УДК 519.86:368 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 1

ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РИСКА*

Т. М. Товстик

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматривается стохастическая модель риска со случайными и независимыми исками и премиями. Выведены рекуррентные формулы для вычисления вероятностей разорения страховой компании в моменты выплат страховых возмещений. Случайные премии независимы и одинаково распределены, страховые возмещения обладают теми же свойствами. Количество исков и премий — независимые пуассоновские процессы, которые не зависят от размеров премий и исков. Рассматривается вариант, когда случайные премии и страховые возмещения имеют экспоненциальные распределения и более общий вариант, когда они имеют гамма-распределения с целыми параметрами. Полученные вероятности дают возможность вычислить вероятности разорения на бесконечном и на конечном интервалах времени. Приводятся примеры. Библиогр. 6 назв. Ил. 2. Табл. 1.

Ключевые слова: вероятность разорения, стохастическая модель, случайные премии и иски.

Для стохастической модели риска со случайными и независимыми исками и премиями выведены рекуррентные формулы для вычисления вероятностей разорения страховой компании в моменты выплат страховых возмещений. Случайные премии независимы и одинаково распределены, страховые возмещения обладают теми же свойствами. Количество исков и премий — независимые пуассоновские процессы, которые не зависят от размеров премий и исков. Рассматривается вариант, когда случайные премии и страховые возмещения имеют экспоненциальные распределения, и более общий вариант, когда они имеют гамма-распределения с целыми параметрами. Полученные вероятности дают возможность вычислить вероятности разорения на бесконечном и на конечном интервалах времени. Приводятся примеры.

Введение. Классический подход к решению задачи о разорении страховой компании для модели Крамера—Лундберга (КЛ) и других стохастических вариантов рисковых моделей состоит в выводе интегральных или интегро-дифференциальных уравнений [1–4] для вероятностей неразорения. Однако у этих уравнений не всегда удается найти явное решение. В статье [3] рассматривается стохастическая модель (СМ) риска со случайными и независимыми исками и премиями, распределения которых заданы в общем виде. Все иски одинаково распределены, премии также одинаково распределены. Количество исков и премий — независимые пуассоновские процессы. Для этой модели выведено интегральное уравнение для вероятности неразорения на бесконечном временном интервале и интегро-дифференциальное — на конечном. При экспоненциальных распределениях исков и премий получено явное решение только для вероятности неразорения на бесконечном интервале.

В данной статье, как и в статье [5], предлагается другой подход к решению задачи о вычислении вероятности разорения компании, который для некоторых СМ позволяет найти эти вероятности на бесконечном и конечном интервалах времени.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-00769-а.

Данная статья является дальнейшим развитием результатов, полученных в статье [5]. В [5] выведены рекуррентные уравнения для вероятностей разорения страховых компаний в моменты страховых выплат для классической модели КЛ, в которой страховые возмещения подчиняются экспоненциальному закону, а также для СМ, у которой независимые случайные премии и иски распределены экспоненциально, причем премии поступают по закону Пуассона, а страховые случаи поступают в те же моменты, что и премии, но с меньшей интенсивностью. Полученные вероятности дают возможность вычислить вероятности разорения на бесконечном временном интервале для модели КЛ и для модели СМ — на конечном и бесконечном интервалах.

В данной статье рассматривается та же СМ риска, что и в статье [3], для двух вариантов распределения исков и премий, а именно, для экспоненциального распределения и для гамма-распределения с целыми параметрами. Выведены рекуррентные формулы для вычисления вероятностей разорения в моменты выплат страховых возмещений. Полученные вероятности дают возможность вычислить вероятности разорения на бесконечном и на конечном интервалах, так как компанию прежде всего интересует вероятность разорения на конечном временном интервалах, в частности, в течение первого года. Приводятся примеры.

