

А. А. Воротов

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА И МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО ПОЛЯ ПЕРЕХОДОВ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

В работе изучается возможность обобщения формул для функции Грина, применяемой для описания конечномерных распределений времени пребывания. Ранее известные результаты, когда для случайного блуждания по дереву функция Грина выражается через решения соответствующего однородного уравнения, естественно попытаться перенести на случай более сложных графов. Оказывается, что такие обобщения получаются далеко не всегда. Так, например, для блуждания по графу, представляющему из себя бесконечную «лестницу», возможность подобных обобщений зависит от переходных плотностей. Для некоторых графов привести аналогичные дереву формулы и вовсе невозможно, поскольку однородные решения не «склеиваются». В работе также рассматривается поле переходов $\varphi(v, w)$ для марковской цепи с непрерывным временем, заданное на ребрах графа переходов и понимаемое как время, проводимое процессом в состоянии w после прохождения ребра vw . Оказывается, что хотя формул для конечномерных распределений поля φ получить и не удастся, марковость в некоторых случаях проверить можно. Доказывается, что даже для случайного блуждания по целым числам марковским поле φ не будет. Библиогр. 10 назв. Ил. 4.

Ключевые слова: марковское свойство, поле переходов, функция Грина.

1. Введение. Одним из предметов рассмотрения в данной работе будет выступать поле времени пребывания τ однородной марковской цепи. В случае непрерывного (дискретного) времени оно представляет собой время, проводимое процессом в каждом состоянии до некоторого случайного экспоненциального (геометрического) момента времени. В [2, 3] приводятся формулы, выражающие конечномерные распределения τ через функцию Грина некоторого уравнения. Кроме того, оказывается, что для случайного блуждания по дереву функция Грина может быть выражена через решения соответствующего однородного уравнения. Именно эти формулы лежат в основе доказательства марковости поля τ для таких блужданий с непрерывным временем (см. [3–5]). Представляется интересным, возможно ли получить подобные формулы для произвольных графов. К сожалению (см. п. 3), надеяться на это можно далеко не всегда. Более того, даже в тех случаях, когда такие формулы получить удастся, они, как правило, оказываются громоздкими и неудобными для применения.

Также можно рассмотреть поле переходов φ . Для цепей с дискретным временем оно представляет собой количество переходов из одного состояния в другое (до геометрически распределенного момента времени) и уже рассматривалось ранее, например, в [6]. Однако нас в первую очередь интересует вопрос о марковском свойстве φ , поэтому имеет смысл перенести это определение на случай непрерывного времени (см. п. 4). Аналогично рассуждениям для поля τ будет показано, что за исключением наиболее простых случаев марковости поля φ ожидать не приходится.

2. Основные определения и факты. Приведем основные определения и кратко изложим факты, которые будут активно использоваться далее. За подробностями можно обратиться к работам [2, 3] или, в более сокращенном изложении, к [8].

Пусть $X(t)$ — однородная марковская цепь с не более чем счетным пространством состояний $\mathbb{A}$. Будем рассматривать как случай дискретного, так и случай непрерывно-

го времени. Для непрерывного времени процесс $X(t)$ предполагаем сепарабельным, стохастически непрерывным и регулярным (т.е. на каждом конечном промежутке процесс (п.н.) совершает конечное число переходов).

Переходные вероятности при дискретном времени обозначим $P(a, b)$, переходные плотности при непрерывном обозначим $Q(a, b)$.

Процесс $X(t)$ можно рассматривать как случайное блуждание на графе Γ с множеством вершин $\mathbb{A}$ и множеством ребер $\{(a, b) | P(a, b) \neq 0\}$ ($\{(a, b) | Q(a, b) \neq 0\}$). Соответствующие переходные вероятности (переходные плотности) будем называть значениями ребер Γ .

Пусть θ — не зависящая от цепи экспоненциальная с параметром α случайная величина (при дискретном времени θ рассматриваем соответствующее геометрическое распределение).

Время $\tau(v)$ пребывания процесса в состоянии $v \in \mathbb{A}$ до момента θ определяется для дискретного и непрерывного времени соответственно формулами

$$\tau(v) = \sum_{t=0}^{\theta} \mathbf{1}_{\{v\}}(X(t)); \quad \tau(v) = \int_0^{\theta} \mathbf{1}_{\{v\}}(X(t)) dt.$$

Пусть P_a — вероятностная мера для процессов, начинающихся из точки a , P_{ab} — соответствующая мера при условии $X(\theta) = b$.

