

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ТРЕХ КРИВОШИПНО-ШАТУННЫХ ОПОРАХ

*С. М. Зуев*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматривается механическая система, состоящая из тяжелой материальной точки, опирающейся на три невесомых кривошипно-шатунных опоры. Кривошипы приводятся в действие сервоприводами. Для данной системы, имеющей три степени свободы, решена задача кинематики, при которой по заданным координатам материальной точки находятся углы поворота кривошипов относительно осей сервоприводов. Для решения задачи динамики рассматривается механическая система с эквивалентными силами. В новой эквивалентной системе материальная точка опирается на три невесомых стержня переменной длины. Для этой системы решены задачи кинематики и составлены уравнения Лагранжа второго рода. Решаются прямая и обратная задачи динамики. Анализируется положение равновесия. Для его стабилизации вводится управление с обратной связью таким образом, чтобы линеаризованная система уравнений Лагранжа второго рода распалась на три независимые системы относительно каждой из трех обобщенных координат. По теореме Ляпунова получены параметры обратной связи, обеспечивающие асимптотическую устойчивость положения равновесия. Приведены результаты численного расчета. Библиогр. 7 назв. Ил. 4.

*Ключевые слова:* кривошипно-шатунный механизм, уравнения Лагранжа, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению, эквивалентная система сил.

**1. Введение.** Кривошипно-шатунный механизм часто используется в качестве опоры для платформы Стюарта [1]. Исследуемая механическая система является разновидностью параллельного манипулятора и широко применяется в машиностроении. В станкостроении платформа применяется для создания универсальных материалобрабатывающих центров, 3D-принтеров, погрузочных манипуляторов, летательных и автомобильных испытательных стендов и тренажеров. Различные модификации механизма Стюарта применяются для позиционирования активных поверхностей зеркал радиотелескопов [2]. Пространственная рама Тейлора, используемая в ортопедической хирургии для коррекции деформации костей и для лечения сложных переломов, также построена на базе платформы Стюарта. Много научных работ посвящено кинематике и динамике механизмов. В статье [3] изучается динамика платформы с общим видом уравнений связей. В работе [4] выведены уравнения всех поверхностей для множества достижимых положений платформы. Работа [5] представляет решение прямой и обратной задач кинематики; в ней изучена динамика платформы с учетом трения в шарнирах, а также рассмотрена модель с учетом динамического воздействия штоков. В монографии [6] движение платформы описывается с использованием специальной формы уравнений динамики систем твердых тел.

Следует заметить, что при исследовании платформы на кривошипно-шатунных опорах возникают трудности аналитической записи уравнений кинематики и, как следствие, уравнений динамики. В данной статье рассматривается упрощенная конструкция, в которой платформа сводится к материальной точке. При этом для позиционирования материальной точки достаточно применить три опоры. Рассматривается решение прямой и обратной задач динамики и описывается решение задачи устойчивости положения равновесия.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим материальную точку  $B$ , к которой с помощью сферических шарниров присоединены три шатуна  $BD_1, BD_2, BD_3$  (см. рис. 1).

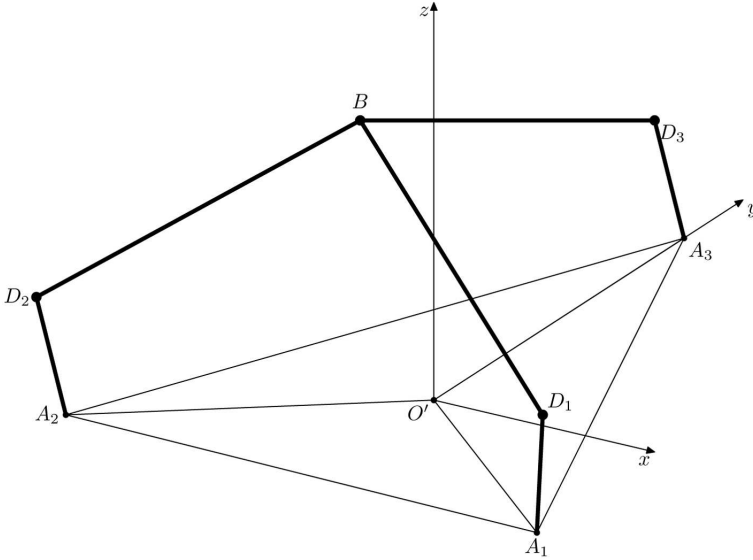


Рис. 1. Общая схема механизма.