1. Стохастическая модель с экспоненциально распределенными премиями и исками. Рассмотрим рисковую модель, у которой премии $\eta_k, k = 1, 2, \ldots,$ и страховые возмещения ξ_i, $i = 1, 2, \ldots,$ являются независимыми случайными величинами. Все премии и иски имеют экспоненциальные распределения при $x > 0$:

$$f_{\xi_i}(x) = f_\xi(x) = \mu^{-1} \exp(-x/\mu), \quad f_{\eta_k}(x) = f_\eta(x) = a^{-1} \exp(-x/a). \tag{1.1}$$

В дальнейшем во всей статье будем предполагать, что число премий $M(t)$ и исков $N(t)$, поступивших к моменту времени t, — это однородные независимые процессы Пуассона с интенсивностями λ_1 и λ_2, и $\mathbf{E}M(t) = \lambda_1 t$, $\mathbf{E}N(t) = \lambda_2 t$. Один год соответствует значению $t = 1$.

Исходный капитал компании обозначим через $u\,(u > 0)$, вероятность разорения компании на бесконечном временном интервале — через $\Psi(u)$, а на интервале $(0, t)$ — через $\Psi(u, t)$.

Сначала выведем рекуррентные уравнения для вероятностей разорения в моменты страховых выплат, а затем формулы для вычисления $\Psi(u)$ и $\Psi(u, t)$.

Капитал $R(t)$ компании в момент времени t для данной модели равен

$$R(t) = u + \sum_{k=1}^{M(t)} \eta_k - \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k. \tag{1.2}$$

Определим случайный процесс $L(t)$ равным сумме двух независимых пуассоновских процессов:

$$L(t) = M(t) + N(t); \tag{1.3}$$

он тоже будет пуассоновским с математическим ожиданием

$$\mathbf{E}L(t) = \lambda t, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{1.4}$$

Пуассоновский процесс с вероятностью единица в случайные моменты времени возрастает скачками размера единица. Промежутки между скачками процесса $L(t)$ распределены по экспоненциальному закону с параметром λ, причем с вероятностью

$q = \lambda_1/\lambda$ в этот момент поступает премия и с вероятностью $p = \lambda_2/\lambda$ происходит страховой случай, который ведет к выплате страхового возмещения.

Изменение капитала компании между $(k-1)$-м и k-м скачками процесса $L(t)$ можно представить в виде случайной величины

$$\zeta_k = \begin{cases} \xi_k & \text{с вероятностью } p, \\ -\eta_k & \text{с вероятностью } q. \end{cases} \tag{1.5}$$

Капитал компании после n-го скачка процесса $L(t)$ можно записать в виде

$$R_n = u - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k. \tag{1.6}$$

Условие положительной платежеспособности $\mathbf{E}\zeta_k < 0$ выливается в следующее неравенство:

$$\lambda_2 \mu < \lambda_1 a. \tag{1.7}$$

Так как случайные величины ξ_k и η_k при разных k независимы, случайные величины ζ_k также независимы и одинаково распределены, а их плотность распределения равна

$$f_\zeta(x) = \begin{cases} p\, f_\xi(x) & \text{при} \quad x \geq 0, \\ q\, f_\eta(-x) & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Пусть $P_n(u)$ — вероятность разорения компании при поступлении n-го скачка процесса $L(t)$, а $P(K, u)$ — вероятность разорения компании к моменту K-го скачка процесса $L(t)$, тогда ввиду несовместимости соответствующих событий имеем

$$P(K, u) = \sum_{n=1}^{K} P_n(u). \tag{1.9}$$

Разорение происходит при n-м скачке процесса $L(t)$, если скачок порождается страховым случаем, а капитал компании R_n удовлетворяет неравенствам $R_n < 0$ и $R_k > 0$ при $1 \leq k < n$.

