УДК 519.632.4 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АПОСТЕРИОРНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ*

М. А. Чурилова

С.-Петербургский государственный политехнический университет,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Рассматривается задача с условием типа Дирихле на границе:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) + \rho^2 u = f & \text{в } \Omega, \\ u = u_0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где Ω — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$, непрерывной по Липшицу, ρ^2 — коэффициент реакции, правая часть $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, граничное условие понимается в смысле оператора следа. Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ симметричная, ее коэффициенты могут терпеть разрыв в рассматриваемой области. Также предполагается, что существуют положительные константы α_1 и α_2, такие что

$$\alpha_1|\eta|^2 \leqslant A\eta\cdot\eta \leqslant \alpha_2|\eta|^2, \quad \forall\eta\in\mathbb{R}^2.$$

Функциональные мажоранты оценивают энергетическую норму погрешности

$$|[u-v]|^2 := |||\nabla(u-v)|||^2 + \|\rho(u-v)\|^2,$$

где

$$|||\nabla(u-v)|||^2 = \int\limits_\Omega A\nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v)\,dx,$$

а $\|\rho(u-v)\|$ — стандартная норма в пространстве $L^2(\Omega)$. Приближенное решение задачи $v \in u_0 + V_0$, где $V_0 = \mathring{\mathrm{W}}_2^1(\Omega)$ — подпространство функций из пространства Соболева $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$, обращающихся в ноль на границе области в смысле оператора следа.

Рассматриваемая комбинированная оценка вычисляется по формуле

$$|[u-v]|^2 \leqslant M_3^2(v,y,\beta) = (1+\beta)|||A\nabla v - y|||_*^2 + \int\limits_\Omega \frac{\mathbb{C}^2(1+\beta)}{\mathbb{C}^2\rho^2(1+\beta)+\beta}\, r_\Omega^2(v,y)\,dx,$$

и справедлива для любого $y \in Y := \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})$ и $\beta > 0$, где

$$\mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div}) = \Big\{q\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2)\,\big|\,\mathrm{div}q\in L^2(\Omega)\Big\}.$$

За $r_\Omega(v,y)$ обозначено выражение $r_\Omega(v,y) = f - \rho^2 v + \mathrm{div}y$, норма

$$|||y|||_*^2 = \int\limits_\Omega A^{-1}y\cdot y\,dx.$$

Константа $\mathbb{C}$ представляет собой постоянную в известном неравенстве

$$\|w\| \leqslant \mathbb{C}|||\nabla w|||, \quad \forall w\in V_0$$

и может быть оценена с помощью константы из неравенства Фридрихса.

В статье доказаны основные вычислительные свойства комбинированной функциональной апостериорной оценки $M_3^2(v,y,\beta)$. Доказана сходимость последовательности оценок, вычисленных на последовательности конечномерных подпространств, к энергетической норме погрешности. Обоснован выбор индикатора погрешности, необходимого для реализации адаптивных алгоритмов. Библиогр. 10 назв.

Ключевые слова: функциональные апостериорные оценки, стационарное уравнение реакции-диффузии, адаптивные алгоритмы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00531-а).

Введение. На рубеже XX–XXI веков сформировалось отдельное направление исследований, ориентированное на получение явно вычисляемых глобальных оценок погрешности приближенных решений и на анализ локального распределения ошибки по расчетной области. Эти данные существенны при построении адаптивных алгоритмов в методе конечных элементов. Хотя исследования ведутся достаточно интенсивно, теоретическое обоснование большинства разработанных за это время подходов проведено в предположениях об особых свойствах приближенного решения (см., например, [1–3] и цитируемую там литературу).

В данной работе исследуется более универсальный функциональный подход, который возник в середине 1990-х годов. Он позволяет вычислять гарантированную оценку энергетической нормы погрешности для широкого круга краевых задач (см. [2] и [4]). Подход основывается, в частности, на преобразовании интегральных тождеств, лежащих в основе обобщенной постановки задачи. Вычисляемая мажоранта погрешности является функционалом, зависящим от приближенного решения задачи, исходных данных (геометрия области, правая часть, коэффициенты и т. п.) и свободных переменных, правильный выбор которых позволяет повысить качество оценки. Функциональная оценка применима к произвольным приближенным решениям; единственным требованием является конформность аппроксимации.

