УДК 517.586 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 1

# О СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ МНОГОЧЛЕНА ЛЕЖАНДРА*

*К. В. Холшевников*[1,2], *В. Ш. Шайдулин*[1,3]

[1] С.-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
[2] Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10
[3] Главная астрономическая обсерватория РАН,
Российская Федерация, 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65

Систематически излагаются свойства интегралов

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \qquad P_{nk}(x) = \int_{-1}^{x} P_{n,k-1}(y)\,dy$$

от многочлена Лежандра $P_n(x)$ на основном промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Определена производящая функция

$$(1-2xz+z^2)^{k-1/2} = Q_k(x,z) + (-1)^k(2k-1)!!\sum_{n=k}^{\infty} P_{nk}(x)z^{n+k},$$

где $Q_0 = 0$, а при $k > 0$ величина $Q_k$ — многочлен степени $2k-1$ по каждой из переменных $x, z$. Выведено дифференциальное уравнение второго порядка, получен аналог формулы Родрига и определена асимптотика при $n \to \infty$. Доказано представление

$$P_{nk}(x) = (x^2-1)^k f_{nk}(x),$$

если и только если $n \geqslant k$, где $f_{nk}$ — некоторый многочлен, не делящийся на $x-1$. Основной результат состоит в получении точной оценки

$$|P_{nk}(\cos\theta)| < \frac{A_k}{\nu^{k+1/2}} \sin^{k-1/2}\theta, \qquad n \geqslant k.$$

Здесь

$$\nu^2 = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(k^2-\tfrac{1}{4}\right)\left(1-\tfrac{4}{\pi^2}\right), \quad A_k = \sqrt{t_k}J_k(t_k) \sim \mu_1 k^{1/6}, \quad \mu_1 = 0.674885,$$

где $t_k$ — первый максимум функции $\sqrt{t}J_k(t)$ на полуоси $t > 0$, $J_k(t)$ — функция Бесселя. Приведем таблицу первых $A_k$ и разностей $A_k - \mu_1 k^{1/6}$:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_k$ | 0.8250 | 0.8684 | 0.9024 | 0.9305 | 0.9545 | 0.9757 |
| $A_k - \mu_1 k^{1/6}$ | 0.1501 | 0.1109 | 0.0919 | 0.0802 | 0.0720 | 0.0659 |

Библиогр. 7 назв. Табл. 1.

*Ключевые слова*: интегралы от многочлена Лежандра, функции Бесселя, асимптотика, оценка, рекуррентность.

**Введение.** Свойства многочленов Лежандра и их производных изучены практически с исчерпывающей полнотой. Однако в некоторых приложениях (например, при рассмотрении ряда Лапласа по сферическим функциям для ньютоновского потенциала) встречаются повторные интегралы, для которых полином Лежандра служит производной порядка $k \geqslant 1$. В настоящей статье мы выводим свойства указанных интегралов как аналогичные свойствам самих многочленов Лежандра, так и не

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-02-00232-а) и Программы проведения фундаментальных исследований СПбГУ по приоритетным направлениям (грант 6.37.110.2011).

имеющие соответствующих аналогов. Для полноты картины мы приводим не только нетривиальные, но и простые свойства рассматриваемых функций.

**Определение и простейшие свойства.** Пусть $P_n$ — многочлен Лежандра со стандартной нормировкой $P_n(1) = 1$. Определим рекуррентно последовательные интегралы от $P_n$:

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \qquad P_{nk}(x) = \int_{-1}^{x} P_{n,k-1}(y)\,dy, \qquad k \geqslant 1. \tag{1}$$

Тем самым многочлены $P_{nk}$ определены при $k \geqslant 0$.

Обобщением формулы Родрига

$$(2n)!!P_n(x) = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,, \qquad n \geqslant 0,$$

служит ее аналог

$$(2n)!!P_{nk}(x) = \frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\,, \qquad n \geqslant k. \tag{2}$$

Отсюда получаем два следствия. Во-первых, $P_{nk}$ при $n \geqslant k$ — многочлен степени $n+k$, четный при четных $n+k$ и нечетный при нечетных $n+k$. Во-вторых,

$$P_{nk}(x) = (x^2-1)^k f_{nk}(x), \qquad n \geqslant k, \tag{3}$$

где $f_{nk}$ — некоторый многочлен. В частности,

$$\begin{aligned} (2n)!!P_{nn}(x) &= (x^2-1)^n, & f_{nn} &= \frac{1}{(2n)!!}\,, \\ (2n-2)!!P_{n,n-1}(x) &= x(x^2-1)^{n-1}, & f_{n,n-1} &= \frac{x}{(2n-2)!!}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Покажем, что $f_{nk}(x)$ не делится ни на $x-1$, ни на $x+1$. Вычислим

$$f_{nk}(1) = \lim_{x\to 1}\frac{P_{nk}(x)}{(x^2-1)^k} = \lim_{x\to 1}\frac{P_{nk}(x)}{2^k(x-1)^k}\,,$$

применяя $k$ раз правило Лопиталя. В результате

$$f_{nk}(1) = \frac{1}{(2k)!!}\,, \qquad f_{nk}(-1) = \frac{(-1)^{n+k}}{(2k)!!}\,. \tag{5}$$

Второе из равенств (6) доказывается аналогично первому.

