УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 1

НАИЛУЧШАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ТИПА МАРКОВА ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ, ЗАДАВАЕМЫХ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ

М. Ш. Шабозов[1], *А. А. Шабозова*[2]

[1] Институт математики АН Республики Таджикистан,
Таджикистан, 734063, Душанбе, ул. Айни, 299
[2] Таджикский государственный национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17

В работе для указанных классов функций, задаваемых модулями непрерывности, решается экстремальная задача отыскания наилучшей квадратурной формулы типа Маркова. Доказывается, что наилучшая формула является классическая квадратурная формула трапеций и вычисляется ее точная оценка погрешности на заданном классе функций. Аналогичный факт доказывается для классов функций, задаваемых модулем гладкости, а также для промежуточных классов функций между упомянутыми выше классов функций, задаваемых модулями непрерывности и модулями гладкости. Библиогр. 10 назв.

Ключевые слова: квадратурная формула типа Маркова, модуль непрерывности, погрешность.

В теории приближенного вычисления определенных интегралов экстремальная задача отыскания наилучшей квадратурной формулы на заданном классе функций является наиболее важной. Постановка этой задачи принадлежит А. Н. Колмогорову, а первые результаты были получены С. М. Никольским [1, 2]. Решение экстремальной задачи отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и получение точной оценки ее остатка требует привлечения современных методов функционального анализа вариационного содержания. Наиболее важные результаты, полученные по экстремальным задачам теории квадратур до конца восьмидесятых годов прошлого века, подытожены Н. П. Корнейчуком в дополнении к монографии С. М. Никольского [3]. Из добавления видно, что хотя в этом направлении получен ряд существенных результатов, немало задач такого рода до сих пор не решено.

Напомним постановку общей экстремальной задачи для функции одной переменной ([1], см. также [3, с. 144–145]). Рассматривается квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

задаваемая векторами узлов $X = \Big\{x_k :\ a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b\Big\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$, $R_n(f) = R_n(f; X; P)$ — погрешность формулы (1) на функции $f(x)$. При фиксированных натуральных $n \ge 1$ через $\mathcal{A}$ обозначим множество всех векторов (X, P) или некоторое его подмножество, определяемое теми или иными ограничениями на узлы и коэффициенты (например, требованием точности формулы (1), положительность коэффициентов p_k и т. д.).

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс заданных на отрезке $[a, b]$ интегрируемых в смысле Римана функций $f(x)$, то положим

$$R_n(\mathfrak{M}, X, P) = \sup\left\{|R_n(f, X, P)| : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = \inf\{R_n(\mathfrak{M}, X, P) : (X, P) \in \mathcal{A}\} \tag{2}$$

и указать вектор (X^0, P^0) из множества $\mathcal{A}$, на котором достигается точная нижняя грань в (2), то есть что

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}) = R_n(\mathfrak{M}; X^0, P^0).$$

Квадратурная формула (1) с векторами узлов $X^0 = \left\{x_k^0\right\}$ и коэффициентов $P = \left\{p_k^0\right\}$ дает наименьшую на всем классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди формул, задаваемых множеством $\mathcal{A}$ векторов (X, P), и в этом смысле является наилучшей для класса $\mathfrak{M}$. В этой заметке в качестве $\mathfrak{M}$ будем рассматривать класс $H^\omega[a, b]$ функций $f(x)$ таких, которые для любых двух точек $x', x'' \in [a, b]$ удовлетворяют условию

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega(|x' - x''|),$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. В частном случае, когда $\omega(\delta) = K\delta^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1, K > 0)$, класс $H^\omega[a, b] := KH^\alpha[a, b]$ есть класс Гёльдера порядка α с константой K.

В работе [4], в частности, доказано, что среди всех квадратурных формул вида (1) наилучшей для класса $H^\omega[a, b]$ квадратурной формулой является формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) + R_n(f).$$

При этом для погрешности этой формулы имеет место равенство

$$\mathcal{E}_n(H^\omega[a, b]) = 2n \int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \tag{3}$$

Отметим, что для классов $W^{(r)}H^\omega := W^{(r)}H^\omega[0, 2\pi]$ $(r = 0, 1, 2, \ldots; W^{(0)}H^\omega = H^\omega)$ 2π-периодических дифференцируемых функций $f(x)$, производные r-х порядков которых удовлетворяют неравенству

$$|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')| \leq \omega(|x' - x''|),\ x', x'' \in [0, 2\pi],$$

точная оценка погрешности квадратурной формулы прямоугольников непосредственным вычислением найдена В. Н. Молозёмовым [5, 6]. В последствии В. П. Моторным [7] было доказано, что на указанном классе функций квадратурная формула прямоугольников является наилучшей.