Вероятность разорения $P_n(u)$ (см. [5]) записывается в виде

$$\begin{aligned} P_n(u) = \mathbf{P}(R_n < 0;\ R_k > 0,\ 1 \leq k < n) = \\ = \mathbf{P}\left(\zeta_1 < u, \sum_{k=1}^{2} \zeta_k < u, \ldots, \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_k < u, \sum_{k=1}^{n} \zeta_k > u\right) = \\ = \int_{-\infty}^{u} f_\zeta(x_1) \int_{-\infty}^{u-x_1} f_\zeta(x_2) \ldots \int_{-\infty}^{u-\sum_{k=1}^{n-2} x_k} f_\zeta(x_{n-1}) \int_{u-\sum_{k=1}^{n-1} x_k}^{\infty} f_\zeta(x_n) dx_1 \ldots dx_n. \end{aligned}$$

Вероятность разорения компании при первом страховом случае, если он происходит до поступления первой премии, равна

$$P_1(u) = \mathbf{P}(\zeta > u) = p \int_{u}^{\infty} f_\xi(x) dx = p\, e^{-\frac{u}{\mu}}, \quad u > 0. \tag{1.10}$$

Вероятности разорения $P_n(u)$ можно находить (см. [5]) последовательно из равенств

$$P_n(u) = \int_{-\infty}^{u} f_\zeta(x) P_{n-1}(u-x)dx, \quad n = 2, 3, \dots . \tag{1.11}$$

Вычислим интегралы, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\int_{-\infty}^{u} e^{\frac{x}{\mu}} f_\zeta(x) x^n dx = A u^{n+1}/(n+1) + B W^{n+1}(-1)^n n!, \quad n \geq 0, \quad u > 0, \tag{1.12}$$

где

$$W = \frac{a\mu}{a+\mu}, \qquad A = \frac{p}{\mu}, \qquad B = \frac{q}{a}. \tag{1.13}$$

Теорема 1. *Для рисковой модели (1.6) вероятность разорения компании при выплате страхового возмещения в момент $(n+1)$-го скачка процесса $L(t)$ вычисляется по формуле*

$$P_{n+1}(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} b_{n-k}^{(n+1)} W^{n-k}, \quad n \geq 1, \tag{1.14}$$

в которой коэффициенты находятся рекуррентно согласно уравнениям

$$b_0^{(n+1)} = A\, b_0^{(n)}, \quad b_n^{(n+1)} = B \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(n)}, \quad b_j^{(n+1)} = A b_j^{(n)} + B \sum_{i=0}^{j-1} b_i^{(n)}, \quad 1 \leq j \leq n-1, \tag{1.15}$$

с начальными данными

$$P_1(u) = p\, e^{-\frac{u}{\mu}}, \quad b_0^{(1)} = p. \tag{1.16}$$

Доказательство. Будем использовать метод математической индукции. На основе формулы (1.11) находим вероятность $P_2(u) = p\, e^{-\frac{u}{\mu}}(Au + BW)$ и видим, что ее коэффициенты $b_0^{(2)} = A b_0^{(1)}$, $b_1^{(2)} = B b_0^{(1)}$ удовлетворяют равенствам (1.15). При $n = 1$ утверждение теоремы доказано. Будем считать, что оно справедливо для вероятности $P_n(u)$ и проверим выполнение равенства (1.14) с коэффициентами (1.15). Согласно формулы (1.11)

$$P_{n+1}(u) = \int_{-\infty}^{u} f_\zeta(x) P_n(u-x)dx = \int_{-\infty}^{u} f_\zeta(x) e^{-\frac{u-x}{\mu}} \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k}^{(n)} W^{n-1-k} \frac{(u-x)^k}{k!} dx =$$

$$= e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k}^{(n)} W^{n-1-k} \left(A \int_0^u \frac{(u-x)^k}{k!} dx + B \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{W}} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i u^i x^{k-i} (-1)^{k-i} dx \right).$$

При вычислении интегралов воспользуемся формулами (1.12); тогда получим

$$P_{n+1}(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k}^{(n)} W^{n-1-k} \left(A \frac{u^{k+1}}{(k+1)!} + B \sum_{i=0}^{k} \frac{u^i}{i!} W^{k-i+1} \right).$$

Поменяв порядки суммирования, приходим к окончательному виду

$$P_{n+1}(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \left(A b_0^{(n)} \frac{u^n}{n!} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u^i}{i!} W^{n-i} \left(A b_{n-i}^{(n)} + B \sum_{k=i}^{n-1} b_{n-1-k}^{(n)} \right) + B W^n \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1-k}^{(n)} \right). \tag{1.17}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при $e^{-\frac{u}{\mu}}u^k/k!$ в представлениях $P_{n+1}(u)$ в виде (1.14) и (1.17), убеждаемся в справедливости формул (1.15). Теорема доказана.