В данной работе подробно рассматриваются функциональные апостериорные оценки для стационарной задачи реакции-диффузии, полученные в работе [5]. Доказываются вычислительные свойства наиболее универсальной комбинированной оценки, обосновывается выбор индикатора погрешности. Теоретические результаты хорошо согласуются с численными экспериментами, в том числе для задач с разрывом первого рода в коэффициентах уравнения, опубликованных в статье [6].

1. Функциональные апостериорные оценки для стационарной задачи реакции-диффузии. Рассмотрим задачу с условием типа Дирихле на границе:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + \rho^2 u = f & \text{в } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\quad u = u_0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$, непрерывной по Липшицу, ρ^2 — коэффициент реакции, правая часть $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$, граничное условие понимается в смысле оператора следа. Пространство Лебега $L^2(\Omega)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом в области Ω. Матрица $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ симметричная, ее коэффициенты могут терпеть разрыв в рассматриваемой области. Также предполагается, что существуют положительные константы α_1 и α_2, такие что

$$\alpha_1|\eta|^2 \leqslant A\eta\cdot\eta \leqslant \alpha_2|\eta|^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Обобщенное решение задачи $u \in V = u_0 + V_0$ определяется интегральным тождеством

$$\int\limits_\Omega (A\nabla u \cdot \nabla w + \rho^2 u w)\, dx = \int\limits_\Omega f w\, dx, \quad \forall w \in V_0, \tag{2}$$

где $V_0 = \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(\Omega)$ — подпространство функций из пространства Соболева $\mathrm{W}_2^1(\Omega)$, обращающихся в ноль на границе области в смысле оператора следа. Согласно теореме Лакса—Мильграма обобщенное решение u задачи (2) существует и единственно.

Исследуемые функциональные мажоранты энергетической нормы погрешности приближенного решения для задачи (2) были получены в работе [5] и подробно описаны в монографии [2]. Мажоранты оценивают энергетическую норму погрешности

$$|[u-v]|^2 := |||\nabla(u-v)|||^2 + \|\rho(u-v)\|^2,$$

где

$$|||\nabla(u-v)|||^2 = \int\limits_{\Omega} A\nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v)\,dx,$$

а $\|\rho(u-v)\|$ — стандартная норма в пространстве $L^2(\Omega)$. Приближенное решение задачи v может быть получено любым способом, обеспечивающим конформность, т. е. принадлежность $v \in u_0 + V_0$. Имеются две оценки

$$|[u-v]|^2 \leqslant M_1^2(v,y) = (1+\beta)|||A\nabla v - y|||_*^2 + (1+\frac{1}{\beta})\mathbb{C}^2\|r_\Omega(v,y)\|^2, \tag{3}$$

$$|[u-v]|^2 \leqslant M_2^2(v,y) = |||A\nabla v - y|||_*^2 + \left\|\frac{1}{\rho}r_\Omega(v,y)\right\|^2, \tag{4}$$

справедливые для любого $y \in Y := \mathrm{H}(\Omega, \mathrm{div})$ и $\beta > 0$, где

$$\mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div}) = \left\{q \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^2)\,\middle|\,\mathrm{div}q \in L^2(\Omega)\right\}.$$

За $r_\Omega(v,y)$ обозначено выражение $r_\Omega(v,y) = f - \rho^2 v + \mathrm{div}y$, норма

$$|||y|||_*^2 = \int\limits_{\Omega} A^{-1}y\cdot y\,dx.$$

Пространство $\mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})$ — гильбертово со скалярным произведением, порождающим норму вида

$$\|y\|_{\mathrm{div}} = \left(\|y\|^2 + \|\mathrm{div}y\|^2\right)^{1/2},$$

а константа $\mathbb{C}$ представляет собой постоянную в известном неравенстве

$$\|w\| \leqslant \mathbb{C}|||\nabla w|||, \quad \forall w \in V_0,$$

и может быть оценена с помощью константы из неравенства Фридрихса. Мажоранта M_2 также была получена в [7] с помощью вариационного подхода. Если взять в качестве свободного поля y элемент $p := A\nabla u$, то мы получим равенство

