметров элементарной ячейки тетрахирального механического метаматериала на его эффективные свойства*

Л. Р. Ахметшин, И. Ю. Смолин

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Российская Федерация, 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Институт физики прочности и материаловедения СО РАН,
Российская Федерация, 634055, Томск, пр. Академический, 2/4

Для цитирования: *Ахметшин Л. Р., Смолин И. Ю.* Влияние параметров элементарной ячейки тетрахирального механического метаматериала на его эффективные свойства // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 1. С. 150–157. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.113>

В статье с использованием численного моделирования мы изучаем поведение трехмерного хирального механического метаматериала. Особенностью хиральных структур является то, что при их одноосном нагружении наблюдается закручивание вдоль оси нагружения. Стержень механического метаматериала состоит из $3 \times 3 \times 9$ элементарных ячеек по трем ортогональным осям. Относительная деформация одноосного сжатия образца при моделировании не превышала 3.3%. Моделирование проводилось методом конечных элементов в трехмерном случае. В этом контексте представлены оригинальные результаты о зависимости угла поворота и реакции жестко закрепленной опоры образца метаматериала от параметров, характеризующих структуру элементарной ячейки метаматериала. Все зависимости, кроме одной, являются нелинейными с частями больших и малых изменений.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных элементов, метаматериал, соотношение структура — свойства, хиральная структура, одноосная деформация, поворот.

1. Введение. Механические метаматериалы представляют собой специальным образом структурированные среды, обладающие необычными эффективными свойствами, например, нулевым или отрицательными значениями коэффициента Пуассона или теплового расширения. Применение механических метаматериалов с необычными механическими свойствами является многообещающим для авиакосмической и автомобильной техники, а также для биомедицинских приложений. Особую актуальность разработке механических метаматериалов придают успехи в развитии современных аддитивных технологий. Технология 3D-печати позволяет создавать материалы, свойства которых ранее были недоступны, к примеру, преобразование продольной упругой волны в поперечную [1].

В последние годы набирают популярность метаматериалы, обладающие отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетики) [2]. Они интересны тем, что демонстрируют необычное поведение: они расширяются в поперечном направлении при растяжении и сжимаются при сжатии. Эти особенности делают их оптимальными

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН (тема номер FWRW-2019-0035).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

кандидатами для применения в гибких конструкциях, таких как трансформирующиеся конструкции самолетов [3–6] и в качестве аналогов спиц в непневматических шинах [7, 8].

Существует много различных типов ауксетических материалов с отрицательным значением коэффициента Пуассона [9, 10]. Одним из таких типов является метаматериал, элементарная ячейка которого состоит из хиральных элементов. Простой хиральный элемент имеет центральное кольцо и ребра, выходящие из него [11]. Количество ребер будет определять название хиральной структуры.

Другой интересной особенностью хиральных механических метаматериалов является эластичный аналог оптической активности в трехмерных хиральных структурах [12, 13], преобразующий одну поперечную линейно-поляризованную упругую волну в другую, ортогональную первой. В статическом случае такая «механическая активность» связана с появлением дополнительной степени свободы. Известно, что обычное упругое твердое тело не может вращаться при его растяжении или сжатии. Это демонстрирует как эксперимент, так и теоретическое описание упругого деформирования в рамках обычной континуальной механики Коши.

Настоящая работа является продолжением исследований авторов статьи [14], где рассмотрен вопрос о влиянии количества элементарных ячеек в стержне хирального механического метаматериала на значение угла поворота образца метаматериала, но вопрос о влиянии параметров элементарной ячейки на значение угла поворота при постоянном количестве элементарных ячеек остается неизученным. В данной работе рассматривается именно такая задача для той же тетрахиральной структуры, но для других параметров материала элементарной ячейки.

Целью данной работы является исследование влияния параметров элементарной ячейки на поведение тетрахирального механического метаматериала при одноосном нагружении.