Каждый шатун соединяется со своим кривошипом в точках  $D_1, D_2, D_3$  также с помощью сферических шарниров. Каждый кривошип в свою очередь насажен на ось шагового электродвигателя в точках  $A_1, A_2, A_3$ , которые являются вершинами правильного треугольника, вокруг которого можно описать окружность радиуса  $R$ . Введем декартову систему координат  $O'xyz$  с началом в центре вышеуказанного треугольника. Ось  $O'z$  пусть направлена перпендикулярно плоскости  $A_1A_2A_3$ , оси  $O'x$  и  $O'y$  лежат в плоскости  $A_1A_2A_3$ , как показано на рис. 1.

Пусть длины всех кривошипов равны  $d$  ( $A_1D_1 = A_2D_2 = A_3D_3 = d$ ), а длины каждого шатуна равны  $l$  ( $BD_1 = BD_2 = BD_3 = l$ ). Пусть материальная точка имеет массу  $m$ , все узлы кривошипно-шатунных опор веса не имеют. Решим прямую и обратную задачи кинематики и динамики этой механической системы, после чего исследуем положение равновесия на устойчивость.

**3. Прямая и обратная задачи кинематики и динамики.** Рассматриваемая механическая система имеет три степени свободы. Пусть материальная точка  $B$  имеет координаты  $(x_b, y_b, z_b)$ . Введем обозначения углов наклона кривошипов  $\alpha_i = \angle O'A_iD_i, i = 1, 2, 3$ . Под решением задачи кинематики будем понимать вычисление углов  $\alpha_i$  по заданным координатам  $(x_b, y_b, z_b)$ . Запишем координаты точек  $A_i$  и  $D_i$ :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left( R \cos \frac{\pi}{6}, -R \sin \frac{\pi}{6}, 0 \right), & A_2 &= \left( -R \cos \frac{\pi}{6}, -R \sin \frac{\pi}{6}, 0 \right), & A_3 &= (0, R, 0), \\
 D_1 &= \left( (R - d \cos \alpha) \cos \frac{\pi}{6}, -(R - d \cos \alpha) \sin \frac{\pi}{6}, 0 \right), & & & & (1) \\
 D_2 &= \left( -(R - d \cos \alpha) \cos \frac{\pi}{6}, -(R - d \cos \alpha) \sin \frac{\pi}{6}, 0 \right), & D_3 &= (0, R, 0).
 \end{aligned}$$

Запишем уравнения, означающие, что расстояния между точками  $D_i$  и точкой  $B$

постоянны и равны  $l$ :

$$(x_d^i - x_b)^2 + (y_d^i - y_b)^2 + (z_d^i - z_b)^2 = l^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь  $x_d^i, y_d^i, z_d^i$  — координаты точек  $D_i$ , указанные в (1).

Решив эти уравнения, сможем записать зависимости  $\alpha_i = \alpha_i(x_b, y_b, z_b)$ . Задача легко решается аналитически с помощью пакета программ Maple, но решение получается слишком громоздким для данной статьи. Отметим, что в общем случае имеются два решения.

Выберем в качестве обобщенных координаты  $x_b, y_b, z_b$  и перейдем к решению задач динамики. Ввиду сложности выражений  $\alpha_i = \alpha_i(x_b, y_b, z_b)$  запись уравнений Лагранжа второго рода и последующее их интегрирование становятся трудновыполнимыми.