$$M_2^2(v, A\nabla u) = |[u-v]|^2,$$

т. е. оценка является точной. Оценка (3), напротив, имеет «зазор» между левой и правой частью. Если коэффициент реакции мал, то в M_2 при втором слагаемом стоит большой множитель, а значит, оценка будет чувствительна к величине невязки $r_\Omega(v,y)$. Мажоранта M_1, в свою очередь, к величине ρ не чувствительна. Таким образом, обе мажоранты имеют свои преимущества и недостатки. В связи с этим в работе [5] была получена третья оценка, сочетающая в себе положительные качества первых двух:

$$|[u-v]|^2 \leqslant M_3^2(v,y,\beta) = (1+\beta)|||A\nabla v - y|||_*^2 + \int\limits_{\Omega}\frac{\mathbb{C}^2(1+\beta)}{\mathbb{C}^2\rho^2(1+\beta)+\beta}\,r_\Omega^2(v,y)\,dx. \tag{5}$$

Заметим, что

$$|[u-v]|^2 \leqslant \inf_{\substack{y\in \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})\\ \beta>0}} M_3^2(v,y,\beta) \leqslant \inf_{\beta>0} M_3^2(v,A\nabla u,\beta) = |[u-v]|^2,$$

т. е. у оценки (5) также нет «зазора». Вдобавок мажоранта $M_3^2(v,y,\beta)$ не чувствительна к малым значениям параметра реакции ρ. При $\rho=0$ оценка (5) превращается в функциональную оценку для уравнения диффузии, полученную в [7].

2. Свойства комбинированной оценки. Докажем ряд утверждений относительно вычислительных свойств комбинированной мажоранты $M_3^2(v,y,\beta)$, предполагая, что для коэффициента реакции справедлива двусторонняя оценка

$$0<\rho_1 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_2, \quad \forall x\in\Omega.$$

Доказательства основаны на подходах, использованных в [2], [8] и [9] для уравнения Пуассона.

Теорема 1 *Если последовательность конечномерных подпространств* $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *предельно плотна в* Y, *то*

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\inf_{\substack{y_k\in Y_k\\ \beta>0}} M_3^2(v,y_k,\beta)\right\} = |[u-v]|^2.$$

Доказательство. По определению предельной плотности

$$\forall\varepsilon>0 \text{ существует } k_\varepsilon>0 \ :\ \forall k>k_\varepsilon \text{ найдется } p_k\in Y_k \text{ такое, что } \|p-p_k\|_{\mathrm{div}} \leqslant \varepsilon.$$

Подставим в мажоранту $y_k=p_k$ и получим

$$\inf_{\substack{y_k\in Y_k\\ \beta>0}} M_3^2(v,y_k,\beta) \leqslant M_3^2(v,p_k,\varepsilon) =$$

$$= (1+\varepsilon)|||A\nabla v - p_k|||_*^2 + \int\limits_\Omega \frac{\mathbb{C}^2(1+\varepsilon)}{\mathbb{C}^2\rho^2(1+\varepsilon)+\varepsilon}\, r_\Omega^2(v,p_k)\,dx. \qquad (6)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (6). Из неравенства треугольника следует, что

$$|||A\nabla v-p_k|||_*^2 \leqslant |||\nabla(u-v)|||^2 + \left(\frac{1}{c_1^2}\varepsilon + \frac{2}{c_1}|||\nabla(u-v)|||\right)\varepsilon = |||\nabla(u-v)|||^2+\mu\varepsilon, \quad (7)$$

где

$$\mu = \left(\frac{1}{c_1^2}\varepsilon + \frac{2}{c_1}|||\nabla(u-v)|||\right).$$

Для второго слагаемого из правой части (6) имеем

$$\int\limits_\Omega \frac{\mathbb{C}^2(1+\varepsilon)}{\mathbb{C}^2\rho^2(1+\varepsilon)+\varepsilon}\left(-\mathrm{div}p+\rho^2u-\rho^2v+\mathrm{div}p_k\right)^2\,dx \leqslant \|\rho(u-v)\|^2 + \frac{1}{\rho_1^2}\varepsilon^2 + 2\|u-v\|\varepsilon. \qquad (8)$$

Объединяя (7) и (8),

$$M_3^2(v,p_k,\varepsilon) \leqslant (1+\varepsilon)\left(|||\nabla(u-v)|||^2+\mu\varepsilon\right)+\|\rho(u-v)\|^2+\frac{\varepsilon^2}{\rho_1^2}+2\varepsilon\|u-v\| = |[u-v]|^2+O(\varepsilon),$$