2. Описание структуры метаматериала. В качестве основания для метаматериала необходимо выбрать элементарную ячейку, которая при многократном повторении создаст аналог макротела. В данной работе элементарная ячейка выбрана в форме квадрата для двухмерного случая и в форме куба для трехмерного случая. Рассмотрим метаматериал с тетрахиральной (четырёхкратная связь) структурой, в основании которой лежит двухмерный хиральный элемент, представленный на рис. 1. Он состоит из кольца и четырех стержней (ребер), $l/2$ — длина ребра, t — ширина ребра, h — толщина ребра, $r = \frac{r_2+r_1}{2}$ — средний радиус кольца, r_2 — внешний радиус кольцевого элемента, r_1 — внутренний радиус кольцевого элемента, θ — угол наклона ребра. Толщина ребра элементарной ячейки не показана на рис. 1 ввиду двухмерного представления. Угол θ строится от воображаемой линии, проведенной из центра вершины ребра к центру кольца.

Данная структура выбрана за счет своих конструкторских особенностей, заключающихся в том, что при приложении одноосной нагрузки (сжатие/растяжение) появляется дополнительная степень свободы, а именно вращение кольца [15]. За счет вращения кольца будет изменяться расстояние между другими элементами одной плоскости. Следовательно, система демонстрирует не только дополнительную вращательную степень свободы, но и ауксетическое поведение [16].

Для создания трехмерного метаматериала необходимо соединить двумерные структуры таким образом, чтобы они составляли грани куба, а вершина куба была пересечением трех ребер хиральных элементов. Получится элементарная ячейка ме-

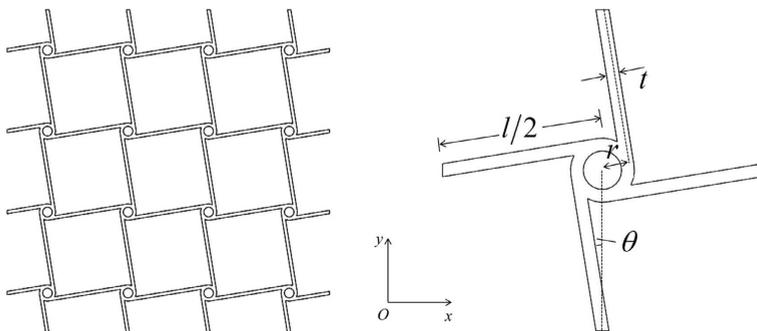


Рис. 1. Геометрия тетрагиральной структуры метаматериала [15]: слева — совокупность ячеек, справа — элементарная ячейка.

таматериала (рис. 2 справа). Данная операция заменит кубическую ячейку сплошного материала, и полученная конфигурация будет иметь четырехкратную симметрию вращения при вращении вокруг трех главных осей куба. Располагая элементарные ячейки вблизи друг друга, получим образец метаматериала (рис. 2 слева).

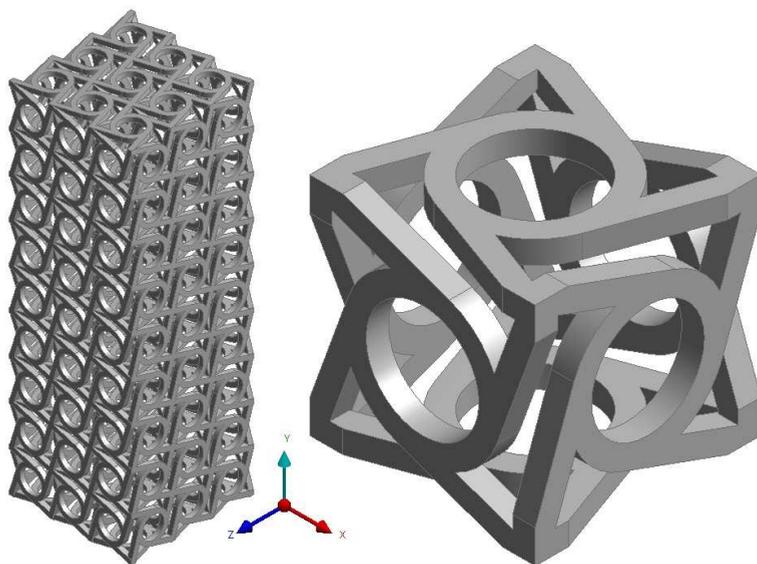


Рис. 2. Трехмерная визуализация: слева — метаматериала, справа — элементарной ячейки метаматериала.