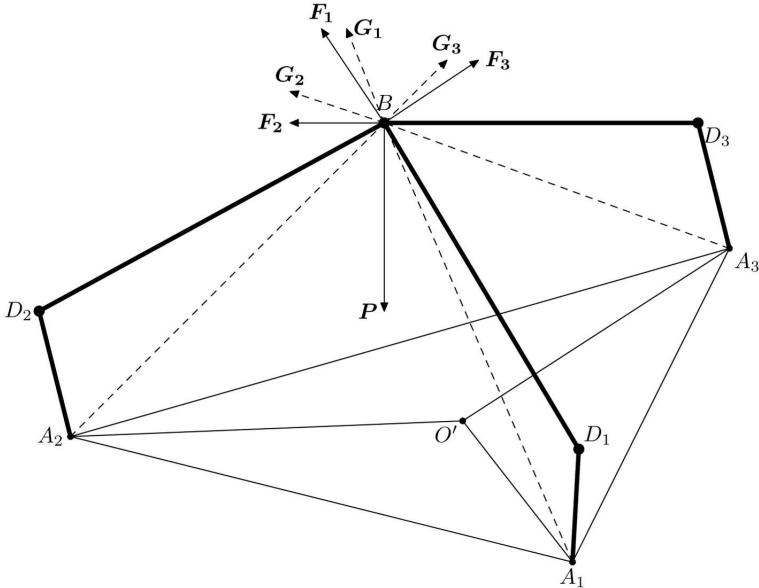


Рис. 2. Общая схема платформы.

Введем в рассмотрение новую механическую систему с невесомыми штоками переменной длины. Штоки соединяют точку  $B$  с точками  $A_1, A_2, A_3$  с помощью сферических шарниров. На рис. 2 штоки и силы  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ , с которыми они действуют на материальную точку, указаны штриховыми линиями. Пусть старая система сил  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{P})$  и новая  $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{P})$  будут эквивалентными. Для этого достаточно, чтобы их главные векторы сил были равны.

Пусть  $\mathbf{G}_i = (G_i^x, G_i^y, G_i^z)$ ,  $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}_i$ , где векторы  $\mathbf{e}_i = (a_i, b_i, c_i)$  являются единичными векторами, направленными вдоль шатунов. Координаты векторов  $\mathbf{e}_i$  легко вычислить при заданном положении точки  $B$ . Действительно, из (2) можно вычислить координаты точек  $D_i$ . Затем задача сводится к записи координат единичных векторов, направленных от точек  $D_i$  к точке  $B$ . Запишем равенства проекций главных векторов двух систем на оси  $O'xyz$ :

$$\sum_{i=1}^3 G_i^x = \sum_{i=1}^3 F_i a_i, \quad \sum_{i=1}^3 G_i^y = \sum_{i=1}^3 F_i b_i, \quad \sum_{i=1}^3 G_i^z = \sum_{i=1}^3 F_i c_i. \quad (3)$$

Рассмотрим эти три равенства как систему уравнений относительно сил  $F_i$ . В результате решения получим

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{(-c_2b_3 + b_2c_3)G^x + (a_3c_2 - a_2c_3)G^y + (-a_3b_2 + a_2b_3)G^z}{(-b_2c_1 + c_2b_1)a_3 + (-a_1c_2 + c_1a_2)b_3 + (a_1b_2 - b_1a_2)c_3}, \\ F_2 &= \frac{(b_3c_1 - b_1c_3)G^x + (a_1c_3 - c_1a_3)G^y + (-a_1b_3 + b_1a_3)G^z}{(-b_2c_1 + c_2b_1)a_3 + (-a_1c_2 + c_1a_2)b_3 + (a_1b_2 - b_1a_2)c_3}, \\ F_3 &= \frac{(-b_2c_1 + c_2b_1)G^x + (-a_1c_2 + c_1a_2)G^y + (a_1b_2 - b_1a_2)G^z}{(-b_2c_1 + c_2b_1)a_3 + (-a_1c_2 + c_1a_2)b_3 + (a_1b_2 - b_1a_2)c_3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $G^x = \sum_{i=1}^3 G_i^x$ ,  $G^y = \sum_{i=1}^3 G_i^y$ ,  $G^z = \sum_{i=1}^3 G_i^z$ .