Пусть нужно найти вероятность разорения до момента времени t. В этом случае капитал компании вместо формулы (1.2) представим в виде случайного процесса [6]:

$$R(t) = u - \sum_{n\geq 1} \zeta_n I(t_n \leq t). \tag{1.18}$$

Здесь t_k — моменты скачков процесса $L(t)$, которые не зависят от ζ_k и в которые либо поступает премия, либо происходит страховой случай. Величина $I\ (t_k \leq t)$ является индикатором выполнения неравенства $t_k \leq t$. Для модели (1.18) разности $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i \geq 1$ $(t_0 = 0)$ независимы, одинаково распределены и имеют экспоненциальное распределение $f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Теорема 2. *Для модели (1.8) при начальном капитале u вероятность разорения компании на бесконечном временном интервале равна*

$$\Psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(u), \tag{1.19}$$

а на конечном временном интервале $(0, t)$ —

$$\Psi(u,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(u) \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right). \tag{1.20}$$

Доказательство. События, вероятности которых обозначены через $P_k(u), k = 1, 2, \ldots$, несовместны, их объединение соответствует разорению компании на бесконечном интервале с вероятностью $\Psi(u)$. Отсюда следует равенство (1.19).

В силу сделанных предположений разорение в интервале $(0, t)$ может наступить в момент появления скачка у процесса $L(t)$, если скачек вызван появлением страхового случая. Вероятность $\Psi(u, t)$ разорения на отрезке $(0, t)$ по формуле полной вероятности и ввиду независимости случайных величин ζ_k и τ_k определяется выражением

$$\Psi(u,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(u) \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \tau_k \leq t\right). \tag{1.21}$$

Вероятности $P_n(u)$ вычисляются по формулам (1.14), а

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \tau_k > t\right) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Отсюда следует второе утверждение теоремы.

В статье [3] найдена вероятность разорения компании для данной модели на бесконечном промежутке времени

$$\Psi(u) = \begin{cases} \frac{(a+\mu)\lambda_2}{a(\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\frac{(a\lambda_1-\mu\lambda_2)}{a\mu(\lambda_1+\lambda_2)}u} & \text{при} \quad \lambda_2\mu < \lambda_1 a, \\ 1 & \text{при} \quad \lambda_2\mu \geq \lambda_1 a. \end{cases} \tag{1.22}$$

Заметим, что для модели (1.2) в [3] выведено интегро-дифференциальное уравнение для вероятности неразорения компании на конечном интервале, однако решение для него в явном виде не найдено. Формула (1.20) дает возможность вычислить $\Psi(u,t)$ — вероятность разорения компании на конечном интервале $(0,t)$.

2. Стохастическая модель с исками и премиями, имеющими гамма-распределения с целыми параметрами. Рассмотрим рисковую модель (1.6) со случайными величинами ζ_k вида (1.5), плотность распределения которых определяется выражением (1.8) с компонентами

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\mu^{m_0+1}}\frac{x^{m_0}}{(m_0)!}\,e^{-x/\mu}, \quad m_0 \ge 0, \qquad f_\eta(x) = \frac{1}{a^{k_0+1}}\frac{x^{k_0}}{(k_0)!}e^{-x/a}, \quad k_0 \ge 0, \quad x > 0, \tag{2.1}$$