Основным размером элементарной ячейки, который принимается постоянным, является длина ячейки l , не меняется также внешний радиус кольца r_2 . Переменными являются оставшиеся параметры, а именно: t , h , r_1 , θ . Здесь исследуется образец метаматериала, состоящий из набора рассмотренных элементарных ячеек. Количество элементарных ячеек в данной работе считается постоянным и равным $n = 81$. Образец состоит из трех ячеек по осям x и z и девяти ячеек вдоль оси y (рис. 2).

В качестве базовых параметров взяты значения, представленные в таблице.

Исходные параметры структуры метаматериала						
l (мм)	t (мм)	h (мм)	r_1 (мм)	r_2 (мм)	θ (°)	n
50	5	5	12.5	17.5	25	81

3. Математическая постановка, особенности численного моделирования. Математическая постановка задачи деформирования метаматериала принята в рамках линейной теории упругости. Ограничиваемся случаем перемещений, не приводящих к контактному взаимодействию составляющих элементарной ячейки. Упругие постоянные материала, из которого построен образец механического метаматериала, принимали следующие значения: $E = 200$ ГПа — модуль Юнга; $\mu = 0.3$ — коэффициент Пуассона.

Численное моделирование проводилось методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Элементарную ячейку рассматриваем как систему стержней (балок), но при расчете методом конечных элементов представляем как совокупность трехмерных твердотельных элементов. Для анализа поведения образца метаматериала в условиях одноосного нагружения вдоль наибольшей длины образца граничные условия прикладывались следующим образом:

$U_x^{fix} = U_y^{fix} = U_z^{fix} = 0$ — жесткая заделка на одной из поверхностей (границ) образца метаматериала,

$U_y^{dis} = \text{const} = 15$ мм — перемещение на противоположной поверхности (границ) образца метаматериала соответственно. Перемещение может быть задано со знаком плюс или минус, что приводит к растяжению или сжатию, соответственно. Для заданных значений параметров структуры метаматериала перемещение на 15 мм соответствует одноосному деформированию образца метаматериала на 3%.

В качестве основного отклика для исследования особенностей деформирования изучаемого метаматериала были рассмотрены: 1) α — угол поворота перемещаемой грани образца метаматериала и 2) F — силовая реакция опоры (закрепленной грани образца метаматериала). Угол поворота α оценивался по изменению координат крайних узлов перемещаемой грани образца. Силовая реакция F определялась как отклик на одноосное нагружение в закрепленной грани.

Суть исследования заключалась в определении зависимостей значений α и F при изменении параметров элементарной ячейки t , h , r_1 , θ . Все параметры подбирались таким образом, чтобы они являлись независимыми.

4. Результаты и обсуждение. Результат влияния переменных параметров длины на значение угла поворота трехмерного метаматериала представлен на рис. 3 слева, на значение переменного углового параметра θ — справа. При растяжении и сжатии значения угла поворота и реакции опоры оказываются одинаковыми по абсолютному значению, но разными по знаку.

Значения r_1 изменялись от 12.5 до 0 мм с равным шагом -2.5 мм. При уменьшении внутреннего радиуса кольца метаматериала угол поворота уменьшается, это закономерно, так как удельный объем метаматериала увеличивается, заполняя больше пространства сплошным телом. Из рис. 3 можно увидеть, что зависимость $\alpha(r_1)$ имеет почти линейный характер на участке $r_1 = 12.5..4.5$ мм, дальнейшее уменьшение радиуса не влечет изменений α .

При изменении толщины ячейки h от 5 до 1 мм с равным шагом -1 мм отмеченная ранее тенденция «уменьшая удельный объем, уменьшаем угол поворота» не сохраняется. Уменьшение параметра h приводит к незначительному увеличению уг-

ла поворота (рис. 3). Разница между конечным и исходным значениями составляет 0.22° . Это незначительное изменение (порядка 3%), поэтому можно сделать вывод, что h не оказывает существенного влияния на угол поворота метаматериала. Аналогично зависимости от параметра r_1 угол α перестает изменяться при достижении значения $h = 2$ мм.

Поведение метаматериала при уменьшении ширины ребра t отличается от поведения при уменьшении h . Значения t изменялись от 5 до 1 мм, с шагом -1 мм (рис. 3). В данном случае разница между конечным и исходным значениями угла поворота метаматериала является наибольшей среди представленных параметров — 2.83° или 36%.