Пусть задан закон движения материальной точки. Тогда можно найти закон изменения сил  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$  в новой механической системе, обеспечивающий заданное движение. В силу эквивалентности система сил  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{P})$  будет также обеспечивать движение материальной точки по заданному закону.

Исследуем динамику новой механической системы со штоками переменной длины. Длины штоков определяются по формулам

$$l_i = \sqrt{(x_b - x_a^i)^2 + (y_b - y_a^i)^2 + (z_b - z_a^i)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где  $x_a^i, y_a^i, z_a^i$  — координаты точек  $A_i$ . Пусть в качестве обобщенных координат будут выступать также координаты точки  $B$ :  $q_1 = x_b, q_2 = y_b, q_3 = z_b$ . Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы,  $Q_i$  — обобщенные силы. Пусть материальная точка  $B$  имеет массу  $m$ , штоки предполагаем невесомыми. Тогда кинетическая энергия системы будет иметь вид

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Систему (6) перепишем в виде

$$m\ddot{q}_i = Q_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Для составления выражений обобщенных сил  $Q_i$  напомним силы в проекциях на оси  $O'xyz$ . На точку  $B$  действует сила тяжести  $\mathbf{P} = (0, 0, -mg)$  и три силы,  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ , направленные вдоль штоков

$$\mathbf{G}_i = G_i \frac{\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a^i}{l_i}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{r}_b$  и  $\mathbf{r}_a^i$  — радиус-векторы точек  $B$  и  $A_i$ .

Составим выражение элементарной работы на возможном перемещении системы:

$$\delta A = -mg\delta q_3 + \sum_{i=1}^3 (G_i^x \delta q_1 + G_i^y \delta q_2 + G_i^z \delta q_3), \quad (10)$$

где  $G_i^x, G_i^y, G_i^z$  — проекции сил  $G_i$  на оси  $O'xyz$ . Теперь можно записать обобщенные силы, которые равны получившимся коэффициентам при независимых вариациях обобщенных координат  $\delta q_i$ :

$$Q_1 = \sum_{k=1}^3 G_k^x, \quad Q_2 = \sum_{k=1}^3 G_k^y, \quad Q_3 = -mg + \sum_{k=1}^3 G_k^z. \quad (11)$$

Воспользуемся выражениями (9) и запишем обобщенные силы подробно:

$$Q_1 = \frac{G_1 (q_1 + 1/2 R\sqrt{3})}{\sqrt{(q_1 + 1/2 R\sqrt{3})^2 + (q_2 + 1/2 R)^2 + q_3^2}} +$$

$$+ \frac{G_2 (q_1 - 1/2 R\sqrt{3})}{\sqrt{(q_1 - 1/2 R\sqrt{3})^2 + (q_2 + 1/2 R)^2 + q_3^2}} + \frac{G_3 q_1}{\sqrt{q_1^2 + (q_2 - R)^2 + q_3^2}},$$

$$Q_2 = \frac{G_1 (q_2 + 1/2 R)}{\sqrt{(q_1 + 1/2 R\sqrt{3})^2 + (q_2 + 1/2 R)^2 + q_3^2}} +$$

$$+ \frac{G_2 (q_2 + 1/2 R)}{\sqrt{(q_1 - 1/2 R\sqrt{3})^2 + (q_2 + 1/2 R)^2 + q_3^2}} + \frac{G_3 (q_2 - R)}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2 q_2 R + R^2 + q_3^2}}, \quad (12)$$

$$Q_3 = -mg + \frac{G_1 q_3}{\sqrt{(q_1 + 1/2 R\sqrt{3})^2 + (q_2 + 1/2 R)^2 + q_3^2}} +$$

$$+ \frac{G_2 q_3}{\sqrt{(q_1 - 1/2 R\sqrt{3})^2 + (q_2 + 1/2 R)^2 + q_3^2}} + \frac{G_3 q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2 q_2 R + R^2 + q_3^2}}.$$

Подставив (12) в (8), окончательно составим уравнения Лагранжа второго рода.