получаем двустороннюю оценку

$$|[u-v]|^2 \leqslant \inf_{\substack{y_k\in Y_k\\ \beta>0}} M_3^2(v,y_k,\beta) \leqslant |[u-v]|^2+O(\varepsilon),$$

что доказывает утверждение. □

Рассмотрим величину

$$M_{3k}^2 = \inf_{\substack{y_k\in Y_k\\ \beta>0}} M_3^2(v,y_k,\beta) \text{ при } k=1,2,\ldots$$

Из теоремы 1 следует, что последовательность мажорант M_{3k}^2 сходится к квадрату энергетической нормы погрешности. Поскольку при $y = A\nabla u$ и $\beta = 0$, оценка (5) превращается в равенство; докажем, что при вычислении мажоранты на последовательности конечномерных подпространств свободная переменная y стремится к $A\nabla u$. Для доказательства используется лемма 1, а также вариационная постановка задачи (2) и двойственной к ней, а именно

$$\text{Задача } \mathcal{P}: \quad \text{найти элемент } u\in V, \text{ такой что } J(u)=\inf_{v\in V} J(v), \tag{9}$$

где

$$J(v)=\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}A\nabla v\cdot\nabla v+\frac{1}{2}\rho^2v^2-fv\right)dx.$$

$$\text{Задача } \mathcal{P}^*: \quad \text{найти элемент } p\in \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div}), \text{ такой что } I^*(p)=\sup_{q\in \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})} I^*(q), \tag{10}$$

где

$$I^*(q)=\int\limits_\Omega \left(-\frac{1}{2}A^{-1}q\cdot q+q\cdot\nabla u_0-\frac{1}{2\rho^2}(\mathrm{div}q+f)^2+\mathrm{div}q\, u_0\right)dx.$$

Известно, что решения задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ существуют (см. [10]). Задачи (9)–(10) можно переписать в виде

$$\text{Задача } \mathcal{P}: \quad \text{найти элемент } u\in V, \text{ такой что } J(u)=\inf_{v\in V}\sup_{q\in \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})} L(v,q); \tag{11}$$

$$\text{Задача } \mathcal{P}^*: \quad \text{найти элемент } p\in \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div}), \text{ такой что } I^*(p)=\sup_{q\in \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})}\inf_{v\in V} L(v,q), \tag{12}$$

где Лагранжиан

$$L(v,q)=-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega A^{-1}q\cdot q\,dx+\int\limits_\Omega q\cdot\nabla v\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \rho^2v^2\,dx-\int\limits_\Omega fv\,dx.$$

Из постановки (11) и (12) следует, что $J(u)\geqslant I^*(p)$. Заметим, что

$$I^*(p)\geqslant I^*(A\nabla u)=J(u),$$

а следовательно, $J(u)=I^*(p)$ и $p=A\nabla u$.

Лемма 1 *Пусть* y_β *минимизирует мажоранту* $M_3^2(v,y,\beta)$, $v \in V$ *и* $\beta > 0$, *тогда*

$$|||y_\beta - p|||_* \leqslant C\beta, \quad \|\mathrm{div}(y_\beta - p)\| \leqslant C\beta.$$

Доказательство. Для любого $v \in V$ и $\beta > 0$ мажоранта $M_3^2(v,y,\beta)$ — непрерывный, выпуклый и коэрцетивный в $\mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})$ функционал, следовательно существует единственный минимайзер y_β, удовлетворяющий уравнению Эйлера—Лагранжа

$$(1+\beta)\int\limits_\Omega (A^{-1}y_\beta - \nabla v)\cdot z\,dx + \int\limits_\Omega \tilde{\mathbb{C}}(\rho,\beta)(\mathrm{div}y_\beta + f - \rho^2 v)\mathrm{div}z\,dx = 0, \quad \forall z \in \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div}), \tag{13}$$

где

$$\tilde{\mathbb{C}}(\rho,\beta) = \frac{\mathbb{C}^2(1+\beta)}{\mathbb{C}^2\rho^2(1+\beta)+\beta}.$$

Можно показать, что для любого $v \in V$

$$J(v) - J(u) = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}A\nabla v\cdot\nabla v + \frac{1}{2}\rho^2 v^2 - fv\right)dx -$$
$$- \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}A\nabla u\cdot\nabla u + \frac{1}{2}\rho^2 u^2 - fu\right)dx = \frac{1}{2}|[u-v]|^2.$$