Рассмотрим неотрицательную функцию k на $\mathbb{A}$. Предполагаем $k < 1$ для дискретного времени.

Функция Грина определяется как единственное ограниченное решение уравнения

$$\begin{aligned} (e^{\alpha} - (1 - k)P)G(\cdot, b) &= (1 - k)\mathbf{1}_{\{b\}} \text{ (для дискретного времени);} \\ (\alpha + k - Q)G(\cdot, b) &= \mathbf{1}_{\{b\}}(\cdot) \text{ (для непрерывного времени)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

(операторы действуют на переменную a , b — параметр).

Приведем одну важную формулу для функции Грина:

$$\begin{aligned} E_a \left[\prod_{s=0}^{\theta} [1 - k(X(s))], X(\theta) = b \right] &= (1 - e^{-\alpha}) e^{\alpha} G(a, b) \text{ (для дискретного времени);} \\ E_a \left[e^{-\int_0^{\theta} k(X(s)) ds}, X(\theta) = b \right] &= \alpha G(a, b) \text{ (для непрерывного времени).} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функция Грина является удобным инструментом, позволяющим описывать конечномерные распределения поля времени пребывания τ . Но от конечномерных распределений τ нам далее понадобится только одна формула:

$$E_{ab} \left[e^{-\int_0^{\theta} k(X(s)) ds}, \tau(v) = 0 \right] = \frac{G(a, b)}{G_0(a, b)} - \frac{G(a, v)G(v, b)}{G_0(a, b)G(v, v)}. \quad (2.3)$$

Здесь через G_0 обозначена функция Грина с $k \equiv 0$.

В некоторых случаях функцию Грина можно выражать через решения однородного уравнения

$$(e^{\alpha} - (1 - k)P)g = 0 \quad (2.4)$$

для дискретного времени и

$$(\alpha + k - Q)g = 0 \quad (2.5)$$

для непрерывного.

Рассмотрим, например, целочисленную цепь: $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ и $P(a, b) = 0$ при $|a - b| \geq 2$, $P(a, b) > 0$ при $|a - b| \leq 1$. Для определенности время предполагаем дискретным.

У уравнения (2.4) существуют два линейно независимых решения g_1 и g_2 со свойствами $g_1 > 0$, $g_1(0) = 1$, g_1 возрастает; $g_2 > 0$, $g_2(0) = 1$, g_2 убывает.

Действительно, рассмотрим величину $g_{ab} = E_a \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_b} \prod_{s=0}^{\mathcal{M}_b-1} [1 - k(X(s))] \right]$, где $\mathcal{M}_b$ — момент первого достижения точки b . Тогда решение g_1 определяется формулой

$$g_1(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{g_{ab}}{g_{ob}}. \quad (2.6)$$

Решение g_2 получается аналогично при $b \rightarrow -\infty$.

Легко проверить, что уравнение (2.4) не имеет нетривиальных ограниченных решений, поэтому g_1 не ограничено на $+\infty$, а g_2 — на $-\infty$. Поскольку решение однородного уравнения однозначно определяется значениями в двух точках (например, в 0 и 1), оно является линейной комбинацией g_1 и g_2 .

Далее, функцию Грина $G(a, b)$ можно «склеить» из двух однородных решений:

$$G(a, b) = \begin{cases} C_b g_1(a) g_2(b), & \text{если } a \leq b, \\ C_b g_2(a) g_1(b), & \text{если } a \geq b, \end{cases} \quad (2.7)$$

где C_b — некоторая константа, не зависящая от a .

Поскольку «склейка» идет по точке b , функция $(e^\alpha - (1 - k)P)G(\cdot, b)$ принимает нулевые значения везде, кроме точки b . Требование, что в b она имеет нужное значение $(1 - k(b))$, достигается за счет подбора константы C_b , которую нетрудно вычислить явно. Кроме того, поскольку в силу монотонности функция $g_1(a)$ ограничена при $a \leq b$, а g_2 ограничена при $a \geq b$, полученная таким образом функция $G(a, b)$ ограничена, а потому действительно является функцией Грина.

Для непрерывного времени поменяется лишь формула для g_{ab} , которая примет следующий вид: $g_{ab} = E_a \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_b} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_b} k(X(s)) ds} \right]$.