Угол θ изначально равнялся 25° , данное значение выбрано из геометрической связи между радиусами кольцевого элемента и длиной ребра при равенстве толщин кольца и ребра, а также при условии, что ребро подходит к кольцу по касательной. Значение θ увеличивалось до 40° и зависимость $\alpha(\theta)$ на рис. 3 справа говорит о том, что увеличение угла наклона ребра, выходящего из вершины ячейки метаматериала, ведет к уменьшению угла поворота метаматериала при приложенной нагрузке. При дальнейшем увеличении угла данная тенденция сохранится вплоть до 45° , когда метаматериал перестанет поворачиваться. Увеличивая угол более 45° , метаматериал продолжит поворот, но в другую сторону.

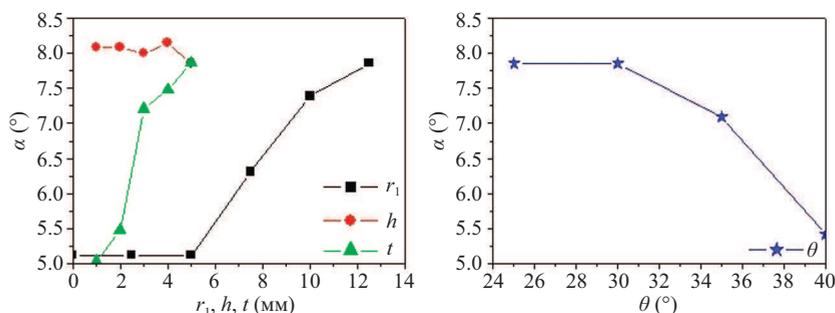


Рис. 3. Зависимость угла поворота метаматериала от переменных параметров.

При изменении параметров метаматериала были также получены графики зависимостей реакции опоры жесткой заделки от переменных параметров. Рассмотрим влияние параметра r_1 (внутренний радиус ячейки) на вышеуказанную величину. При уменьшении внутреннего радиуса происходит увеличение удельного объема (площади поверхности) ячейки метаматериала. Следовательно, необходимо затратить больше усилий для деформирования объемного метаматериала (рис. 4 слева). В исходном образце метаматериала значение реакции опоры было 4.87 МН, при $r_1 = 0$ стало $F = 7.1$ МН.

В случае с переменными параметрами t (ширина ребра) и h (толщина ребра) с уменьшением этих параметров происходит уменьшение удельной массы метаматериала, а значит и необходимое усилие для аналогичной деформации будет уменьшаться (рис. 4 слева). Как видно из рис. 4, зависимость $F(h)$ имеет линейный характер, а зависимость $F(t)$ — почти линейный.

Зависимость на рис. 4 справа говорит об увеличении усилий при сжатии образца метаматериала с большим углом наклона ребра. Видно, что по сравнению с изменением параметров длин параметр θ меньше влияет на прикладываемые усилия.

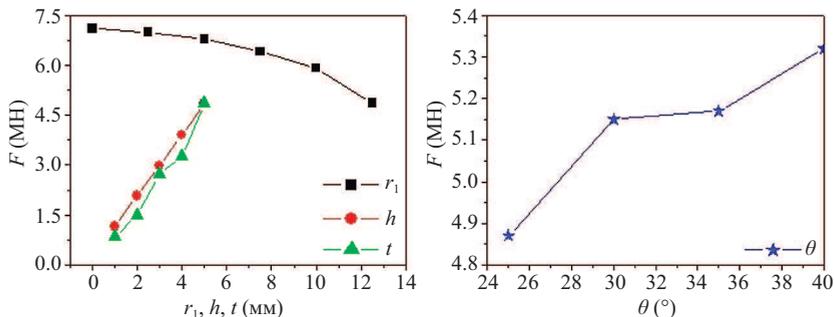


Рис. 4. Влияние переменных параметров на реакцию опоры.

5. Заключение. Проведено численное моделирование одноосного деформирования трехмерного образца тетрахирального метаматериала. Получены зависимости изменения угла поворота и реакции жестко закрепленной опоры метаматериала от параметров, характеризующих структуру элементарной ячейки метаматериала. Все зависимости, кроме одной, являются нелинейными с участками сильного и слабого изменений.