в которых m_0 и k_0 — целые числа. Случайные иски ξ и премии η имеют гамма-распределения с математическими ожиданиями

$$\mathbf{E}\xi = \mu(m_0+1), \quad \mathbf{E}\eta = a(k_0+1).$$

Для положительности дохода необходимо выполнение неравенства

$$\lambda_2\mu(m_0+1) < \lambda_1 a(k_0+1). \tag{2.2}$$

В данном пункте вероятности $P_n(u)$ имеют тот же смысл, что и в п. 1, но для модели с плотностями (2.1). Вероятность разорения при первом страховом случае, который произойдет до получения первой премии, равна

$$P_1(u) = \mathbf{P}(\zeta_1 > u) = p\int_u^\infty f_\xi(x)dx = p\,e^{-\frac{u}{\mu}}\sum_{k=0}^{m_0}\frac{u^k}{k!}\frac{1}{\mu^k}. \tag{2.3}$$

Вероятность $P_1(u)$ состоит из m_0+1 слагаемого, а у каждой последующей вероятности $P_n(u), n = 2,3,\ldots$, количество слагаемых будет увеличиваться на m_0+1. Пояснением может служить вычисление интеграла

$$p\int_0^u \frac{(u-x)^n}{n!}\frac{x^{m_0}}{\mu^{m_0+1}m_0!}dx = G\frac{u^{n+m_0+1}}{(n+m_0+1)!}, \qquad G = \frac{p}{\mu^{m_0+1}}, \tag{2.4}$$

который возникает при использовании формулы (1.11).

Вычислим интеграл, который нам понадобится в дальнейшем:

$$q\int_0^\infty e^{-\frac{x}{Q}}\frac{x^{k_0}}{a^{k_0+1}(k_0)!}\frac{(u+x)^m}{m!}dx = q\int_0^\infty e^{-\frac{x}{Q}}\sum_{i=0}^m C_m^i u^i x^{m-i+k_0}\frac{1}{a^{k_0+1}(k_0)!m!}dx =$$

$$= q\frac{Q^{k_0+1}}{a^{k_0+1}}\sum_{i=0}^m\frac{u^i}{i!}Q^{m-i}\frac{(m-i+k_0)!}{(k_0)!(m-i)!} = V\sum_{i=0}^m\frac{u^i}{i!}Q^{m-i}C_{m-i+k_0}^{k_0}, \tag{2.5}$$

где

$$Q = \frac{a\mu}{a+\mu}, \qquad V = q\,\frac{Q^{k_0+1}}{a^{k_0+1}}. \tag{2.6}$$

Теорема 3. *Для рисковой модели (1.6), если плотности случайных величин* ζ_k *имеют вид (1.8) с компонентами (2.1), вероятность разорения компании при выплате страхового возмещения в момент* $(n+1)$*-го скачка процесса* $L(t)$ *вычисляется по формуле*

$$P_{n+1}(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{(n+1)(m_0+1)-1} \frac{u^k}{k!}\, h_k^{(n+1)}, \quad n \geq 1. \tag{2.7}$$

Коэффициенты $h_k^{(n+1)}$ *рекуррентно вычисляются по формулам*

$$\begin{gathered} h_k^{(n+1)} = G h_{k-m_0-1}^{(n)}, \qquad n(m_0+1) \leq k \leq (n+1)(m_0+1) - 1, \\ h_k^{(n+1)} = G h_{k-m_0-1}^{(n)} + V \sum_{i=k}^{n(m_0+1)-1} h_i^{(n)} C_{i-k+k_0}^{k_0} Q^{i-k}, \qquad m_0+1 \leq k \leq n(m_0+1)-1,\ n>1, \\ h_k^{(n+1)} = V \sum_{i=k}^{n(m_0+1)-1} h_i^{(n)} C_{i-k+k_0}^{k_0} Q^{i-k}, \qquad 0 \leq k \leq m_0, \end{gathered} \tag{2.8}$$