Аналогичные формулы можно получить и в более общем случае, когда граф Γ является деревом. С помощью подобных выражений для функции Грина в [3–5] доказывается марковость времени пребывания для цепей с непрерывным временем. Вопросу о том, можно ли обобщить эти формулы на более сложные графы посвящен следующий раздел.

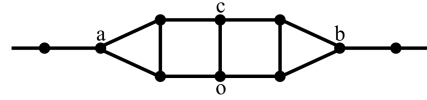
3. Формулы для функции Грина через решения однородного уравнения. При рассмотрении произвольных графов возникает ряд трудностей. Первая из них заключается в том, что становится непонятно, как понимать монотонность решений и можно ли вообще о ней говорить. Тем не менее это не играет существенной роли, ведь при «склейке» функции Грина из решений g_1 и g_2 важно лишь, чтобы результат получился ограниченным, т. е. чтобы «до» места склейки была ограничена функция g_1 , а «после» — g_2 . Монотонность функций g_1 , g_2 не использовалась и при

проверке марковского свойства. В результате такой подход к описанию функции Грина просто не будет позволять говорить что-либо о ее монотонности в силу отсутствия самого этого понятия.

Следующая трудность куда более существенна. Дело в том, что для целочисленных цепей «склеивать» монотонные решения надо было по одной вершине. Соответственно, имея две степени свободы, одну мы использовали для «склейки» g_1 и g_2 , а другую — для нормировки полученной функции в месте «склейки». Если же «склеивать» приходится по нескольким вершинам, степеней свободы может не хватить, что иллюстрирует следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим блуждание по графу, изображенному на рис. 1. Для определенности будем считать, что время непрерывно. Как и для блуждания по целым числам, решение однородного уравнения в данном случае определяется значениями в двух точках.

Рис. 1. Граф, для которого не удастся «склеить» монотонные решения.



Действительно, если заданы значения решения в вершинах a и b , то они определяют и значения «между» ними (поскольку для модуля решения справедлив принцип максимума), а значит, и значения на всем графе.

Поэтому g_1 и g_2 , определяемые теми же формулами, что и раньше, являются единственными решениями однородного уравнения.

Чтобы получить формулу для функции Грина $G(\cdot, c)$, g_1 и g_2 необходимо «склеить» по вершинам o и c . Поскольку при изначальной нормировке $g_1(o) = g_2(o) = 1$, остается равенство $g_1(c) = g_2(c)$.

Используя строго марковское свойство и определение функции Грина, имеем

$$g_1(c) = \frac{g_{cb}}{g_{ob}} = \frac{G(c, b)}{G(o, b)}.$$

Записывая аналогичное равенство для $g_2(c)$, получаем, что для «склейки» необходимо

$$G(c, b)G(o, a) = G(c, a)G(o, b). \quad (3.1)$$

Предположим, что равенство (3.1) выполнено. Добавим к графу ребро bc со значением t и, соответственно, вычтем t из значения на петле bb . Согласно теореме 1 из [8] и равенству (3.1), для функции Грина G_t полученного графа имеет место равенство

$$\begin{aligned} G_t(o, a) &= \frac{\begin{vmatrix} G(o, a) & G(o, b) & G(o, b) \\ G(c, a) - \frac{1}{t} + G(c, b) & G(c, b) & G(c, b) \\ G(b, a) & G(b, b) & -\frac{1}{t} + G(b, b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{t} + G(c, b) & G(c, b) \\ G(b, b) & -\frac{1}{t} + G(b, b) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} G(o, a) & G(o, b) \\ G(c, a) + G(b, a) - \frac{1}{t} + G(c, b) + G(b, b) \end{vmatrix}}{-\frac{1}{t} + G(c, b) + G(b, b)} = \\ &= \frac{-\frac{G(o, a)}{tG(b, b)} + (G(o, a) - \frac{G(o, b)G(b, a)}{G(b, b)})}{-\frac{1}{tG(b, b)} + 1 + \frac{G(c, b)}{G(b, b)}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обозначим через G_t^0 функцию Грина G_t с $k \equiv 0$, а мерам, соответствующим измененному графу, будем приписывать сверху параметр t .