Распишем разность:

$$J(v) - J(u) = J(v) - I^*(p) = J(v) - \sup_{q\in\mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})} I^*(q) = \inf_{q\in\mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})}(J(v) - I^*(q)),$$

$$J(v) - I^*(q) = \frac{1}{2}\left(|||\nabla v - A^{-1}q|||^2 + \left\|\frac{1}{\rho}(\mathrm{div}q + f - \rho^2 v)\right\|^2\right).$$

Таким образом,

$$|[u-v]|^2 = |||\nabla(u-v)|||^2 + \|\rho(u-v)\|^2 =$$
$$= \inf_{q\in\mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div})}\left(|||\nabla v - A^{-1}q|||^2 + \left\|\frac{1}{\rho^2}(\mathrm{div}q + f - \rho^2 v)\right\|^2\right),$$

т. е. $q = p$ минимизирует функционал

$$F(q) = |||\nabla v - A^{-1}q|||^2 + \left\|\frac{1}{\rho^2}(\mathrm{div}q + f - \rho^2 v)\right\|^2.$$

Запишем уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала F:

$$\int\limits_\Omega (A^{-1}p - \nabla v)\cdot q\,dx + \int\limits_\Omega (\mathrm{div}p + f - \rho^2 v)\frac{1}{\rho^2}\mathrm{div}q\,dx = 0, \quad \forall q \in \mathrm{H}(\Omega,\mathrm{div}). \tag{14}$$

Вычтем из (13) выражение (14), умноженное на $(1+\beta)$, и положим $q = y_\beta - p$. В результате получим равенство

$$(1+\beta)|||y_\beta - p|||_*^2 + \left\| \frac{1}{\rho} \mathrm{div}(y_\beta - p) \right\|^2 =$$

$$= \int\limits_\Omega \frac{\beta}{\rho^2(\mathbb{C}^2\rho^2(1+\beta)+\beta)} \big(\mathrm{div}(y_\beta - p)\cdot \mathrm{div}(y_\beta - p) + (f - \rho^2 v + \mathrm{div} p)\mathrm{div}(y_\beta - p)\big)\, dx.$$

Оценим правую часть с помощью неравенства Гёльдера:

$$(1+\beta)|||y_\beta - p|||_*^2 + \left\| \frac{1}{\rho} \mathrm{div}(y_\beta - p) \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta}{\mathbb{C}^2\rho_1^2(1+\beta)+\beta} \left(\left\| \frac{1}{\rho} \mathrm{div}(y_\beta - p) \right\|^2 + \|\rho(u-v)\| \left\| \frac{1}{\rho} \mathrm{div}(y_\beta - p) \right\| \right).$$

Так как $\beta \to 0$ и $\beta > 0$, можно считать $\beta < (\rho_1^2\mathbb{C}^2)/2$, а следовательно

$$\left\| \frac{1}{\rho} \mathrm{div}(y_\beta - p) \right\| \leqslant \frac{\beta}{\rho_1^2\mathbb{C}^2} \left(\left\| \frac{1}{\rho} \mathrm{div}(y_\beta - p) \right\| + \|\rho(u-v)\| \right) \leqslant \frac{2\|\rho(u-v)\|}{\rho_1^2\mathbb{C}^2}\beta.$$

С помощью последнего неравенства получаем

$$|||y_\beta - p|||_*^2 \leqslant \frac{2\|\rho(u-v)\|}{\rho_1^4\mathbb{C}^4} \left(1 + \|\rho(u-v)\|\right)\beta^2. \quad \Box$$

Докажем теперь, что $y \to p = A\nabla u$ в пространстве $Y = \mathrm{H}(\Omega, \mathrm{div})$.

Теорема 2 *Пусть последовательность конечномерных подпространств* $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ *предельно плотна в* Y. *Имеется последовательность пар* (β_k, y_k), *минимизирующих* $M_3^2(v, y, \beta)$ *на* $\mathbb{R}^+ \times Y_k$, *и* $\beta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, *тогда* $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A\nabla u$ *в* Y.