В данной работе рассматривается задача об отыскании наилучшей для класса $H^\omega[a, b]$ квадратурной формулы типа Маркова [3, с. 156]

$$\int_a^b f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f), \tag{4}$$

задаваемой векторами (X, P) узлов $X = \{x_k :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^n$. Таким образом, мы изучаем задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы вида (4), когда заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка: $x_0 = a$, $x_n = b$, а узлы $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ и коэффициенты $p_0, p_1, \cdots, p_n$ следует выбрать оптимальным образом.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Среди квадратурных формул вида (4) наилучшей для класса $H^\omega[a,b]$ является формула трапеций*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)\right\} + R_n(f). \tag{5}$$

При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы (5) на всем классе $H^\omega[a,b]$ равна

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = 2n\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(t)dt.$$

В частности,

$$\mathcal{E}_n(KH^\alpha) = \frac{K(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(2n)^\alpha}.$$

Доказательство. Оценку снизу величины $\mathcal{E}_n(H^\omega[a,b])$ получим известным методом Н.П.Корнейчука [4]. При каждом фиксированном векторе узлов $X = \{x_k : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ через $H^\omega_X[a,b]$ обозначим подмножество функций $f \in H^\omega[a,b]$ таких, что $f(x_k) = 0,\ k = \overline{0,n}$. Если $f \in H^\omega_X[a,b]$, то в формуле (4) квадратурная сумма обращается в нуль, а потому погрешность $R_n(f)$ не зависит от вектора коэффициентов $P = \{p_k\}$:

$$\Big|R_n(f)\Big| := \Big|R_n(f,X)\Big| = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

В силу включения $H^\omega_X[a,b] \subset H^\omega[a,b]$ для каждого вектора узлов $X \subset \mathcal{A}$ выполняется неравенство

$$R_n\left(H^\omega_X[a,b]\right) = \sup\Big\{\,|R_n(f)| :\ f \in H^\omega_X[a,b]\Big\} \le R_n(H^\omega[a,b], X),$$

а следовательно и

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = \inf\Big\{\,R_n(H^\omega[a,b]; X, P) :\ (X,P) \in \mathcal{A}\Big\} \ge$$

$$\ge \inf\Big\{\,R_n(H^\omega_X[a,b]; X) :\ X \subset \mathcal{A}\Big\} = \inf_X \sup_{f\in H^\omega_X[a,b]}\left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Теперь заметим, что если $f \in H^\omega_X[a,b]$, то для любой точки $x \in [a,b]$ и любого узла $x_k \in [a,b]$ будем иметь

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_k)| \le \omega(|x - x_k|),$$

а потому

$$|f(x)| \le \min_{x_k} \omega(|x - x_k|) \equiv \Psi(x). \tag{6}$$

Исходя из неравенств $x_k < x_{k+1}$, $k = \overline{0, n-1}$, а также из монотонного возрастания модуля непрерывности $\omega(\delta)$, функцию $\Psi(x) = \Psi_X(x)$ можно записать в виде

$$\Psi(x) = \Psi_X(x) = \omega(\min_k |x - x_k|),$$

причем для любых двух точек $x', x'' \in [a, b]$ будет выполняться неравенство

$$|\Psi(x') - \Psi(x'')| = |\omega(\min_k |x' - x_k|) - \omega(\min_k |x'' - x_k|)| \leq \omega(|x' - x''|).$$

Поскольку кроме этого $\Psi(x_k) = 0$, получаем $\Psi \in H_X^\omega[a, b]$. Это с учетом правой части неравенства (6) приводит к соотношению

$$R_n(H_X^\omega[a, b] : X) = \sup_{f \in H_X^\omega[a,b]} \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \int_a^b \Psi_X(x)dx = R_n(\Psi_X).$$