Используя формулы (2.2) и (2.3), получаем, что при больших t выполнено

$$\begin{aligned} E_o^t \left[e^{-\int_0^{\theta} k(X(s))ds}, X(\theta) = a \right] &= \alpha G_t(o, a) < E_o \left[e^{-\int_0^{\theta} k(X(s))ds}, \tau(b) = 0, X(\theta) = a \right] = \\ &= E_o^t \left[e^{-\int_0^{\theta} k(X(s))ds}, \tau(b) = 0, X(\theta) = a \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

и мы приходим к противоречию.

Разумеется, получать $G(\cdot, c)$ с помощью g_1 и g_2 можно и по-другому. Например, «до» a взять $C_1 g_1$, «после» b взять $C_2 g_2$, а значения в остальных вершинах подобрать так, чтобы выполнялись необходимые уравнения. Однако подобные формулы будут крайне громоздки и неудобны для каких-либо применений.

Не вполне ясно также, как обобщать формулу (2.6) на случай произвольного графа. Проблема в том, что непонятно как именно устремлять b к бесконечности, почему вообще существует предел и даже является ли полученная функция решением однородного уравнения.

Существование предела в общем случае действительно ниоткуда не следует, поэтому, вообще говоря, необходимо рассматривать частичные пределы. То, что хотя бы один такой частичный предел существует, легко показать применением канторовского диагонального процесса.

Для того чтобы предельная функция гарантированно являлась решением однородного уравнения, потребуем, чтобы степени всех вершин графа были конечны.

Что касается различных способов стремления b к бесконечности, то, как показывает следующий пример, они могут как привести к нужному результату, так и не дать необходимого количества различных монотонных решений.

Пример 2. Рассмотрим теперь самое естественное нетривиальное обобщение целочисленной цепи, а именно случайное блуждание по графу, который будем называть «лестницей» (см. рис. 2). Вершины, на рисунке расположенные сверху (например, s и b_1), будем называть верхней частью «лестницы», а расположенные снизу (например, o и b_2) — нижней.

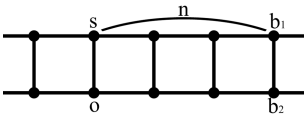


Рис. 2. Граф «лестница».

Решения g_1 однородного уравнения, ограниченные слева от вершины o , можно получить с помощью формулы (2.6) несколькими способами: взяв $b = b_1$ (см. рис. 2), т. е. устремляя b к бесконечности по верхней части «лестницы», взяв $b = b_2$ или взяв $b = \{b_1, b_2\}$. Полученные решения обозначим g_1^1 , g_1^2 и g_1^{12} соответственно.

Как уже говорилось, существование предела в (2.6) в данном случае ниоткуда не следует, а потому каждый из способов может давать еще и различные варианты получения g_1 в качестве частичных пределов.

Для дискретного времени имеет место оценка

$$\begin{aligned} g_{ob} &\geq E_o \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_b} \prod_{s=0}^{\mathcal{M}_b-1} [1 - k(X(s))], \mathcal{M}_a < \mathcal{M}_b \right] = \\ &= E_o \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_a} \prod_{s=0}^{\mathcal{M}_a-1} [1 - k(X(s))], \mathcal{M}_a < \mathcal{M}_b \right] E_a \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_b} \prod_{s=0}^{\mathcal{M}_b-1} [1 - k(X(s))] \right] = \\ &= E_o \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_a} \prod_{s=0}^{\mathcal{M}_a-1} [1 - k(X(s))], \mathcal{M}_a < \mathcal{M}_b \right] g_{ab}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

для непрерывного времени оценка абсолютно аналогична. Отсюда получаем, что рассматриваемые (частичные) пределы всюду конечны. Точно также доказывается их положительность.

Аналогичными способами можно получить и решения g_2 , ограниченные справа от o . Их будем обозначать g_2^1 , g_2^2 и g_2^{12} .

Тем не менее, следует заметить, что существует всего четыре линейно независимых решения однородного уравнения, поскольку решение определяется своими значениями в четырех точках.

Возможны два различных случая.

1. Среди указанных вариантов хотя бы два дают различные функции g_1 и хотя бы два — различные g_2 .

2. Выполнено $g_1^1 = g_1^2 = g_1^{12}$ и $g_2^1 = g_2^2 = g_2^{12}$. Тогда степеней свободы для «склейки», очевидно, не хватит.

Другие, «промежуточные», случаи рассматривать не будем.