с начальными данными

$$P_1(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{m_0} \frac{u^k}{k!} h_k^{(1)}, \qquad h_k^{(1)} = \frac{p}{\mu^k}, \quad 0 \leq k \leq m_0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Доказывать будем по индукции. Используя равенство (1.11) и учитывая значения интегралов (2.4) и (2.5), получаем вероятность разорения при втором скачке процесса $L(t)$:

$$P_2(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{m_0} h_k^{(1)} \left(\frac{p}{\mu^{m_0+1}} \frac{u^{k+m_0+1}}{(k+m_0+1)!} + \frac{q}{a^{k_0+1}} Q^{k_0+1} \sum_{i=0}^{k} \frac{u^i}{i!} Q^{k-i} C_{k-i+k_0}^{k_0} \right).$$

Ее можно переписать в виде

$$P_2(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \left(G \sum_{k=m_0+1}^{2m_0+1} h_{k-m_0-1}^{(1)} \frac{u^k}{k!} + V \sum_{i=0}^{m_0} \frac{u^i}{i!} \sum_{k=i}^{m_0} h_k^{(1)} Q^{k-i} C_{k-i+k_0}^{k_0} \right) = e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{2m_0+1} \frac{u^k}{k!} h_k^{(2)};$$

теперь легко убедиться, что коэффициенты $h_k^{(2)}$ удовлетворяют равенствам (2.8). База индукции получена. Будем считать, что соответствующее равенство для $P_n(u)$ доказано. Снова воспользуемся равенством (1.11):

$$\begin{aligned} P_{n+1}(u) &= e^{-\frac{u}{\mu}} \int_{-\infty}^{u} f_\zeta(x) e^{\frac{x}{\mu}} \sum_{k=0}^{n(m_0+1)-1} \frac{(u-x)^k}{k!}\, h_k^{(n)} dx = \\ &= e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{n(m_0+1)-1} h_k^{(n)} \left(\frac{p}{\mu^{m_0+1}} \int_0^u \frac{(u-x)^k}{k!} \frac{(x)^{m_0}}{(m_0)!} dx + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{q}{a^{k_0+1}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{\mu}+\frac{x}{a}} \frac{(u-x)^k}{k!} \frac{(-x)^{k_0}}{(k_0)!} dx \right). \end{aligned}$$

Учитывая равенства (2.4) и (2.5), получаем

$$P_{n+1}(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=0}^{n(m_0+1)-1} h_k^{(n)} \left(G \frac{u^{k+m_0+1}}{(k+m_0+1)!} + V \sum_{i=0}^{k} \frac{u^i}{i!} Q^{k-i} C_{k-i+k_0}^{k_0} \right).$$

Поменяв порядки суммирования, приходим к следующему результату:

$$P_{n+1}(u) = e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=n(m_0+1)}^{(n+1)(m_0+1)-1} \frac{u^k}{k!} G\, h_{k-m_0-1}^{(n)} +$$
$$+ e^{-\frac{u}{\mu}} \sum_{k=m_0+1}^{n(m_0+1)-1} \frac{u^k}{k!} \left(G\, h_{k-m_0-1}^{(n)} + V \sum_{i=k}^{n(m_0+1)-1} Q^{i-k} C_{i-k+k_0}^{k_0} h_i^{(n)} \right) +$$
$$+ e^{-\frac{u}{\mu}} V \sum_{k=0}^{m_0} \frac{u^k}{k!} \sum_{i=k}^{n(m_0+1)-1} Q^{i-k} C_{i-k+k_0}^{k_0} h_i^{(n)},$$

который доказывает теорему.

Вероятности $\Psi(u)$ и $\Psi(u,t)$ разорения страховой компании для данной модели риска соответственно на бесконечном и конечном интервале $(0,t)$ можно вычислить, если воспользоваться теоремой 2 и формулами (1.19) и (1.20), в которых вероятности $P_n(u)$ находятся по формулам (2.7).