Следствием известной формулы [1]

$$(2n+1)P_{n1} = P_{n+1} - P_{n-1}\,, \qquad n \geqslant 1,$$

служит ее аналог

$$(2n+1)P_{nk} = P_{n+1,k-1} - P_{n-1,k-1}\,, \qquad n \geqslant 1, \quad k \geqslant 1. \tag{6}$$

Покажем, что при $k > n$ свойство (4) нарушается. Более того, левая часть (4) не содержит $x^2-1$ множителем.

Непосредственым интегрированием и индукцией по $k$ легко установить, что

$$P_{0k}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}\,, \qquad P_{1k}(x) = \frac{(x+1)^k}{(k+1)!}(x-k),$$

откуда

$$P_{0k}(1) = \frac{2^k}{k!}\,, \qquad P_{1k}(1) = \frac{2^k}{(k+1)!}(1-k).$$

Теперь с помощью соотношения (7), переписанного в форме

$$P_{n+1,k-1}(1) = (2n+1)P_{nk}(1) + P_{n-1,k-1}(1),$$

индукцией по $n$ устанавливается равенство

$$P_{nk}(1) = (-1)^n \frac{2^k}{(n+k)!}(k-1)(k-2)\dots(k-n). \tag{7}$$

Как обычно, при $n=0$ пустое произведение считается единицей. Правая часть (7) отлична от нуля при $k>n$, так что $P_{nk}(x)$ не делится на $x-1$.

Нам понадобится явное выражение для $R_n(x) = P_{n,n+1}(x)$. Используя (7), получим

$$(2n+1)R_n = P_{n+1,n} - R_{n-1}.$$

Подставляя сюда значение $P_{n+1,n}(x)$ из (5), получим рекуррентность

$$R_n = \frac{x(x^2-1)^n}{(2n+1)(2n)!!} - \frac{1}{2n+1}\,R_{n-1}\,,$$

которая легко решается:

$$R_n = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x(x^2-1)^{n-m}}{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n+1-2m)(2n-2m)!!} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}\,R_0\,.$$

Поскольку $R_0 = x+1$,

$$P_{n,n+1}(x) = (-1)^n \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{x(1-x^2)^{n-m}}{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n+1-2m)(2n-2m)!!} + \frac{x+1}{(2n+1)!!}\right]. \tag{8}$$

**Производящая функция.** Семейство многочленов $P_{nk}$ при $n \geqslant k \geqslant 0$ порождается производящей функцией

$$(1-2xz+z^2)^{k-1/2} = Q_k(x,z) + (-1)^k(2k-1)!!\sum_{n=k}^{\infty} P_{nk}(x)z^{n+k}. \tag{9}$$

Здесь $Q_0 = 0$, а при $k>0$ величина $Q_k$ — многочлен степени $2k-1$ по каждой из переменных $x, z$.

При $k=0$ представление (9) многочленов Лежандра стандартно. Действуя по индукции, проинтегрируем (9) по $x$ в пределах от $-1$ до $x$. После элементарных преобразований получим

$$(1-2xz+z^2)^{k+1/2}-(1+z)^{2k+1}=-(2k+1)z\int_{-1}^{x}Q_k(t,z)\,dt+$$
$$+(-1)^{k+1}(2k+1)!!\sum_{n=k}^{\infty}P_{n,k+1}(x)z^{n+k+1}.$$

Мы пришли к равенству (9) с заменой $k$ на $k+1$ и рекуррентности

$$Q_{k+1}(x,z)=(1+z)^{2k+1}+(-1)^{k+1}(2k+1)!!P_{k,k+1}(x)z^{2k+1}-(2k+1)z\int_{-1}^{x}Q_k(t,z)\,dt, \quad (10)$$

где $P_{k,k+1}(x)$ определен формулой (8).

Соотношение (9) доказано.