Легко видеть, что если бы в «лестнице» не было ребер, соединяющих верхнюю и нижнюю части, кроме ребер os и so , то получилось бы дерево, для которого имел бы место первый случай. Поэтому естественно предположить, что если значения на таких ребрах малы, то также имеет место случай 1.

Проверим это. Рассмотрим сначала случай дискретного времени.

Докажем, что при определенных условиях на функцию k и переходные вероятности для точки s (см. рис. 2) будет $g_1^1(s) \neq g_1^2(s)$. Из формулы (2.6) видно, что функции $g_1^1(s)$, $g_1^2(s)$ аналитичны по α . Значит либо они совпадают на нигде не плотном множестве (чем мы можем пренебречь), либо совпадают при всех α . Чтобы опровергнуть последнее, докажем, что они имеют разные пределы при $\alpha \rightarrow \infty$.

Пусть расстояние от s до b_1 равно n . Обозначим через $s_1, \dots, s_{n-1}$ вершины верхней стороны, лежащие между s и b_1 . Положим $s_0 = s$, $s_n = b_1$. Тогда

$$\frac{g_{sb_1}}{g_{ob_1}} \geq \frac{e^{-\alpha n} \prod_{j=0}^{n-1} P(s_j, s_{j+1})(1 - k(s_j))}{\sum_{i=n+1}^{\infty} e^{-\alpha i}} = e^{\alpha}(1 - e^{-\alpha}) \prod_{j=0}^{n-1} P(s_j, s_{j+1})(1 - k(s_j)). \quad (3.5)$$

Если подобрать такие переходные вероятности и такую функцию k на правой верхней стороне, что произведение в числителе сходится, то получим

$$\frac{g_{sb_1}}{g_{ob_1}} \rightarrow \infty \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \text{ равномерно по } b_1.$$

Аналогично доказывается, что если правильно подобрать переходные вероятности и функцию k на правой нижней стороне, получим

$$\frac{g_{sb_2}}{g_{ob_2}} \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \text{ равномерно по } b_2,$$

откуда и вытекает требуемое.

Точно также подбором k и переходных вероятностей на левой стороне достигается $g_2^1(s) \neq g_2^2(s)$, т. е. имеет место случай 1.

В случае непрерывного времени возьмем $Q(a, a) \equiv -1$. Тогда легко видеть, что однородное уравнение (2.5) можно привести к виду (2.4), который имеет уравнение

при дискретном времени. Значит можно подобрать параметр α , функцию k и значения $Q(a, b)$ ($a \neq b$) так, что решения однородного уравнения вида (2.4) в силу приведенных выше рассуждений будут различны.

Строго говоря, здесь мы не доказали различие g_1^1 и g_1^2 для непрерывного времени, но показали, что существуют два различных решения, ограниченных слева от o , и два — справа.

Для «склейки» функции Грина нужно еще проверить линейную независимость полученных четырех решений. Доказательство этого факта для простоты приводить не будем. Но, как видно из примера 3, в наиболее простой ситуации решения однородного уравнения, как и следовало ожидать, линейно независимы.

Теперь заметим, что если бы на верхней стороне «лестницы» не было ребер, то она также превратилась бы в дерево, но в данной ситуации имел бы место второй случай. Поэтому можно предположить, что если значения на верхних ребрах малы, то имеет место случай 2.

Для определенности будем рассматривать случай непрерывного времени. Возьмем некоторое $\varepsilon < 1$. Предположим, что значения на n -м справа и n -м слева верхних ребрах, считая от s , равны ε^n . Докажем, что $g_1^1 = g_1^2$, остальные равенства проверяются аналогично.

Если b_1 находится на расстоянии n от s , а b_2 — на расстоянии n от o , то

$$\begin{aligned}
 g_{ab_1} &= \\
 &= E_a \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_{b_1}} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_{b_1}} k(X(s)) ds}, \mathcal{M}_{b_1} \geq \mathcal{M}_{b_2} \right] + E_a \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_{b_1}} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_{b_1}} k(X(s)) ds}, \mathcal{M}_{b_1} < \mathcal{M}_{b_2} \right] = \\
 &= E_a \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_{b_2}} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_{b_2}} k(X(s)) ds}, \mathcal{M}_{b_1} \geq \mathcal{M}_{b_2} \right] E_{b_2} \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_{b_1}} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_{b_1}} k(X(s)) ds} \right] + O(\varepsilon^n) = \\
 &= E_a \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_{b_2}} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_{b_2}} k(X(s)) ds} \right] E_{b_2} \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_{b_1}} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_{b_1}} k(X(s)) ds} \right] + O(\varepsilon^n) \text{ при } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отсюда, если подобрать значения ребер и функцию k на нижней части лестницы так, что

$$g_{ab_2} = E_a \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_{b_2}} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_{b_2}} k(X(s)) ds} \right] \geq C \delta^n > 0 \tag{3.7}$$