Пример 1. Исходные данные для моделей с плотностями (2.1) и (1.1) таковы: $u = 25$, $\lambda_1 = 60$, $\lambda_2 = 4$. Рассмотрим несколько вариантов моделей, для которых выполняются равенства $\mathbf{E}\xi = (m_0+1)\mu = 6, \mathbf{E}\eta = (k_0+1)a = 0.5$, обеспечивающие постоянство математических ожиданий. В данном случае выполнено условие (2.2) и, следовательно, $\Psi(u) < 1$. Исследуем влияние параметров m_0 и k_0 плотностей распределений (2.1) на вероятности разорения $P(K,u)$ и $\Psi(u,t)$.

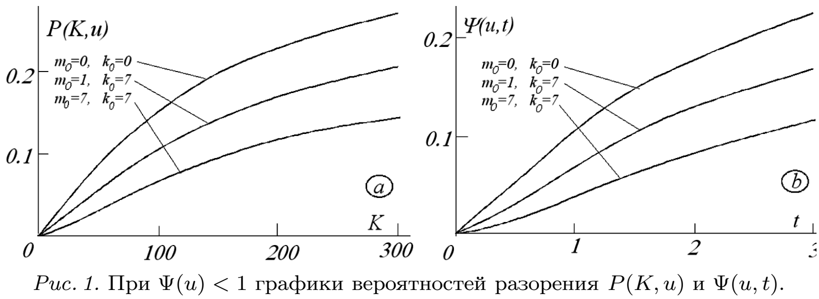

Рис. 1. При $\Psi(u) < 1$ графики вероятностей разорения $P(K,u)$ и $\Psi(u,t)$.

На рис. 1 представлены эти вероятности для трех вариантов наборов (m_0, k_0). На рис. 1, a показаны изменения вероятностей $P(K,u)$ в зависимости от роста числа K скачков процесса $L(t)$, а на рис. 1, b представлены вероятности $\Psi(u,t)$ разорения к моменту времени t, где $t = 1$ соответствует одному году. У данных примеров наибольшие вероятности разорения $P(K,u)$ и $\Psi(u,t)$ при одинаковых K и t соответствуют случаю $m_0 = 0, k_0 = 0$; они уменьшаются с ростом m_0 и наименьшие значение из рассмотренных $(0 \le m_0 \le 7)$ принимают при $(m_0 = 7, k_0 = 7)$. Параметр k_0, как выяснилось, мало влияет на эти вероятности.

В [3] при условии, что $\Psi(u) < 1$, доказано неравенство, ограничивающее вероятность разорения на бесконечном интервале,

$$\Psi(u) \le e^{-\beta u} = \Psi_*,$$

в котором величина β является наименьшим положительным корнем характеристического уравнения

$$\lambda_1(\mathbf{E}e^{-\beta\eta} - 1) + \lambda_2(\mathbf{E}e^{\beta\xi} - 1) = 0,$$

а при экспоненциальных распределениях ξ и η, т. е. при $m_0 = 0, k_0 = 0$, найдена формула для вычисления $\Psi(u) = (\mu + a)\lambda_2 e^{-\beta u}/(a(\lambda_1 + \lambda_2))$, которая в примере дает $\Psi(u) = 0.3720$. Чтобы понять скорость сходимости к этому пределу, приведем вероятность $\Psi(2000, u) = 0.3674$.

Для некоторых вариантов примера 1, которые отличаются набором (m_0, k_0), в таблице 1 приведены $\Psi(u, 3)$ — вероятности разорения к концу третьего года и соответствующие Ψ_*. Как видим из таблицы 1 вероятности Ψ_* практически в два раза превышают $\Psi(u, 3)$, и это является аргументом в пользу использования описанного выше метода.

Таблица 1. **Сравнение вероятностей $\Psi(u, 3)$ с Ψ_***

(m_0, k_0)	(0,0)	(7,7)	(7,1)	(1,7)	(1,5)	(5,7)
$\Psi(u, 3)$	0.2248	0.1148	0.1188	0.1677	0.1680	0.1213
Ψ_*	0.4578	0.2323	0.2400	0.3390	0.3396	0.2452

Пример 2. Рассмотрим модель риска с теми же параметрами, что и в примере 1, кроме одного, а именно, $\lambda_1 = 40$. В этом случае неравенство (2.2) не выполнено и, следовательно, $\Psi(u) = 1$.