Перейдем к решению прямой и обратной задач динамики. Обобщенные координаты могут быть заданы как функции от времени  $q_i = q_i(t)$ . В этом случае, решая систему (8), мы можем найти аналитически зависимость управляющих сил от времени:  $G_i = G_i(t)$ . Наоборот, при заданном законе изменения управляющих сил как функций времени можно, решив систему дифференциальных уравнений (8), найти закон движения материальной точки  $B$ .

Приведем пример расчета. Заставим колебаться материальную точку по оси  $O'z$ . Пусть  $R = 1$  (м),  $m = 200$  (кг),  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = 2 + 1/10 \sin t$ . Разрешив систему (8) относительно  $G_i$ , получим зависимости  $G_i(t)$ :

$$G_i = -1/30 \frac{m\sqrt{100 R^2 + 400 + 40 \sin t + \sin^2 t} (\sin t - 10 g)}{20 + \sin t}, \quad i = 1, 2, 3.$$

С помощью (4) можно найти силы, с которыми должны действовать шатуны из первой механической системы для осуществления заданного движения материальной точки. По найденным  $G_i(t)$  можно вычислить траекторию движения материальной точки. Эта задача сводится к численному решению системы дифференциальных уравнений (8).

**4. Стабилизация положения равновесия.** Рассмотрим подробнее положение равновесия  $q_3 = h, q_1 = q_2 = 0$ . Из уравнений (8) найдем силы, обеспечивающие заданное положение:

$$G_i^* = \frac{mg\sqrt{R^2 + h^2}}{3h}. \quad (13)$$

Для исследования поведения системы в окрестности положения равновесия введем малые приращения координат  $\Delta q_i$  и дополнительные малые управляющие силы  $\Delta G_i$ :  $q_1 = \Delta q_1, q_2 = \Delta q_2, q_3 = h + \Delta q_3, G_i = G_i^* + \Delta G_i$ . Введем также безразмерные управляющие силы  $u_i = \frac{\Delta G_i}{G_i^*}$ . Тогда из уравнений Лагранжа (8) получим уравнения первого приближения

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}\mathbf{q} + \mathbf{G}\mathbf{u}. \quad (14)$$

Здесь

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ h + \Delta q_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{g(R^2 + 2h^2)}{2h(R^2 + h^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(R^2 + 2h^2)}{2h(R^2 + h^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{gR^2}{h(R^2 + h^2)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}Rg}{6h} & -\frac{\sqrt{3}Rg}{6h} & 0 \\ \frac{Rg}{6h} & \frac{Rg}{6h} & -\frac{Rg}{3h} \\ \frac{g}{3} & \frac{g}{3} & \frac{g}{3} \end{pmatrix}.$$

Если положить в системе (14)  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ , то получим систему  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}\mathbf{q}$ , для которой из вида матрицы  $\mathbf{H}$  очевидно, что колебания по обобщенным координатам «развязываются», и тривиальное решение будет экспоненциально неустойчивым.

Для обеспечения устойчивости необходимо ввести дополнительное управляющее воздействие. Запишем систему (14) в форме Коши:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{z} = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3)^T. \quad (15)$$

Управление будем строить в виде обратных связей:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{z}. \quad (16)$$

Здесь  $\mathbf{K}$  — постоянная матрица размера  $3 \times 6$ , подлежащая определению. Будем выбирать коэффициенты матрицы обратной связи таким образом, чтобы система разбилась на три независимые подсистемы, каждую из которых исследуем на устойчивость. Подставив (17) в (15), получим замкнутую систему

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{z} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{z}. \quad (17)$$

Здесь матрица  $\mathbf{C}$  имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} & c_{1,6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & c_{2,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} & c_{3,6} \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить три независимые подсистемы, матрица  $\mathbf{C}$  должна иметь блочно-диагональный вид  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_3 \end{pmatrix}$ , где  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$  — матрицы размерности  $2 \times 2$ .