при всех n для некоторых положительных констант C и δ и значения на ребрах, соединяющих верхнюю и нижнюю части, так, что

$$E_{b_2} \left[e^{-\alpha \mathcal{M}_{b_1}} e^{-\int_0^{\mathcal{M}_{b_1}} k(X(s)) ds} \right] \geq \text{const} > 0 \tag{3.8}$$

при всех n , взяв $\varepsilon < \delta$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{ab_1}}{g_{ob_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{ab_2}}{g_{ob_2}}.$$

Существование этих пределов проверяется аналогичным описанному выше способом.

Однако, если переходные вероятности «лестницы» устроены достаточно просто, то при $k \equiv 0$ для монотонных решений и функции Грина можно написать явные формулы, аналогичные приведенным в [2] для целочисленных цепей.

Пример 3. Пусть для каждой вершины значение на ребре, выходящем из нее налево, равно p , направо — q , а вверх (или вниз) — r . Для $k \equiv 0$ найдем в явном виде четыре независимых решения однородного уравнения и «склеим» из них функцию Грина. Для определенности рассматриваем случай непрерывного времени.

Вершины верхней и нижней частей «лестницы» естественным образом перенумеруем целыми числами. Первую пару монотонных решений g_1 и g_2 будем искать в следующем виде: вершине с номером n сопоставляем значение x^n . Из уравнения (2.5) имеем

$$qx^2 - (\alpha + p + q)x + p = 0. \quad (3.9)$$

У этого уравнения есть два решения: x_1 и x_2 ($x_1 > 1 > x_2 > 0$), которые и определяют решения g_1 и g_2 соответственно.

Решения h_1 и h_2 определяются похожим образом, только в верхних вершинах берем значение y^n , а в нижних ($-y^n$). Уравнение на y имеет вид

$$qy^2 - (\alpha + p + q + 2r)y + p = 0. \quad (3.10)$$

Его решения y_1 и y_2 ($y_1 > 1 > y_2 > 0$) определяют решения h_1 и h_2 соответственно.

Найдем теперь $G_0(\cdot, b)$, где b — нижняя вершина с номером n . Для верхних вершин формула получится аналогично.

Пусть d — верхняя вершина с номером n . «До» вершин b, d значение искомой функции положим равным $C_1g_1 + D_1h_1$, а «после» — $C_2g_2 + D_2h_2$, и найдем указанные константы.

Чтобы эти функции «склеились», необходимо совпадение их значений в b и d . То есть имеем

$$\begin{cases} C_1x_1^n + D_1y_1^n = C_2x_2^n + D_2y_2^n, \\ C_1x_1^n - D_1y_1^n = C_2x_2^n - D_2y_2^n. \end{cases} \quad (3.11)$$

Тогда можно ввести обозначения $C = C_1x_1^n = C_2x_2^n$, $D = D_1y_1^n = D_2y_2^n$.

Чтобы теперь выполнялось уравнение (2.1), нужно

$$\begin{cases} (\alpha + p + q + r)(C + D) - p(Cx_1^{-1} + Dy_1^{-1}) - q(Cx_2 + Dy_2) - r(C - D) = 0, \\ (\alpha + p + q + r)(C - D) - p(Cx_1^{-1} - Dy_1^{-1}) - q(Cx_2 - Dy_2) - r(C + D) = 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Отсюда

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2(\alpha + p + q - px_1^{-1} - qy_2)}, \\ D = -\frac{1}{2(\alpha + p + q + 2r - py_1^{-1} - qy_2)}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Теперь формулу для $G_0(\cdot, b)$ действительно можно выписать явно. Поскольку далее она не понадобится, приводить ее не будем.

Приведенные примеры показывают, что обобщения выражения (2.7) для функции Грина через решения однородного уравнения возможны далеко не всегда. Кроме того, даже если функцию Грина можно «склеить» из решений однородного уравнения, полученная формула будет достаточно громоздка и неудобна для применения.