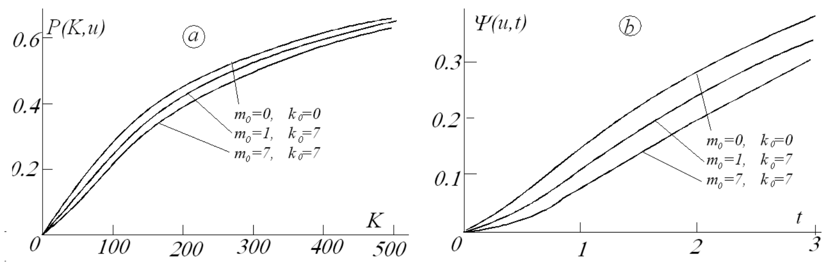

Рис. 2. При $\Psi(u) = 1$ графики вероятностей разорения $P(K, u)$ и $\Psi(u, t)$.

На рис. 2, как и на рис. 1, представлены графики изменения вероятностей разорения, причем на рис. 2, *a* вероятности $P(K, u)$, а на рис. 2, *b* вероятности $\Psi(u, t)$. Модель риска такова, что разорение произойдет с вероятностью единица, а о скорости сходимости к пределу можно судить по следующим вероятностям: $P(2000, u) = 0.9797$, $\Psi(u, 5) = 0.5980$ для модели при $m_0 = 0, k_0 = 0$.

Тенденции изменения соответствующих вероятностей в обоих примерах похожи, но отличаются диапазонами изменения.

Заключение. Для стохастической модели риска в случае, когда премии и иски имеют гамма-распределения с целыми параметрами, вычислены вероятности разорения страховой компании на конечном и бесконечном промежутках времени. При этом случай, когда разорение происходит с вероятностью единица, не исключается из рассмотрения. Полученные результаты дают возможность компании корректировать свою деятельность.

Литература

1. *Cramer H.* Collective Risk Theory. Reprint from the Skandia Juilee Volume. 1955.
2. *Pervozvansky A. A. (Jr.)* Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force // Insurance: Math. Econ. 1998. Vol. 23. P. 287–295.
3. *Бойков А. В.* Модель Крамера—Лундберга со стохастическими премиями // Теор. вероят. и ее прим. 2002. Т. 47, № 3. С. 549–553.
4. *Luo Jian-hua.* Survival probability and ruin probability of a risk model // Appl. Math. J. Chinese Univ. 2008. Vol. 23(3). P. 256–264.
5. *Товстик Т. М., Богдан В. Ю.* Рекуррентные уравнения для вероятности разорения страховой компании для некоторых моделей риска // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 4. С. 69–87.
6. *Ширяев А. Н.* Вероятность-2. М.: Изд. МЦНМО, 2004. 927 с.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

Сведения об авторе: *Товстик Татьяна Михайловна* — кандидат физико-математических наук, доцент; peter.tovstik@mail.ru

RECURRENT EQUATIONS FOR THE RUIN PROBABILITY OF AN INSURANCE COMPANY FOR SOME RISK MODELS

Tatiana M. Tovstik

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; peter.tovstik@mail.ru

The stochastic risk model with random independent risks and premiums is studied. The recurrent relations for a calculation of the ruin probability of an insurance company in moments of insurance amounts are delivered. It is supposed that the insurance premiums are independent and identical distributed, and the insurance amounts satisfy to the same properties. The numbers of claim amounts and premiums are the independent Poisson's processes which are independent of the claim amounts and premiums volumes. The case when the random premiums and the insurance amounts have the exponential distribution. Also the Gamma-distributions with an integer parameters are studied. The obtained results allow us to calculate the ruin probabilities in the infinite and in the finite time intervals. In the studied examples for the Gamma-distributions the graphics of the ruin probabilities during three years are presented. Refs 6. Figs 2. Tables 1.

Keywords: ruin probability, risk model, stochastic premium and claim amount.