Доказательство. Обозначим $M_{3k}^2(v) = M_3^2(v, y_k, \beta_k)$. Из теоремы 1 следует ограниченность последовательности $\left\{M_{3k}^2(v)\right\}$, поэтому

$$\|y_k\| \leqslant C, \quad \|\mathrm{div} y_k\| \leqslant C, \text{ и } \|y_k\|_{\mathrm{div}} \leqslant C,$$

где за C обозначена некая положительная константа. Выделим из y_k слабосходящуюся подпоследовательность

$$y_k \rightharpoonup \bar{y} \text{ в } Y \quad \text{при } k \to \infty.$$

Оценим энергетическую норму:

$$|[u-v]|^2 = |||\nabla(u-v)|||^2 + \|\rho(u-v)\|^2 = \lim_{k\to\infty} M_{3k}^2 \geqslant$$

$$\geqslant |||A\nabla v|||_*^2 - 2\int\limits_\Omega \nabla v \cdot \bar{y}\, dx + |||\bar{y}|||_*^2 + \|\rho v\|^2 + \left\| \frac{1}{\rho}(\mathrm{div}\bar{y} + f) \right\|^2 - 2\int\limits_\Omega v(f + \mathrm{div}\bar{y})\, dx. \tag{15}$$

Неравенство (15) преобразуется в

$$|||A\nabla u|||_*^2 - 2\int\limits_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int\limits_\Omega \rho^2 u^2\,dx - 2\int\limits_\Omega \rho^2 uv\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \left\|\frac{1}{\rho}(\mathrm{div}\bar{y}+f)\right\|^2 - 2\int\limits_\Omega fv\,dx + |||\bar{y}|||_*^2 - 2\int\limits_\Omega (\nabla v\cdot\bar{y} + \mathrm{div}\bar{y}\,v)\,dx.$$

Подставим $A\nabla u = p$ и $\rho u = (\mathrm{div}p + f)/\rho$, так как для $(v-u_0)\in V_0$ верно равенство

$$\int\limits_\Omega (\nabla v\cdot\bar{y} + \mathrm{div}\bar{y}\,v)\,dx = \int\limits_\Omega (\nabla u_0\cdot\bar{y} + \mathrm{div}\bar{y}\,u_0)\,dx;$$

получаем

$$-\frac{1}{2}|||p|||_*^2 - \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\rho}(\mathrm{div}p+f)\right\|^2 + \int\limits_\Omega (\nabla u_0\cdot p + \mathrm{div}p\,u_0), dx \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{2}|||\bar{y}|||_*^2 - \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{\rho}(\mathrm{div}\bar{y}+f)\right\|^2 + \int\limits_\Omega (\nabla u_0\cdot\bar{y} + \mathrm{div}\bar{y}\,u_0)\,dx,$$

т. е.

$$I^*(p) \leqslant I^*(\bar{y}).$$

Так как решение задачи $\mathcal{P}^*$ единственно, $\bar{y} = p$. $\square$

3. Индикация погрешности. Для реализации алгоритма адаптации расчетной сетки необходим индикатор погрешности — числовая характеристика, отнесенная к элементам разбиения, исходя из которой будет производится отбор элементов для измельчения. Построим индикатор погрешности, основанный на мажоранте $M_3^2(v,y,\beta)$. Ее можно разбить на два слагаемых: $M_3^2(v,y,\beta) = m_{3i}^2 + m_{3r}^2$, где

$$m_{3i}^2(y) = |||A\nabla v - y|||_*^2 + \int\limits_\Omega \frac{1}{\rho^2} r_\Omega^2(v,y)\,dx,$$

$$m_{3r}^2(y,\beta) = \beta\left(|||A\nabla v - y|||_*^2 - \int\limits_\Omega \frac{1}{\rho^2(\mathbb{C}^2\rho^2(1+\beta)+\beta)} r_\Omega^2(v,y)\,dx\right).$$

В предположениях теоремы 2

$$m_{3i}^2(y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} |[u-v]|^2, \quad m_{3r}^2(y_k,\beta_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

поэтому в качестве индикатора погрешности разумно использовать первое слагаемое. Обозначим за τ его подынтегральное выражение:

$$\tau(x) = A^{-1}\left(A\nabla v(x) - y(x)\right)\cdot\left(A\nabla v(x) - y(x)\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{div}y(x) + f(x) - \rho^2(x)v(x)\right)^2,$$