4. Поле переходов. Помимо времени пребывания τ , интересно рассмотреть и поле переходов φ . Для дискретного времени его естественно понимать как количество переходов из состояния v в состояние w (до момента времени θ). В случае случайного блуждания по графу $\varphi(v, w)$ соответствует числу проходов по ребру vw . Формулы для конечномерных распределений поля φ в данном случае могут быть получены аналогично соответствующим рассуждениям для поля τ . Единственный нюанс заключается в том, что вместо функции $k(a)$ необходимо рассматривать функцию $k(a, b)$, зависящую также от состояния, куда происходит переход. За более подробными рассуждениями можно обратиться к [7], [1]. Приводить эти достаточно громоздкие и неудобные формулы здесь не будем.

Для непрерывного времени, однако, необходим несколько другой подход к пониманию поля переходов. В данном случае наиболее естественно понимать поле $\varphi(v, w)$ как общее время, проводимое процессом $X(t)$ в состоянии w после прохождения ребра vw . Это время для удобства будем называть временем пребывания процесса $X(t)$ в конце ребра vw (хотя этот процесс и перемещается по вершинам графа).

К сожалению, рассуждения, позволяющие получать формулы для конечномерных распределений при дискретном времени, для непрерывного времени не работают. Но, действуя куда более прямолинейным образом, а именно рассматривая марковскую цепь, состояниям которой соответствуют ребра исходного графа, определенные выводы относительно марковости φ сделать удастся.

Для простоты рассмотрим целочисленную цепь. Сопоставляя ребрам соответствующего графа Γ состояния и естественным образом определяя переходные плотности, получим, что для изучения свойств поля φ вместо блуждания по $\mathbb{Z}$ можно рассматривать блуждание по графу Γ^* , изображенному на рис. 3.



Рис. 3. Граф, соответствующий целочисленной цепи при замене ребер состояниями. Вершины графа удобно разбить на пары. Правой вершине пары соответствует ребро от n до $(n+1)$, а левой от $(n+1)$ до n .

Назовем необходимыми те вершины, при удалении которых граф распадается на компоненты связности (связность понимается без учета направления на ребрах). Аналогично можно определить и группу необходимых в совокупности вершин.

Как видно, у Γ^* нет необходимых вершин. Если же рассматривать пары вершин, необходимых в совокупности, то по аналогии с утверждениями из работы [9] марковости поля φ ожидать не приходится. Но для точной формулировки соответствующего утверждения нужно еще определиться с тем, какие именно условные меры рассматривать, а также учесть, что в данном случае отсутствует условие двусторонней проходимости ребер.

Итак, обратимся к вопросу об условных мерах. Для начала, однако, заметим, что данное выше определение поля φ не совсем полное. А именно, неясно как понимать поле переходов, пока процесс еще не покинул начальное состояние a . Есть три естественных варианта: считать, что в это время процесс еще не находится ни на одном ребре, то есть что поле переходов везде нулевое; считать, что процесс находится на каком-то одном выбранном ребре; считать, что первоначально процесс находится на всех ребрах с концом в a . Для определенности и простоты будем рас-

смаатривать второй вариант. Другие два варианта отличаются от него не сильно, но требуют незначительных усложнений в рассуждениях.

Предполагаем, что процесс изначально находится на ребре A с концом a . Поэтому для блуждания на графе Γ^* можно рассмаатривать два вида условных мер: P_{Ab} , когда фиксировано конечное состояние исходного процесса, и P_{AB} , когда фиксировано конечное ребро. Рассмаатривание мер P_{AB} означает фиксацию начальной и конечной вершин на графе Γ^* , и рассуждения в этом случае будут такими же, как и ранее. При рассмаатривании мер P_{Ab} в момент времени θ процесс попадает в множество вершин (соответствующих ребрам с концом в b), что также практически не меняет схему рассуждений.

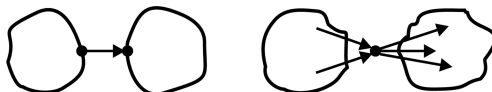


Рис. 4. Граф Λ (слева) и граф Λ^* (справа). Представляют собой две компоненты, соединенные указанным на рисунке способом.

Рассмаатриваем также граф Λ указанного ниже вида и аналогичным образом построенный по нему граф Λ^* (см. рис. 4). У Λ^* имеется необходимая вершина, поэтому рассмаатривать на марковость φ вполне можно. Точный ответ на вопрос о марковском свойстве поля переходов для двух типов рассмаатриваемых графов дает следующая теорема.