Левая часть (9) сводится к биному при $x=0$:

$$(1+z^2)^{k-1/2}=1+\frac{2k-1}{2!!}z^2+\frac{(2k-1)(2k-3)}{4!!}z^4+\ldots+\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}z^{2k-2}+$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2k-1)!!(2m-1)!!}{(2k+2m)!!}z^{2k+2m}. \quad (11)$$

Отсюда при $k\geqslant 1$

$$Q_k(0,z)=1+\frac{2k-1}{2!!}z^2+\frac{(2k-1)(2k-3)}{4!!}z^4+\ldots+\frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}z^{2k-2}. \quad (12)$$

Пусть $n\geqslant k$. Сравнение (9) и (12) показывает, что

$$P_{nk}(0)=0 \qquad \text{при нечетном} \quad n-k,$$

а при четном $n-k$

$$P_{nk}(0)=(-1)^{\frac{n+k}{2}}\frac{(n-k-1)!!}{(n+k)!!}\,. \quad (13)$$

Заменяя в (14) по формуле Валлиса отношение двойных факториалов эквивалентной степенной функцией, получим асимптотически (при фиксированном $k$ и $n\to\infty$)

$$P_{nk}(0)\sim(-1)^{\frac{n+k}{2}}\frac{\sqrt{2/\pi}}{n^{k+1/2}}\,. \quad (14)$$

**Дифференциальные уравнения.** Функция $P_{nk}(x)$ при $k=0$ является регулярным решением дифференциального уравнения Лежандра

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0. \quad (15)$$

Легко показать, что и в общем случае $P_{nk}(x)$ будет регулярным решением дифференциального уравнения

$$(1-x^2)y''+2D_kxy'+E_{kn}y=0 \quad (16)$$

при некоторых постоянных $D_k, E_{kn}$. Для $k=0$ это справедливо при $D_0=-1$, $E_{0n}=n(n+1)$. Дифференцируя (18), убеждаемся, что $P_{n,k-1}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-x^2)y''+2(D_k-1)xy'+(E_{kn}+2D_k)\,y=0.$$

Сравнивая с (18), получаем рекуррентности

$$D_k = D_{k-1} + 1, \qquad E_{kn} = E_{k-1,n} - 2D_k. \tag{17}$$

Первое разностное уравнение (19) решается элементарно, после чего легко решается и второе:

$$D_k = k - 1, \qquad E_{kn} = n(n+1) - k(k-1).$$

Итак, дифференциальное уравнение для $P_{nk}(x)$ при $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ имеет вид

$$(1-x^2)y'' + 2(k-1)xy' + (n+k)(n-k+1)y = 0. \tag{18}$$

В большинстве приложений ограничиваются сужением $P_{nk}(x)$ на отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и пользуются заменой переменных $x = \cos\theta$, считая $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Уравнение (18) принимает форму

$$\ddot{y} - (2k-1)\operatorname{ctg}\theta\dot{y} + (n+k)(n-k+1)y = 0, \tag{19}$$

где точки означают дифференцирование по $\theta$.

Ниже нам встретится функция $u(\theta) = (-1)^k \sin^{-k+1/2}\theta P_{nk}(\cos\theta)$. Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + p(\theta)u = 0, \quad p(\theta) = G^2 - \frac{H}{\sin^2\theta}, \quad G = n + \frac{1}{2}, \quad H = k^2 - \frac{1}{4}, \tag{20}$$

не содержит члена с первой производной.

**Асимптотика.** Асимптотика $P_n$ хорошо известна [1]:

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\theta}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{r_0(n,\theta)}{n\sin\theta}\right\}, \tag{21}$$

где фигурирующие здесь и ниже поправочные члены $r_k(n,\theta)$ равномерно ограничены при $n \geqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Она немедленно обобщается на случай произвольного фиксированного $k \geqslant 0$:

$$P_{nk}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^{k-1/2}\theta}{n^{k+1/2}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{r_k(n,\theta)}{n\sin^{k+1}\theta}\right\}. \tag{22}$$

При $k = 0$ формулы (22) и (21) совпадают. При произвольном $k$ справедливость (22) устанавливается индукцией по $k$ с использованием (7).

**Равномерные по $x$ оценки.** Известны равномерные по $x$ оценки многочленов Лежандра и их производных любого порядка [1] на основном отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. В [2, § 4.6] фактически приведена такая оценка и для $P_{n1}$:

$$|P_{n1}(\cos\theta)| < \sqrt{\frac{2}{\pi n^2(n+3/2)}}, \qquad n \geqslant 1. \tag{23}$$

Для оценки $P_{n2}$ воспользуемся соотношением (18) при $k = 2$. Экстремальные на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ значения многочлены $y = P_{n2}$ принимают при $y' = P_{n1} = 0$, так что

$$(n+2)(n-1)\,|P_{n2}(x)| \leqslant \max\left|(1-x^2)P_n(x)\right|.$$

Отсюда с учетом неравенства [2, § 4.6]

$$|P_n(\cos\theta)| < \sqrt{\frac{2}{\pi(n+1/2)\sin\theta}} \tag{24}$$

получаем

$$|P_{n2}(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi(n+1/2)(n-1)^2(n+2)^2}}\,, \qquad n \geqslant 2. \tag{25}$$