а за $\tau_k(x)$ функцию τ при $y = y_k$. За $\nu(x)$ обозначим подынтегральное выражение энергетической нормы ошибки, а именно

$$\nu(x) = A\nabla(u(x)-v(x))\cdot\nabla(u(x)-v(x)) + \rho^2(u(x)-v(x))^2.$$

Для заданных τ и ν и любого положительного δ определим множество

$$\Omega_\delta(\tau) = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; |\tau(x) - \nu(x)| \geqslant \delta \right\}.$$

Теорема 3 *В предположениях теоремы 2 для меры Лебега данного множества имеем*

$$\mathrm{meas}(\Omega_\delta(\tau_k)) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Доказательство. Представим разность следующим образом:

$$\tau_k(x) - \nu(x) = A^{-1}y_k \cdot y_k - 2\nabla v \cdot y_k + A\nabla v \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho^2}(\mathrm{div} y_k + f - \rho^2 v)^2 - A\nabla u \cdot \nabla u +$$
$$+ 2A\nabla u \cdot \nabla v - A\nabla v \cdot \nabla v - \rho^2(u-v)^2 = A^{-1}y_k \cdot y_k - A^{-1}p \cdot p + 2(p - y_k)\cdot \nabla v +$$
$$+ \frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{div}(y_k - p) + \rho^2(u-v)\right)^2 - \rho^2(u-v)^2 = A^{-1}(y_k - p)\cdot(y_k - p) + 2A^{-1}p\cdot(y_k - p) +$$
$$+ 2(p - y_k)\cdot\nabla v + \frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{div}(y_k - p)\right)^2 + 2\mathrm{div}(y_k - p)(u - v) =$$
$$= A^{-1}(y_k - p)\cdot(y_k - p) + 2(y_k - p)\cdot\nabla(u - v) + 2\mathrm{div}(y_k - p)(u - v) + \frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{div}(y_k - p)\right)^2,$$

и оценим по модулю:

$$|\tau_k(x) - \nu(x)| \leqslant |A^{-1}(y_k - p)\cdot(y_k - p)| + 2|(y_k - p)\times$$
$$\times \nabla(u - v)| + 2|\mathrm{div}(y_k - p)||u - v| + \frac{1}{\rho^2}\left(\mathrm{div}(y_k - p)\right)^2.$$

По лемме 1

$$|||y_k - p|||_* \leqslant C\beta_k, \quad \|\mathrm{div}(y_k - p)\| \leqslant C\beta_k,$$

следовательно

$$\int_\Omega |\tau_k(x) - \nu(x)|\, dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Таким образом,

$$\int_\Omega |\tau_k(x) - \nu(x)|\, dx \geqslant \int_{\Omega_\delta} |\tau_k(x) - \nu(x)|\, dx \geqslant \delta\, \mathrm{meas}(\Omega_\delta(\tau_k)),$$

и $\mathrm{meas}(\Omega_\delta(\tau_k)) \xrightarrow[\beta_k\to\infty]{} 0.$ □

Если приближенное решение v получено методом конечных элементов, можно рассмотреть галеркинскую аппроксимацию u_h — приближенное решение, полученное на сетке $\mathcal{T}_h$ с характерным размером h. Мажоранта $M_3^2(u_h, \beta, y)$ вычисляется как сумма локальных вкладов на каждом элементе T разбиения $\mathcal{T}_h$, а в качестве индикатора погрешности можно взять

$$\eta_T^2(u_h, \beta, y) = \int_T \tau(x)\, dx.$$

Заключение. В данной работе рассмотрены основные вычислительные свойства комбинированной функциональной апостериорной оценки для задачи реакции-диффузии. Доказана сходимость последовательности оценок, вычисленных на последовательности конечномерных подпространств, к энергетической норме погрешности. Обоснован выбор индикатора погрешности, необходимого для реализации адаптивных алгоритмов.