Теорема 1. *Как относительно мер P_{AB} , так и относительно мер P_{Ab} имеют место следующие утверждения о марковости поля φ , для удобства сведенные в таблицу.*

Случай	Марковское свойство
1. Граф Γ^* , пара необходимых вершин рассмаатривается по отдельности	—
2. Граф Γ^* , рассмаатривается общее время пребывания в паре необходимых вершин	—
3. Граф Γ^* , рассмаатривается время пребывания в паре вершин (по уровням)	—
4. Граф Λ^*	+

Здесь знак «+» означает, что марковское свойство есть, а «—» что его нет.

Доказательство. Доказательства для случаев 1–3 практически аналогичны соответствующим доказательствам из [9]. Единственное отличие для мер P_{Ab} заключается в том, что вместо обычной функции Грина нужно использовать функцию Грина, вторым аргументом которой является множество (как это было сделано в доказательстве утверждения 2 в [9]).

Используя такие функции Грина, теорему 2 из [8] также несложно перенести на случай, когда условная мера фиксирует множество, в которое процесс попадает в конце. Отсюда вытекает доказательство для случая 4.

Отсутствие условия двусторонней проходимости ребер, как легко проверить, в доказательствах не используется, оно нужно лишь для простоты определения связности. $\square$

Замечание 1. По-видимому, марковское свойство для поля переходов целочисленной цепи удастся получить только в следующем тривиальном случае. Рассмотрим в качестве «уровней» пары ребер, входящих в вершину. Кроме того, будем считать, что первоначально процесс находится на всех ребрах с данным концом. В этом случае вопрос марковости сводится к соответствующему утверждению для поля пребывания.

Литература

1. Валландер С. С. Времена пребывания для неоднородных цепей Маркова с дискретным временем // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 177. С. 37–45.
2. Валландер С. С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. I. Цепи с дискретным временем // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1982. Т. 119. С. 39–61.
3. Валландер С. С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. II. Цепи с непрерывным временем // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1983. Т. 130. С. 56–64.
4. Валландер С. С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. III. Цепи на дереве с одной точкой ветвления // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1985. Т. 142. С. 25–38.
5. Валландер С. С. Времена пребывания для счетных цепей Маркова. IV. Цепи на произвольном дереве // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1987. Т. 158. С. 39–45.
6. Валландер С. С. Некоторые свойства времен пребывания и переходов для счетных цепей Маркова // Тезисы докладов Четвертой Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике. 1985. Т. 1. С. 116–118.
7. Валландер С. С. Поля пребывания и переходов для счетных цепей Маркова // Шестой международный симпозиум по теории информации. Тезисы докладов. Ч. III. 1984. С. 64–66.
8. Воротов А. А. Марковское свойство поля времени пребывания для дискретных марковских процессов // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2013. Т. 412. С. 88–108.
9. Воротов А. А. О марковском свойстве поля времени пребывания для цепей Маркова с непрерывным временем относительно нескольких состояний // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2013. Сер. 1. Вып. 4. С. 30–40.
10. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968. 394 с.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

Сведения об авторе: Воротов Алексей Александрович — аспирант; vaa.spb@gmail.com

THE GREEN FUNCTION FORMULAS AND TRANSITIONS FIELD MARKOV PROPERTY FOR HOMOGENEOUS MARKOV CHAINS

Aleksei A. Vorotov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; vaa.spb@gmail.com

Green function is a quite useful instrument for the occupation time finite-dimensional distributions description. It is known that for a random walk on a tree the Green function is expressed in terms of homogeneous equation solutions. We try to generalize this result for more complicated graphs. It turns out that generalizations are not always possible. For example, let us consider a random walk on an infinite «ladder». It could be shown that the possibility of Green function formula generalization depends on the transition probabilities of this process. For some graphs it is impossible to «glue» homogeneous solutions together. In that case there are no useful formulas for Green function.

We also consider a transitions field φ for a continuous time Markov chain. Transitions field is defined on the transition graph edges. φ is a time spending in the end of each edge. There are no useful finite-dimensional distributions formulas for φ . Nevertheless in some situations the Markov property could be checked. It could be shown that even for a random walk on integers the random field φ is not Markovian. Refs 10. Figs 4.

Keywords: Markov property, transitions field, Green function.