Полагая $X^0 = \{x_k^0 : \ x_k^0 = a + k(b-a)/n; k = \overline{0, n}\}$, покажем, что для произвольного вектора узлов вида

$$X = \{x_k : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

с фиксированными узлами $x_0 = a$ и $x_n = b$ выполняется неравенство

$$R_n(\Psi_X) = \int_a^b \Psi_X(x)dx \geq \int_a^b \Psi_{X^0}(x)dx = R_n(\Psi_{X^0}). \tag{7}$$

Будем следовать схеме рассуждений из монографии [8, с. 369–370]. Введем обозначение

$$\Phi(s) = \int_0^s \Psi_X(x)dx.$$

Если теперь положить

$$t_0 = x_0 = a, \quad t_k = (x_{k-1} + x_k)/2, \quad k = \overline{1, n}; \quad t_{n+1} = x_n = b,$$

то в силу монотонности модуля непрерывности ω запишем

$$\Psi_X(x) = \omega(|x - x_k|), \quad t_k < x < t_{k+1}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Учитывая последнее соотношение, будем иметь

$$\int_a^b \Psi_X(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega(|x - x_k|)dx = \int_a^{t_1} \omega(x - a)dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_{t_k}^{x_k} \omega(x_k - x)dx + \int_{x_k}^{t_{k+1}} \omega(x - x_k)dx \right) + \int_{t_n}^{b} \omega(b - x)dx =$$

$$= \int_0^{(x_1 - a)/2} \omega(x)dx + \int_0^{(b - x_{n-1})/2} \omega(x)dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int_0^{(x_k - x_{k-1})/2} \omega(x)dx + \int_0^{(x_{k+1} - x_k)/2} \omega(x)dx \right) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \int_0^{(x_k - x_{k-1})/2} \omega(x)dx := 2 \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\beta_k} \omega(x)dx \stackrel{def}{=} 2 \sum_{k=1}^{n} \Phi(\beta_k), \tag{8}$$

причем $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=(b-a)/2$. Так как $\Phi(s)$ выпукла вниз, в силу неравенства Иенсена [9, с. 92] для выпуклых функций из правой части равенства (8) получаем

$$2\sum_{k=1}^{n}\Phi(\beta_k)\geq 2n\,\Phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\right)=2n\,\Phi\left(\frac{b-a}{2n}\right)=2n\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(x)dx. \tag{9}$$

Таким образом, из равенства (8) и неравенства (9) следует, что

$$\int_a^b\Psi_X(x)dx\geq 2n\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(x)dx. \tag{10}$$

Для установления неравенства (7) простыми вычислениями достаточно убедиться, что

$$\int_a^b\Psi_{X^0}(x)dx=2n\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(x)dx. \tag{11}$$

Учитывая неравенства (7), (10) и равенство (11), приходим к оценке снизу:

$$\mathcal{E}_n(H^\omega[a,b])\geq 2n\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(x)dx. \tag{12}$$

Для получения оценки сверху рассмотрим квадратурную формулу (4), заданную векторами узлов

$$X^0=\left\{x_k^0:\ x_k^0=a+kh,\ k=\overline{0,n}\right\} \tag{13}$$

и коэффициентов

$$P^0=\left\{p_k^0:\ p_k^0=h,\ k=\overline{1,n-1};\ p_0=p_n=h/2\right\}, \tag{14}$$

где $h=(b-a)/n$, и, полагая

$$t_0^0=a,\quad t_k^0=a+(2k-1)h/2,\quad k=\overline{1,n};\ t_{n+1}^0=b,$$

для произвольной функции $f\in H^\omega[a,b]$ получаем

$$\begin{aligned}\left|R_n(f,X^0,P^0)\right|&=\left|\int_a^b f(x)dx-h\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k^0)\right\}\right|\leq\\ &\leq\int_a^{t_1^0}|f(x)-f(a)|\,dx+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k^0}^{t_{k+1}^0}\left|f(x)-f(x_k^0)\right|dx+\int_{t_n^0}^{b}|f(x)-f(b)|\,dx\leq\\ &\leq\int_a^{a+h/2}\omega(x-a)dx+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{x_k^0-h/2}^{x_k^0+h/2}\omega(|x-x_k^0|)dx+\int_{b-h/2}^{b}\omega(b-x)dx=\\ &=2\int_0^{h/2}\omega(x)dx+2(n-1)\int_0^{h/2}\omega(x)dx=2n\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(x)dx,\end{aligned}$$

откуда сразу следует, что

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right)\leq R_n\left(H^\omega[a,b];X^0,P^0\right)\leq 2n\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(x)dx. \tag{15}$$