Выявлены диапазоны значений параметров, обеспечивающих наибольший рост угла поворота. Наибольшее влияние на изменение угла поворота метаматериала оказывает изменение ширины ребра хирального элемента. Толщина ребра (и всей элементарной ячейки метаматериала) практически не влияет на изменение угла поворота.

При уменьшении значения внутреннего радиуса кольцевого элемента r_1 необходимо затрачивать большие усилия для деформирования метаматериала. Вероятно, это связано с тем, что при уменьшении внутреннего радиуса увеличивается удельный объем образца метаматериала. В остальных случаях изменений переменных параметров для силовой реакции опоры наблюдалась обратная зависимость.

Моделирование проводилось при изменении параметров элементарной ячейки. Все параметры подбирались таким образом, чтобы они являлись независимыми, например, при изменении ширины стержня толщина и другие параметры оставались исходными. Таким же образом варьировались и другие параметры. Однако надо иметь в виду, что переменные параметры можно выбирать и с учетом влияния на остальные характеристики элементарной ячейки. Например, в общем случае при изменении ширины ребра радиус кольца можно считать соразмерным, а не независимым. Также если принять в качестве необходимого условия соединение ребра с кольцом по касательной, то существует геометрическая связь между средним радиусом кольцевого элемента, длиной ребра и углом наклона ребра. Следует ожидать, что в этом случае влияние параметров на угол поворота может быть отличным от полученного в нашем исследовании.

Данная работа выполнена в развитие и расширение тематики, связанной с разработкой метаматериалов и перспективой их применения в инженерных приложениях. Механическим метаматериалам посвящено достаточно много публикаций в последнее время. Однако эти статьи, в основном, ограничиваются предложением новых структур элементарных ячеек, обеспечивающих некое необычное свойство, и в лучшем случае, сравнением с уже существующими аналогами. Подробному изучению влияния конструктивных и размерных параметров элементарных ячеек на

величину этого необычного отклика уделено гораздо меньше работ. Это является элементом инженерного или конструкторского анализа на пути практического применения метаматериалов и представляется перспективным. Наша работа содержит именно такой анализ. Он необходим, если речь идет не только о качественном анализе необычных свойств метаматериалов, но и об их инженерном применении, нахождении рациональных или оптимальных значений параметров, характеризующих структуру метаматериала. Другим важным моментом, которому, на наш взгляд, мало внимания уделяется в современной литературе о механических метаматериалах, является вопрос об их прочности или долговечности их функционирования. Если речь идет о практическом использовании изделий из метаматериалов, такой вопрос, безусловно, рано или поздно возникнет. Именно в этом направлении, в прочностном анализе напряженно-деформированного состояния образцов из метаматериала, авторы видят перспективу своих дальнейших исследований.