Несколько огрубляя оценки, перепишем их в более простом виде:

$$|P_{n1}(x)| < \frac{\sqrt{2/\pi}}{n^{3/2}}, \qquad |P_{n2}(x)| < \frac{\sqrt{2/\pi}}{n^{5/2}}\,, \qquad n \geqslant 1. \tag{26}$$

Второе из соотношений (26) доказано при $n \geqslant 2$. Его справедливость при $n = 1$ устанавливается непосредственно.

В неравенствах (26) *точны как показатель степени убывания левой части с ростом $n$, так и константа* $\sqrt{2/\pi}$. Для доказательства следует в (26) положить $x = 0$ и сравнить с (14).

Как и для рассмотренного случая $k = 2$, обращение к (18) показывает, что

$$\|P_{nk}\| < \frac{1}{(n+k)(n-k+1)}\|P_{n,k-2}\|, \qquad n \geqslant k, \tag{27}$$

где норма означает максимум модуля при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Отсюда при $n \geqslant k$ с учетом (26)

$$\|P_{nk}\| < \frac{\sqrt{2/\pi}}{n^{5/2}}\frac{(n+2)!!(n-k-1)!!}{(n+k)!!(n-3)!!}\,, \qquad \|P_{nk}\| < \frac{\sqrt{2/\pi}}{n^{3/2}}\frac{(n+1)!!(n-k-1)!!}{(n+k)!!(n-2)!!} \tag{28}$$

при четном $k \geqslant 2$ и нечетном $k \geqslant 1$ соответственно.

Пусть $k \geqslant 2$ четно. Вне зависимости от четности $n$ имеем

$$\|P_{nk}\| < \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2/\pi}}{2^{k-2}n^{5/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+k}{2}+1\right)}\,, \qquad n \geqslant k, \tag{29}$$

где использовано

$$m!! = 2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right), \qquad m!! = \frac{2^{(m+1)/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right), \tag{30}$$

при четном и нечетном $m$ соответственно. Применяя формулу Стирлинга, получаем

$$|P_{nk}(x)| \lesssim \frac{\sqrt{2/\pi}}{n^{k+1/2}}\,, \tag{31}$$

где использован символ *асимптотически меньше*. Это значит, что при больших (по сравнению с $k$) $n$ правая часть может быть меньше левой на величину порядка $n^{-k-1/2}$.

Пусть $k \geqslant 1$ нечетно. Вне зависимости от четности $n$ имеем

$$\|P_{nk}\| < \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2/\pi}}{2^{k-1}n^{3/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+k}{2}+1\right)}\,, \qquad n \geqslant k. \tag{32}$$

Применив формулу Стирлинга, придем к той же формуле (31).

Итак, асимптотическая оценка (31) доказана. Ее точность устанавливается сравнением с (14). Естествен вопрос, нельзя ли заменить знак *асимптотически меньше* на *меньше*, как это выполнено для $k = 1, 2$. Ответ отрицателен. Уже при $n = k = 3$ левая часть (31) при $x = 0$, как показывают прямые вычисления, равна $1/48 = 0.0208$, а правая — 0.0171. Но при $n \geqslant 4$, $k = 3$ неравенство (31) выполнено строго, а не только асимптотически. Действительно, при $k = 3$ неравенство (27) принимает вид

$$(n+3)(n-2)|||P_{n3}||| < |||P_{n1}|||,$$

что с учетом (23) влечет (31) при $n \geqslant 4$, $k = 3$.

**Оценки при фиксированном** $x$**.** Наличие $\sin\theta$ в знаменателях поправочных членов (22) делает невозможным модификацию оценки (31) добавлением справа множителя $\sin\theta$ в положительной степени. Но за счет увеличения константы $\sqrt{2/\pi}$ этого можно достигнуть. В [3] это сделано для $k = 1$. Здесь мы рассмотрим случай произвольного $k$.

Пусть $n \geqslant k$. Рассмотрим уравнение (20), ограничиваясь по симметрии отрезком $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

Функция $u$ является единственным решением (20), непрерывным вместе с первой производной на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, вещественно-аналитическим при $0 < \theta \leqslant \pi/2$ и представимым рядом

$$u = \frac{1}{(2k)!!}\theta^{k+1/2}\sum_{m=0}^{\infty} a_m\theta^{2m}, \qquad a_0 = 1. \tag{33}$$

Коэффициент $1/(2k)!!$ получен из условия

$$u = (-1)^k \sin^{-k+1/2}\theta P_{nk}(\cos\theta) = \sin^{k+1/2}\theta f_{nk}(1) + \dots$$

с учетом (4, 6).