Сравнивая оценку снизу (12) и оценку сверху (15), приходим к равенству

$$\mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = R_n\left(H^\omega[a,b]; X^0, P^0\right) = 2n\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Пусть $H_2^\omega[a,b]$ — класс функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a,b]$, и для любых точек $x, x\pm t \in [a,b]$ удовлетворяющих условию

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \le 2\omega(|t|).$$

Нетрудно проверить, что $H^\omega[a,b] \subset H_2^\omega[a,b]$, то есть класс $H_2^\omega[a,b]$ шире, чем класс $H^\omega[a,b]$. Тем не менее справедлива следующая

Теорема 2. *Среди всех квадратурных формул вида* (4) *с произвольными векторами узлов и коэффициентов* $(P,X) \subset \mathcal{A}$ *наилучшей для класса* $H_2^\omega[a,b]$ *является формула трапеций (5). При этом для погрешности формулы (5) на классе функций* $H_2^\omega[a,b]$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_n\left(H_2^\omega[a,b]\right) = 2n\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \tag{16}$$

Доказательство. В самом деле, для квадратурной формулы вида (4), заданной векторами узлов (13) и коэффициентов (14), оценка погрешности представима в виде

$$\begin{aligned} R_n(f;X^0,P^0) &= \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^n p_k^0 f(x_k^0) = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\Big[f(a\pm x)-f(a)\Big]dx + \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\Big[f(b\pm x)-f(b)\Big]dx + \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{-h/2}^{h/2}\Big[f(x_k^0\pm x)-f(x_k^0)\Big]dx. \end{aligned}$$

Из полученного равенства сразу получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n\left(H_2^\omega[a,b]\right) &\le R_n(H_2^\omega[a,b];X^0,Y^0) \le \\ &\le 2n\int_0^{h/2}\omega(x)dx = 2n\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(x)dx := \mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right). \end{aligned} \tag{17}$$

С другой стороны, учитывая включение $H_2^\omega[a,b] \supset H^\omega[a,b]$, приходим к неравенству

$$\mathcal{E}_n\left(H_2^\omega[a,b]\right) \ge \mathcal{E}_n\left(H^\omega[a,b]\right) = 2n\int_0^{(b-a)/(2n)}\omega(x)dx. \tag{18}$$

Требуемое равенство (16) получим из сопоставления неравенств (17) и (18), откуда и следует утверждение теоремы 2.

Заметим, что между классами $H^\omega[a,b]$ и $H_2^\omega[a,b]$ можно определить промежуточный класс $H_{2-\alpha}^\omega[a,b]$, $0\le\alpha\le 1$, функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a,b]$ и для любых точек x, $x\pm t\in[a,b]$ удовлетворяющих условию

$$|(1+\alpha)f(x+t)+(1-\alpha)f(x-t)-2f(x)| \le 2\omega(|t|). \tag{19}$$

Теорема 3. *Среди всех всевозможных квадратурных формул типа Маркова (4) единственной наилучшей формулой на классе функций $H^{\omega}_{2-\alpha}[a,b]$ при любых α $(0 \le \alpha \le 1)$ является формула трапеций (5). При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы (5) на всем классе $H^{\omega}_{2-\alpha}[a,b]$ равна*

$$\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}_{2-\alpha}\right) = 2n\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx. \tag{20}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (19) очевидно, что при $\alpha = 1$ класс $H^{\omega}_{2-\alpha}[a,b]$ совпадает с классом $H^{\omega}[a,b]$, а при $\alpha = 0$ — с классом $H^{\omega}_2[a,b]$, причем при всех $0 \le \alpha \le 1$ в работе [10] доказано, что

$$H^{\omega}[a,b] \subset H^{\omega}_{2-\alpha}[a,b] \subset H^{\omega}_2[a,b]. \tag{21}$$

Из утверждений теорем 1 и 2, а также двойного включения (21) получаем неравенство

$$\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[a,b]\right) \le \mathcal{E}_n\left(H^{\omega}_{2-\alpha}[a,b]\right) \le \mathcal{E}_n\left(H^{\omega}_2\right),$$