Литература

1. *Braess D.* Finite Elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics / 3rd. ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. xvii. 365 p.
2. *Repin S. I.* A Posteriori estimates for partial differential equations. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2008. 316 p.
3. *Babuška I., Whiteman J. R., Strouboulis T.* Finite elements. An introduction to the method and error estimation. Oxford: Oxford University Press, 2011. xii. 323 p.
4. *Neittaanmäki P., Repin S. I.* Reliable methods for computer simulation — Error control and a posteriori estimates. Amsterdam: Elsevier, 2004. 305 p.
5. *Repin S. I., Sauter S.* Functional a posteriori estimates for the reaction-diffusion problem // C. R., Math., Acad. Sci. Paris. 2006. Ser. 343. N 5. P. 349–354.
6. *Чурилова М. А.* Применение функционального подхода к адаптивному решению эллиптических задач // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия Физико-математические науки. 2012. № 4(158). С. 64–69.
7. *Repin S. I.* A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // Math. Comp. 2000. Vol. 69. N 230. P. 481–500.
8. *Frolov M., Neittaanmäki P., Repin S.* On the reliability, effectivity and robustness of a posteriori error estimation methods // Numerical methods for scientific computing. Variational problems and applications. Barcelona. CIMNE. 2003. P. 153–175.
9. *Repin S. I., Sauter S., Smolianski A.* A posteriori error estimation for the Dirichlet problem with account of the error in the approximation of boundary conditions // Computing. 2003. Vol. 70, N 3. P. 205–233.
10. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

Сведения об авторе: *Чурилова Мария Александровна* — аспирант; m_churilova@mail.ru

COMPUTATIONAL PROPERTIES OF FUNCTIONAL A POSTERIORI ESTIMATES FOR STATIONARY REACTION-DIFFUSION PROBLEM

Maria A. Churilova

St.Petersburg State Polytekhnical University, Polytekhnicheskaya ul., 29, St. Petersburg, 195251, Russian Federation; m_churilova@mail.ru

A Dirichlet problem for the stationary reaction-diffusion equation is considered

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) + \rho^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases},$$

where Ω is a bounded connected domain in $\mathbb{R}^2$ with Lipschitz continuous boundary $\partial\Omega$, ρ^2 is a reaction coefficient, right-hand side $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in \mathrm{W}_2^1(\Omega)$. Matrix $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ is symmetric, coefficients may have a first kind discontinuity in the domain. It is assumed that there are positive constants α_1 and α_2, such that

$$\alpha_1|\eta|^2 \leq A\eta \cdot \eta \leq \alpha_2|\eta|^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Functional a posteriori majorants estimate the error energy norm

$$|[u-v]|^2 := |||\nabla(u-v)|||^2 + \|\rho(u-v)\|^2,$$

where

$$|||\nabla(u-v)|||^2 = \int_\Omega A\nabla(u-v) \cdot \nabla(u-v)\, dx,$$

and $\|\rho(u-v)\|$ is a standard $L^2(\Omega)$ norm. Approximate solution $v \in u_0 + V_0$, where $V_0 = \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(\Omega)$ is the subspace of functions from the Sobolev space $\mathrm{W}^1_2(\Omega)$ that vanish on the boundary of the domain in the sense of the trace operator.

The combined estimate is considered

$$|[u-v]|^2 \leq M_3^2(v,y,\beta) = (1+\beta)|||A\nabla v - y|||_*^2 + \int\limits_\Omega \frac{\mathbb{C}^2(1+\beta)}{\mathbb{C}^2\rho^2(1+\beta)+\beta}\, r_\Omega^2(v,y)\, dx,$$

which is true for any $y \in Y := \mathrm{H}(\Omega, \mathrm{div})$ and $\beta > 0$, where

$$\mathrm{H}(\Omega, \mathrm{div}) = \Big\{ q \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \,\big|\, \mathrm{div} q \in L^2(\Omega) \Big\}.$$

For $r_\Omega(v,y)$ is denoted $r_\Omega(v,y) = f - \rho^2 v + \mathrm{div} y$ and the norm

$$|||y|||_*^2 = \int\limits_\Omega A^{-1} y \cdot y \, dx.$$

Conctant $\mathbb{C}$ is taken from a well known inequality

$$\|w\| \leq \mathbb{C}|||\nabla w|||, \quad \forall w \in V_0$$

and can be estimated with a constant in the Friedrichs inequality.

In the article computational properties of combined majorant $M_3^2(v,y,\beta)$ are proved. Including convergence of the sequence of estimates calculated on a sequence of finite-dimensional subspaces to the error energy norm. The choice of error indicator necessary for the implementation of an adaptive algorithm is justified. Refs 10.

Keywords: functional a posteriori error estimates, stationary reaction-diffusion problem, adaptive algorithms.