По следствию из теоремы Сонина—Пойя [4, § 6.2], [5, § 19] наибольшее значение $M$ модуля $u(\theta)$ на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ достигается в точке $\theta_{nk}$ первого локального максимума:

$$M = u(\theta_{nk}). \tag{34}$$

Сопоставим (20) с уравнением сравнения

$$\ddot{u}_1 + p_1(\theta)u_1 = 0 \tag{35}$$

при

$$p_1(\theta) = \nu^2 - \frac{H}{\theta^2}, \qquad \nu^2 = G^2 - H\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) > 0.$$

Легко показать, что $p_1(\theta) \leqslant p(\theta)$ при $0 < \theta \leqslant \pi/2$, причем $p_1(\pi/2) = p(\pi/2) > 0$. За $u_1(\theta)$ примем решение (35), непрерывное вместе с первой производной на отрезке $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, вещественно-аналитическое при $0 < \theta \leqslant \pi/2$ и представимое при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ в виде

$$u_1 = \frac{1}{(2k)!!}\theta^{k+1/2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m\theta^{2m}, \qquad b_0 = 1. \tag{36}$$

По теореме сравнения Штурма [4, § 6.2], [5, § 20] $u(\theta_{nk}) < u_1(\theta_{nk})$, и тем более

$$M < u_1(\tilde{\theta}_{nk}), \tag{37}$$

где $\tilde{\theta}_{nk}$ — первый локальный максимум функции $u_1(\theta)$.

Легко получить явное выражение для функции $u_1(\theta)$. Подстановка $t = \nu\theta$, $u_1 = \sqrt{t}u_2$ приводит (35) к уравнению Бесселя

$$t^2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + t\frac{du_2}{dt} + (t^2 - k^2)u_2 = 0. \tag{38}$$

Нужное нам решение голоморфно в нуле, поэтому

$$u_2 = cJ_k(t), \qquad u_1 = c\sqrt{t}J_k(t) = \frac{c}{(2k)!!}\, t^{k+1/2}(1 + \ldots).$$

Сравнивая с (36), находим

$$c = \nu^{-k-1/2}.$$

В результате

$$u_1 = \nu^{-k-1/2}\sqrt{t}J_k(t).$$

Отсюда с учетом (37)

$$M < \frac{A_k}{\nu^{k+1/2}}, \qquad A_k = u_3(t_k), \tag{39}$$

где $u_3(t) = \sqrt{t}J_k(t)$, $t_k$ — первый локальный максимум функции $u_3$.

Итак, при $n \geqslant k$ доказана оценка

$$|P_{nk}(\cos\theta)| < \frac{A_k}{\nu^{k+1/2}} \sin^{k-1/2}\theta, \qquad \nu = \sqrt{\left(n + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(k^2 - \tfrac{1}{4}\right)\left(1 - \tfrac{4}{\pi^2}\right)}. \tag{40}$$

Отсюда асимптотически при фиксированном $k$ и $n \to \infty$

$$|P_{nk}(\cos\theta)| \lesssim \frac{A_k}{n^{k+1/2}} \sin^{k-1/2}\theta. \tag{41}$$

**Точность оценок.** Для доказательства точности постоянной $A_k$ в неравенстве (40) определим коэффициенты $a_m$, $b_m$ рядов (33), (36). Подставим (33) в (20), выразив предварительно $\sin^2\theta$ через $\cos 2\theta$ и применив стандартное разложение косинуса

$$4\sin^2\theta = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{2^{2m+1}\theta^{2m}}{(2m)!}.$$

Получим

$$\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{2^{2s+1}}{(2s)!}\theta^{2s}\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(2i + k + \frac{1}{2}\right)\left(2i + k - \frac{1}{2}\right)a_i\theta^{2i+k-3/2} + \right.$$
$$\left. + G^2\sum_{i=0}^{\infty}a_i\theta^{2i+k+1/2}\right] = 4H\sum_{i=0}^{\infty}a_i\theta^{2i+k+1/2}.$$

С учетом значения $H$ приходим к рекуррентности

$$a_m = \left[\frac{(4m+2k-3)(4m+2k-5)}{48m(m+k)} - \frac{G^2}{4m(m+k)}\right] a_{m-1} + \\ + \left[\frac{G^2}{12m(m+k)} - \frac{(4m+2k-7)(4m+2k-9)}{360m(m+k)}\right] a_{m-2} + \ldots, \quad (42)$$