Литература/References

1. Kweun J. M., Lee H. J., Oh J. H., Seung H. M., Kim Y. Y. Transmodal Fabry-Pérot resonance: Theory and realization with elastic metamaterials. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 205901-1–205901-6 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.205901>
2. Evans K. E., Nkansah M. A., Hutchinson I. J., Rogers S. C. Molecular network design. *Nature* **353** (6340), 124–125 (1991). <https://doi.org/10.1038/353124a0>
3. Lesieutre G., Browne J. A., Frecker M. Scaling of performance, weight, and actuation of a 2-D compliant cellular frame structure for a morphing wing. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **22** (10), 979–986 (2011). <https://doi.org/10.1177/1045389X11412641>
4. Olympio K. R., Gandhi F. Flexible Skins for Morphing Aircraft Using Cellular Honeycomb Cores. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **21** (17), 1719–1735 (2010). <https://doi.org/10.1177/1045389X09350331>
5. Bubert E. A., Woods B. K., Lee K., Kothera C. S., Wereley N. M. Design and fabrication of a passive 1D morphing aircraft skin. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **21** (17), 1699–1717 (2010). <https://doi.org/10.1177/1045389X10378777>
6. Heo H., Ju J., Kim D.-M., Jeon C.-S. Passive Morphing Airfoil with Honeycombs. *Proceedings of the ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Volume 1: Advances in Aerospace Technology; Energy Water Nexus; Globalization of Engineering; Posters*. Denver, Colorado, USA, 263–271 (2011). <https://doi.org/10.1115/IMECE2011-64350>
7. Ju J., Ananthasayanam J., Summers J. D., Joseph P. Design of cellular shear bands of a nonpneumatic tire-Investigation of contact pressure. *SAE International Journal of Passenger Cars — Mechanical Systems* **3** (1), 598–606 (2010). <https://doi.org/10.4271/2010-01-0768>
8. Ju J., Kim D.-M., Kim K. Flexible cellular solid spokes of a non-pneumatic tire. *Composite Structures* **94** (8), 2285–2295 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.12.022>
9. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Volkov M. A. Negative Poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes. *Phys. Mesomech.* **17** (2), 97–115 (2014). <https://doi.org/10.1134/S102995991402002>
10. Goldstein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S., Volkov M. A. Thin Homogeneous TwoLayered Plates of Cubic Crystals with Different Layer Orientation. *Phys. Mesomech.* **22** (4), 261–268 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1029959919040015>
11. Prall D., Lakes R. S. Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of -1 . *Int. J. Mech. Sci.* **39** (3), 305–314 (1997).
12. Pendry J. B. A Chiral Route to Negative Refraction. *Science* **306** (5700), 1353–1355 (2004). <https://doi.org/10.1126/science.1104467>
13. Gansel J. K., Thiel M., Rill M. S., Decker M., Bade K., Saile V., Freymann G. Gold helix photonic metamaterial as broadband circular polarizer. *Science* **325** (5947), 1513–1515 (2009). <https://doi.org/10.1126/science.1177031>
14. Frenzel T., Kadic M., Wegener M. Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist. *Science* **358** (6366), 1072–1074 (2017). <https://doi.org/10.1126/science.aao4640>

15. Fu M.-H., Zheng B.B., Li W.-H. A novel chiral three-dimensional material with negative Poisson's ratio and the equivalent elastic parameters. *Composite Structures* **176**, 442–448 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.05.027>

16. Alderson A., Alderson K. L., Attard D., Evans K. E., Gatt R., Grima N., Miller W., Ravirala N., Smith C. W., Zied K. Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Composites Science and Technology* **70** (7), 1042–1048 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.07.009>

Статья поступила в редакцию 23 апреля 2020 г.;
после доработки 16 сентября 2020 г.;
рекомендована в печать 17 сентября 2020 г.

Контактная информация:

Ахметшин Линар Рихатович — мл. науч. сотр., аспирант; akhmetshin.lr@gmail.com
Смолин Игорь Юрьевич — д-р физ.-мат. наук, доц.; smolin@ispms.ru

Influence of unit cell parameters of tetrachiral mechanical metamaterial on its effective properties*

L. R. Akhmetshin, I. Yu. Smolin

National Research Tomsk State University, 36, pr. Lenina, Tomsk, 634050, Russian Federation
Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS,
2/4, pr. Akademicheskii, Tomsk, 634055, Russian Federation

For citation: Akhmetshin L. R., Smolin I. Yu. Influence of unit cell parameters of tetrachiral mechanical metamaterial on its effective properties. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 1, pp. 150–157. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.113> (In Russian)

In the paper, we study the mechanical behavior of a three-dimensional chiral mechanical metamaterial using numerical modeling. A feature of chiral structures is that during their uniaxial loading a twisting is observed along the loading axis. A rod of the mechanical metamaterial composed of $3 \times 3 \times 9$ unit cells along the corresponding three orthogonal axes. The relative strain of uniaxial compression of the sample in the simulation did not exceed 3.3%. The simulation was performed by the finite element method in a three-dimensional case. Original results on the dependencies of the rotation angle and the reaction of the rigidly fixed support of the metamaterial sample on the parameters characterizing the structure of the unit cell of the metamaterial are presented in this context. All the dependencies, except one, are nonlinear with portions of large and small changes.

Keywords: numerical modeling, finite-element method, metamaterial, structure—property relation, chiral structure, uniaxial deformation, rotation.

Received: April 23, 2020
Revised: September 16, 2020
Accepted: September 17, 2020

Authors' information:

Linar R. Akhmetshin — akhmetshin.lr@gmail.com
Igor Yu. Smolin — smolin@ispms.ru

*This work was made within the framework of State Assignment of the Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS (topic no. FWRW-2019-0035).