Для этого достаточно приравнять нулю следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} c_{1,3} = c_{1,4} = c_{1,5} = c_{1,6} &= 0, \\ c_{2,1} = c_{2,2} = c_{2,5} = c_{2,6} &= 0, \\ c_{3,1} = c_{3,2} = c_{3,3} = c_{3,4} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим систему (18) как систему 12 алгебраических уравнений относительно 18 неизвестных  $k_{i,j}$  — искомых коэффициентов матрицы  $\mathbf{K}$ . Возьмем в качестве независимых 6 коэффициентов  $k_{1,j}$ ,  $j = \overline{1,6}$ ; остальные выразим через них с помощью системы (18). Таким образом, система  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}\mathbf{z}$  расщепляется на три подсистемы. Запишем их характеристические уравнения:

$$\det(\mathbf{C}_i - \mathbf{E}\lambda) = 0, \quad \lambda^2 + d_{1,i}\lambda + d_{2,i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (19)$$

где  $d_{1,i}, d_{2,i}$  — получившиеся коэффициенты при  $\lambda$  и  $\lambda^2$  соответственно. Для устойчивости тривиального решения системы необходимо и достаточно, чтобы действительные части корней характеристических уравнений были бы отрицательными [7]. Так будет, если все коэффициенты характеристических уравнений (19) будут одного знака.

Следовательно, для устойчивости требуется положительность всех коэффициентов  $d_{1,i}, d_{2,i}$ , что позволит получить следующие ограничения на коэффициенты  $k_{1,j}$ ,  $j = \overline{1,6}$ , обеспечивающие асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (14) и (8):

$$\begin{aligned} k_{1,1} < -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R^2 + 2h^2}{R(R^2 + h^2)}, \quad k_{1,2} < 0, \quad k_{1,3} < -\frac{\sqrt{1}}{2} \frac{R^2 + 2h^2}{R(R^2 + h^2)}, \\ k_{1,4} < 0, \quad k_{1,5} < -\frac{R^2}{h(R^2 + h^2)}, \quad k_{1,6} < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Приведем пример. Пусть  $R = 1$  (м),  $h = 2$  (м),  $m = 200$  (кг) и приложены управляющие силы  $G_i = G_i^*$ . Возмутим тривиальное решение, положив  $q_3 = h + 0.1$ ,  $q_1 = q_2 = 0$  при  $t = 0$ . На рис.3 показан результат численного решения дифференциального уравнения (8) для  $q_3(t)$ .

Теперь введем обратную связь  $u_i$  так, чтобы  $G_i = G_i^* + G_i^* u_i$ . При этом должны удовлетворяться условия (20):  $k_{1,i} = -10, i = \overline{1,6}$ .

После численного интегрирования уравнений (8) получим график зависимости  $q_3(t)$ , показывающий асимптотическую устойчивость тривиального решения (см. рис. 4).

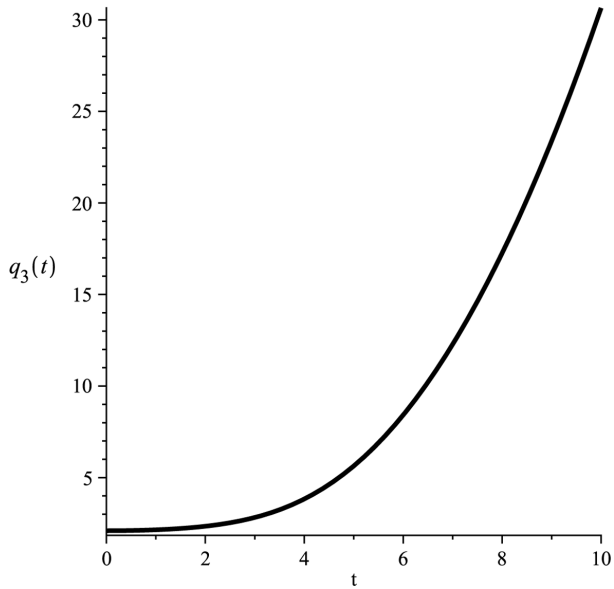


Рис. 3. Неустойчивое положения материальной точки по оси  $O'z$ .