причем опущенные в (42) члены суть линейные комбинации $a_s$ с меньшими индексами, коэффициенты при которых — линейные функции от $G^2$. Из (42) следует, что $a_m$ являются многочленами от $G^2$ степени $m$:

$$a_m = a_{m0} G^{2m} + a_{m1} G^{2m-2} + \ldots. \quad (43)$$

Из (42), (43) получаем рекуррентности

$$a_{m0} = -\frac{1}{4m(m+k)}\, a_{m-1,0}\,, \quad a_{00} = 1, \quad (44)$$

$$a_{m1} = -\frac{1}{4m(m+k)}\, a_{m-1,1} + \frac{(4m+2k-3)(4m+2k-5)}{48m(m+k)}\, a_{m-1,0} + \\ + \frac{1}{12m(m+k)}\, a_{m-2,0}\,, \quad a_{01} = 0. \quad (45)$$

Из (44) вытекает

$$a_{m0} = (-1)^m \frac{k!}{4^m m!(m+k)!}\,. \quad (46)$$

Теперь можно вычислить сумму двух последних слагаемых в (45):

$$a_{m1} = -\frac{1}{4m(m+k)}\, a_{m-1,1} + (-1)^{m-1} \frac{(4k^2-1)k!}{12 \cdot 4^m m!(m+k)!}\,.$$

Полагая

$$a_{m1} = (-1)^m \frac{k!}{4^m m!(m+k)!}\, \tilde{a}_{m1}\,,$$

приходим к соотношению

$$\tilde{a}_{m1} = \tilde{a}_{m-1,1} - \frac{4k^2-1}{12}\,, \qquad \tilde{a}_{01} = 0,$$

откуда

$$\tilde{a}_{m1} = -\frac{4k^2-1}{12}\, m, \qquad a_{m1} = (-1)^{m-1} \frac{m(4k^2-1)k!}{12 \cdot 4^m m!(m+k)!}\,.$$

Окончательно,

$$a_m = (-1)^m \frac{k!}{4^m m!(m+k)!} \left[G^{2m} - \frac{m(4k^2-1)}{12} G^{2m-2} + \ldots\right]. \quad (47)$$

Простое рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда (36)

$$b_m = -\frac{\nu^2}{4m(m+k)}\, b_{m-1}$$

влечет

$$b_m = (-1)^m \frac{\nu^{2m} k!}{4^m m!(m+k)!}\,. \tag{48}$$

Используя ряды (33), (36), вычисляем разность

$$u_1(\theta) - u(\theta) = \frac{t^{k+1/2}}{(2k)!!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m - a_m}{\nu^{2m+k+1/2}}\, t^{2m}. \tag{49}$$

Как и выше, $t = \nu\theta$. Согласно (47), (48)

$$\frac{b_m - a_m}{\nu^{2m+k+1/2}} = \frac{(-1)^m k!}{4^m m!(m+k)!\nu^{k+1/2}} \left[1 - \left(\frac{G}{\nu}\right)^{2m} + \frac{m(4k^2-1)}{12\nu^2}\left(\frac{G}{\nu}\right)^{2m-2} + \ldots\right].$$

Сумма в квадратных скобках содержит конечное число слагаемых, и нас интересуют лишь ограниченные значения $t \leqslant t_k$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} |u(\theta) - u_1(\theta)| = 0 \tag{50}$$

равномерно по $t$, поскольку $\nu \to \infty$, $G \to \infty$, $G/\nu \to 1$ при $n \to \infty$.

Точность константы $A_k$ доказана.

**Свойства последовательности $A_k$.** Согласно вышеизложенному

$$A_k = u_3(t_k), \qquad u_3(x) = \sqrt{x} J_k(x), \tag{51}$$

где $t_k$ — наименьший положительный корень целой функции

$$u_4(x) = 2\sqrt{x} u_3'(x) = J_k(x) + 2xJ_k'(x). \tag{52}$$

По теореме Диксона [7, § 15.23] корни $J_k'(x)$ и $u_4(x)$ чередуются. Очевидно, $t_k > j$, где $j$ — зависящий от $k$ первый положительный корень $J_k'(x)$.