откуда сразу вытекает, что квадратурная формула трапеций (5) также является наилучшей для класса $H^{\omega}_{2-\alpha}[a,b]$, $0 \le \alpha \le 1$, и для погрешности формулы на всем классе функций справедливо равенство (20). Докажем теперь, что эта формула единственная. Предположим, что существует другая квадратурная формула типа Маркова (4) с векторами узлов и коэффициентов (X^*, P^*), имеющая на классе функций $H^{\omega}_{2-\alpha}[a,b]$, $0 \le \alpha \le 1$, точную оценку погрешности, равную правой части (20). Тогда из соотношения

$$2n\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx = \mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[a,b]\right) = \inf\Big\{R_n(H^{\omega}[a,b];X,P): \quad (X,P)\in\mathcal{A}\Big\} \le$$

$$\le R_n(H^{\omega}[a,b];X^*,P^*) \le 2n\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx := \mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[a,b]\right)$$

получаем равенство

$$\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[a,b]\right) = R_n(H^{\omega}[a,b];X^*,P^*) = 2n\int_0^{(b-a)/(2n)} \omega(x)dx.$$

Из последнего равенства следует, что квадратурная формула (4) с векторами узлов $X^* = \{x_k^*: \ a = x_0^* < x_1^* < \ldots < x_n^* = b\}$ и коэффициентов $P^* = \{p_k^*\}_{k=0}^n$ должна быть также наилучшей для класса функций $\mathcal{E}_n\left(H^{\omega}[a,b]\right)$, чего согласно утверждения теоремы 1 быть не может. Теорема 3 полностью доказана.

Литература

1. *Никольский С. М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи матем. наук. 1950. Т. 5. Вып. 2(36). С. 165–177.

2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1952, N 16. С. 181–196.

3. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М: Наука, 1988. 270 с.

4. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки, 1968. Т. 3, № 5. С. 565–576.

5. *Молозёмов В. Н.* Оценка точности одной квадратурной формулы для периодических функций // Вестн. Ленингр. ун-та. № 1. Математика, механика, астрономия. 1967. Вып. 1. С. 52–59.

6. *Молозёмов В. Н.* О точности квадратурной формулы прямоугольников // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 4. С. 357–360.

7. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38, № 3. С. 583–614.

8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.

9. *Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иност. литературы, 1952.

10. *Лебедь Г. К.* О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций. II // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1970. Т. 34. С. 639–661.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

С в е д е н и я   о б   а в т о р а х

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, академик; shabozov@mail.ru

Шабозова Адолат Аъзамовна — аспирант; adolat@mail.ru

THE BEST QUADRATURE FORMULA OF MARKOV TYPE FOR CLASSES FUNCTIONS, WHICH GIVEN BY MODULUS OF CONTINUITY

Mirgand Sh. Shabozov[1], *Adolat A. Shabozova*[2]

[1] Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Aini st., 299, Dushanbe, 734063, Tajikistan; shabozov@mail.ru

[2] Tajik State National University, Rudaki pr., 17, Dushanbe, 734025, Tajikistan; adolat@mail.ru

Extreme problem finding is the best for a given class of functions of the quadrature formula refers to one of the most important problem of the numerical analysis. In 1968 N. P. Korneychuk proved that if the nodes of the quadrature formula

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f) \tag{1}$$

satisfy the limitation $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$, the coefficients p_k is arbitrary numbers, then among all possible quadrature formulas of the form (1) the best for the class of functions

$$H^{\omega}[a,b] = \Big\{ f : \ |f(x') - f''(x)| \le \omega(|x' - x''|), \quad x', x'' \in [a,b] \Big\},$$

where $\omega(t)$ is a given modulus of continuity, is a formula for medium rectangles. A natural question appears: if the extreme points of the segment $[a,b]$ $x = a$ and $x = b$ record beforehand as nodes, that is, instead of (1) to consider the quadrature formula of Markov

$$\int\limits_a^b f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f), \tag{2}$$

then among all the formulas of the type (2) whether the formula is again the best medium-sized rectangles.

In this paper for the classes of functions which given by modulus of continuity is solved finding the extremal problem of the best quadrature formula of Markov type. It is proved that the optimal formula is classical quadrature formula of trapezium and calculated it's exact estimate of error on the given classes function. Analogous fact is proved for the classes function given by modulus smoothness and also for intermediate interval classes function between the above mentioned classes functions given by modulus of continuity and modulus of smoothness. Refs 10.

Keywords: quadrature formula of Markov type, modulus of continuity, error.