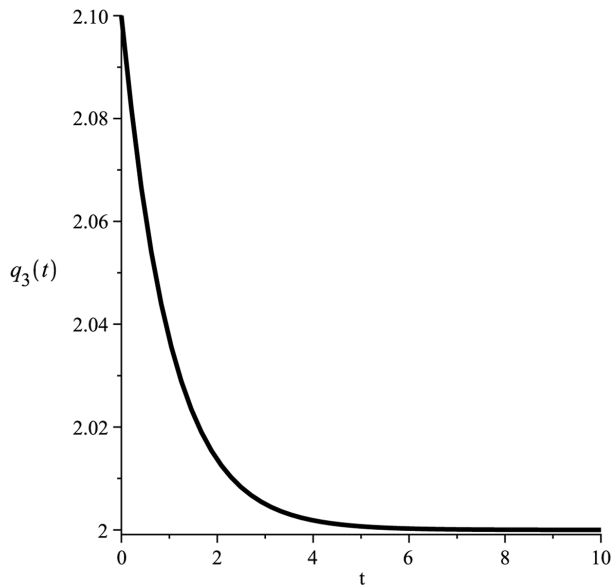


Рис. 4. Стабилизация положения материальной точки по оси  $O'z$ .

Таким образом, был изучен вопрос об устойчивости положения равновесия новой механической системы с тремя штоками переменной длины. Для исходной механической системы с кривошипно-шатунными опорами значения сил с обратными связями, обеспечивающими ассимптотическую устойчивость, можно найти по формулам (4), где  $G_i = G_i^* + G_i^* u_i$ .

Заметим, что в случае, если имеем дело с платформой, а не с материальной точкой, решение с заменой на эквивалентную систему усложняется. Если будем, анало-



гично предыдущему, рассматривать систему со штоками, то подобрать силы в штоках эквивалентными кривошипно-шатунному механизму не удастся. Это связано с тем, что необходимо иметь одинаковый главный вектор сил и вместе с этим одинаковый главный момент, в то время как точки приложения сил остаются неизменными.

### Литература

1. *Stewart D.* A platform with six degrees of freedom // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers.* London, 1965. Vol. 180. N 15. P. 371–385.
2. *Александров В. В., Локшин Б. Я., Л. Гомес Е. Л., Салазар И. Х.* Стабилизация управляемой платформы при наличии ветровых возмущений // *Фундамент. и прикл. матем.* 2005. Т. 11. Вып. 7. С. 97–115.
3. *Ершов Б. А., Трифоненко Б. В.* Движение твердого тела при действии управляющих связей // *Вестн. Ленингр. ун-та.* 1985. № 8. С. 52–56.
4. *Adkins F. A., Haug E. J.* Operational envelope of a spatial Stewart platform // *Trans. ASME. J. Mech. Des.* 1997. Vol. 31. N 368. P. 330–332.
5. *Harib K., Srinivasan K.* Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures // *Robotica.* Vol. 21. N 05. 2003. P. 541–554.
6. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2002. 276 с.
7. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

Сведения об авторе: *Зуев Сергей Михайлович* — аспирант; sergeiy@pochtamt.ru

### EQUILIBRIUM STATE STABILISATION OF MATERIAL POINT ON THREE CRANK-AND-RODS SUPPORTS

*Sergei M. Zuev*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; sergeiy@pochtamt.ru

Mechanical system consisting of a heavy-weight material point, which is based on the three weightless crank-connecting rod bearing is considered. Cranks are driven by servo motors. For this system with three degrees of freedom, has solved the kinematics task, which given the coordinates of a material point with help of the cranks rotation angles relative to the axis servo drives. To solve the dynamics problem the mechanical system with equivalent forces is considered. In the new equivalent system material point is based on three weightless rods with variable lengths. For this system kinematics problems is solved and the Lagrangian equation of the second kind is derived. Direct and inverse dynamics problems are resolved. The state of equilibrium is considered. The linearized system of the second kind Lagrange equations is split into three independent equations with respect to each of all generalized coordinates. By the Lyapunov theorem received feedback parameters, providing the asymptotic stability of the equilibrium position. The calculation results are presented. Refs 7. Figs 4.

*Keywords:* crank mechanism, the Lagrange equations, Lyapunov's theorem on stability in the first approximation, equivalent system of forces.