Положим $t_k = j + \tau$. Разлагая $u_4(t_k)$ в ряд Маклорена по $\tau$, получаем

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\tau^s}{s!} \left[(1+2s)J_k^{(s)}(j) + 2jJ_k^{(s+1)}(j)\right] = 0. \tag{53}$$

Дифференциальное уравнение Бесселя (38) позволяет выразить производную любого порядка $J_k^{(s)}(x)$ в виде линейной комбинации $J_k(x)$ и $J_k'(x)$:

$$x^s J_k^{(s)}(x) = K_s J_k(x) + L_s x J_k'(x), \tag{54}$$

где многочлены $K_s(x)$, $L_s(x)$, зависящие также от $k$, определяются рекуррентно:

$$\begin{aligned} K_{s+1} &= -sK_s + (k^2 - x^2)L_s + xK_s', \\ L_{s+1} &= K_s - sL_s + xL_s', \\ K_0 &= 1, \qquad L_0 = 0. \end{aligned}$$

Первая производная исчезает при $x = j$, и (54) влечет

$$j^s J_k^{(s)}(j) = K_s(j) J_k(j). \tag{55}$$

Уравнение (53) принимает вид

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\tau^s}{j^s s!} \left[(1+2s)K_s(j) + 2K_{s+1}(j)\right] = 0.$$

С точностью до второй степени $\tau$ (эта точность даже избыточна)

$$1 - \frac{2(j^2-k^2)}{j}\,\tau - \frac{3j^2+k^2}{2j^2}\,\tau^2 + \ldots = 0. \tag{56}$$

Воспользуемся асимптотическим представлением [7, § 15.83]

$$j = k + \mu k^{1/3} + \mathfrak{r}_1 k^{-1/3}, \qquad \mu = 0.808618. \tag{57}$$

Здесь и ниже $\mathfrak{r}_s$ — ограниченные функции натурального аргумента $k$. Подставляя (57) в (56), приходим к уравнению

$$1 - \left(4\mu k^{1/3} + \mathfrak{r}_2 k^{-1/3}\right)\tau - \left(2 - \mu k^{-2/3} + \mathfrak{r}_3 k^{-4/3}\right)\tau^2 + \ldots = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{1}{4\mu}\,k^{-1/3} + \mathfrak{r}_4 k^{-1}.$$

В результате для $t_k$ приходим к тому же представлению (57) с заменой $\mathfrak{r}_1$ на $\mathfrak{r}_5 = \mathfrak{r}_1 + 1/(4\mu)$.

Для определения $A_k$ достаточно обратиться к формуле Никольсона—Ватсона [7, § 8.43, формула (5)]. Для ее применения следует представить аргумент $t_k$ функции Бесселя в виде $t_k = k/\cos\beta$. С учетом (57)

$$\cos\beta = 1 - \mu k^{-2/3} + \mathfrak{r}_6 k^{-4/3}, \quad \beta = \sqrt{2\mu}k^{-1/3}\left(1 + \mathfrak{r}_7 k^{-2/3}\right),$$
$$\operatorname{tg}\beta - \beta - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\beta = -\tfrac{1}{5}\beta^5 + \ldots = -\tfrac{1}{5}(2\mu)^{5/2}k^{-5/3}\left(1 + \mathfrak{r}_8 k^{-2/3}\right).$$

В результате формула Никольсона—Ватсона показывает, что

$$J_k(t_k) = \mu_1 k^{-1/3} + \mathfrak{r}_9 k^{-1}. \tag{58}$$

Здесь

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{2\mu}}{3}\left[J_{1/3}(\xi) + J_{-1/3}(\xi)\right] = 0.674885,$$

где

$$\xi = \tfrac{1}{3}(2\mu)^{3/2} = 0.685550.$$

Окончательно,

$$A_k = \mu_1 k^{1/6} + \mathfrak{r}_{10} k^{-1}. \tag{59}$$

Прямое вычисление $t_k$, $A_k$ при фиксированном $k$ не представляет трудностей. Мы вычислили эти величины вплоть до $k = 100$. Константы $A_k$, как и должно быть, возрастают и превосходят фигурирующую в асимптотической формуле (31) постоянную $\sqrt{2/\pi}$. Разность $A_k - \mu_1 k^{1/6}$ положительна и стремится к нулю, хотя и медленно. Сходимость улучшится более чем на десятичный порядок при сдвиге аргумента в формуле (59) на 3.449, что равносильно частичному учету влияния поправочного члена в (59).

Приведем таблицу значений $t_k$, $A_k$, $\mu_1 k^{1/6}$, $\mu_1(k+3.449)^{1/6}$, $A_k - \mu_1 k^{1/6}$, $A_k - \mu_1(k+3.449)^{1/6}$ для $k = 1, \dots, 12$:

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_k$ | 2.1659 | 3.3108 | 4.4241 | 5.5192 | 6.6022 | 7.6764 |
| $A_k$ | 0.8250 | 0.8684 | 0.9024 | 0.9305 | 0.9545 | 0.9757 |
| $\mu_1 k^{1/6}$ | 0.6749 | 0.7575 | 0.8105 | 0.8503 | 0.8825 | 0.9097 |
| $\mu_1(k+3.449)^{1/6}$ | 0.8655 | 0.8953 | 0.9208 | 0.9431 | 0.9632 | 0.9813 |
| $A_k - \mu_1 k^{1/6}$ | 0.1501 | 0.1109 | 0.0919 | 0.0802 | 0.0720 | 0.0659 |
| $A_k - \mu_1(k+3.449)^{1/6}$ | −0.0405 | −0.0268 | −0.0184 | −0.0127 | −0.0086 | −0.0056 |

| $k$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_k$ | 8.7438 | 9.8059 | 10.8636 | 11.9176 | 12.9685 | 14.0166 |
| $A_k$ | 0.9946 | 1.0117 | 1.0274 | 1.0419 | 1.0555 | 1.0681 |
| $\mu_1 k^{1/6}$ | 0.9334 | 0.9544 | 0.9734 | 0.9906 | 1.0065 | 1.0212 |
| $\mu_1(k+3.449)^{1/6}$ | 0.9979 | 1.0132 | 1.0274 | 1.0407 | 1.0533 | 1.0651 |
| $A_k - \mu_1 k^{1/6}$ | 0.0612 | 0.0573 | 0.0541 | 0.0513 | 0.0490 | 0.0469 |
| $A_k - \mu_1(k+3.449)^{1/6}$ | −0.0033 | −0.0015 | 0.0000 | 0.0012 | 0.0022 | 0.0030 |

Заметим, что разность $A_k - \mu_1(k+3.449)^{1/6}$ монотонно уменьшается, начиная с $k = 52$.

**Литература**

1. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.

2. *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.

3. *Антонов В. А., Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* Об оценке производой многочлена Лежандра // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 4. С. 3–9.

4. *Адрианова Л. Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1992. 240 с.

5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: УРСС, 2003. 352 с.

6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. СПб.: Лань, 2009. 800 с.

7. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 797 с.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

Сведения об авторах

*Холшевников Константин Владиславович* — доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: kvk@astro.spbu.ru

*Шайдулин Вахит Шамильевич* — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник; e-mail: shvak@yandex.ru

## ON PROPERTIES OF THE INTEGRALS OF LEGENDRE POLYNOMIAL

*Konstantin V. Kholshevnikov*[1,2], *Vakhit Sh. Shaidulin*[1,3]

[1] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru, shvak@yandex.ru

[2] Institute of Applied Astronomy RAS, Kutuzova nab., 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru

[3] Pulkovo Observatory, Pulkovskoe chaussee, 65, St. Petersburg, 196140, Russian Federation; peter.tovstik@mail.ru, shvak@yandex.ru

Properties of the integrals of Legendre polynomial $P_n(x)$

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \quad P_{nk}(x) = \int_{-1}^{x} P_{n,k-1}(y)\,dy$$

on the main segment $-1 \le x \le 1$ are exposed. One defines the generating function

$$(1 - 2xz + z^2)^{k-1/2} = Q_k(x,z) + (-1)^k (2k-1)!! \sum_{n=k}^{\infty} P_{nk}(x) z^{n+k},$$

where $Q_k$ is a polynomial of degree $2k-1$ with respect to each variable $x, z$ if $k > 0$, and $Q_0 = 0$. A second-order differential equation is determined, an analogue of Rodrigues formula is obtained, and asymptotics when $n \to \infty$ is deduced. The representation

$$P_{nk}(x) = (x^2 - 1)^k f_{nk}(x)$$

is valid if and only if $n \ge k$; $f_{nk}$ being a certain polynomial not divisible by $x - 1$. As the main result we obtain exact estimate

$$|P_{nk}(\cos\theta)| < \frac{A_k}{\nu^{k+1/2}} \sin^{k-1/2}\theta, \quad n \ge k.$$

Here

$$\nu^2 = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(k^2 - \tfrac{1}{4}\right)\left(1 - \tfrac{4}{\pi^2}\right), \quad A_k = \sqrt{t_k}\, J_k(t_k) \sim \mu_1 k^{1/6}, \quad \mu_1 = 0.674885,$$

and $J_k(t)$, $t_k$ are the Bessel function, and the first maximum of $\sqrt{t} J_k(t)$ on the semi-axis $t > 0$, respectively. Below, we give a table of the values of $t_k$, $A_k$, $\mu_1 k^{1/6}$, $\mu_1(k + 3.449)^{1/6}$, $A_k\breve{\ }\mu_1 k^{1/6}$, and $A_k\breve{\ }\mu_1(k + 3.449)^{1/6}$ at $k = 1, \ldots, 12$. Note that the difference $A_k\breve{\ }\mu_1(k+3.449)^{1/6}$ monotonically decreases beginning with $k = 52$. Refs 7. Tables 1.

*Keywords*: integrals of Legendre polynomial, Bessel functions, asymptotics, estimate, recurrence.