

## О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГЛАУКОМЫ

А. А. Морщинина, Д. А. Морщинина

Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, Российская Федерация

Глаукома является одним из самых опасных глазных заболеваний. Существуют две концепции её развития: механическая и ишемическая. Данная работа посвящена ишемической концепции, в соответствии с которой основной причиной заболевания считается нарушение кровообращения в сосудах зрительного нерва (СЗН).

В настоящей статье в качестве сосудов зрительного нерва рассматриваются тонкостенные цилиндрические трубки, нагруженные внутренним и внешним давлением. Построена геометрически нелинейная модель сосуда зрительного нерва. Выведены соотношения для определения перемещения и напряжений. Также разработана физически и геометрически нелинейная модель сосуда зрительного нерва.

На основании полученных результатов сделаны следующие выводы:

- 1) С ростом внутриглазного давления происходит удлинение сосудов зрительного нерва;
- 2) Уменьшение внутреннего диаметра СЗН, связанное с увеличением разницы между внутриглазным давлением и давлением внутри сосуда, может вызывать задержку аксоплазматического тока и приводить к коллапсу в астроглиальной ткани.

Эти обстоятельства способствуют распространению экскавации диска зрительного нерва. Библиогр. 11 назв. Ил. 2.

*Ключевые слова:* теория упругости, геометрическая нелинейность, физическая и геометрическая нелинейность, напряжения, деформации, перемещения, глаукома, ишемическая концепция, сосуды зрительного нерва.

**Введение.** Математическому моделированию различных глазных болезней посвящены работы [1–8] и др. Одним из широко распространенных и опасных является глаукома. Существующие теории ее возникновения и развития условно можно отнести к двум концепциям: механической и ишемической. В соответствии с первой — основной причиной заболевания является характерная экскавация диска зрительного нерва (ДЗН), обусловленная разностью внутриглазного (ВГД) и внутричерепного (ВЧД) давления. Прогиб ДЗН приводит к защемлению нервных волокон и нарушению зрительных функций. Согласно этой точке зрения лечение глаукомы должно быть прежде всего направлено на снижение ВГД. В рамках второй концепции атрофия зрительного нерва сводится к нарушению кровообращения в нем. В этом случае ведущая роль в лечении глаукомы отводится восстановлению кровообращения в сосудах зрительного нерва (СЗН).

В данной работе рассматривается ишемическая концепция глаукомы. Здесь в качестве СЗН рассматриваются тонкостенные цилиндрические трубки, нагруженные внутренним и внешним давлением.

**Линейная модель теории упругости для сосуда зрительного нерва.** Рассмотрим прямой круговой цилиндр, внутренний радиус которого равен  $R_1^0$ , а внешний —  $R_2^0$ , нагруженный внутренним (давление внутри сосуда) и внешним (ВГД) давлением,  $p_1 = \text{const}$  и  $p_2 = \text{const}$  соответственно (рис. 1).

В силу симметрии задачи радиальное перемещение  $u_r = u(r)$ , тогда как окружное  $u_\varphi = 0$ . Согласно [9] выражения для  $u(r)$ ,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz}$  имеют вид

$$u(r) = \frac{1}{E} \left( -(1 + \nu) \frac{A}{r} + 2Cr(1 - \nu - 2\nu^2) \right),$$

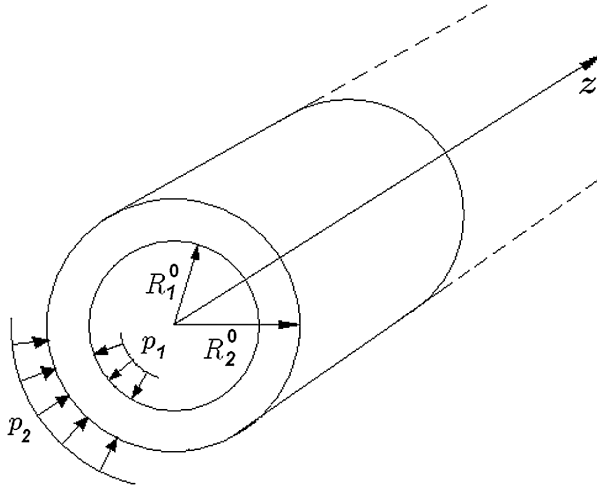


Рис. 1.

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}),$$

где  $A = \frac{(p_2 - p_1)(R_2^0 R_1^0)^2}{(R_2^0)^2 - (R_1^0)^2}$ ,  $2C = \frac{(R_1^0)^2 p_1 - (R_2^0)^2 p_2}{(R_2^0)^2 - (R_1^0)^2}$ ,  $r \in [R_1^0, R_2^0]$ . Отсюда, полагая, что материал сосуда зрительного нерва является несжимаемым ( $\nu = 0,5$ ), получаем

$$u(r) = -\frac{3(p_2 - p_1)(R_1^0 R_2^0)^2}{2Er[(R_2^0)^2 - (R_1^0)^2]}, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_2 - p_1)(R_2^0 R_1^0)^2}{[(R_2^0)^2 - (R_1^0)^2]r^2} + \frac{(R_1^0)^2 p_1 - (R_2^0)^2 p_2}{(R_2^0)^2 - (R_1^0)^2},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{(p_2 - p_1)(R_2^0 R_1^0)^2}{[(R_2^0)^2 - (R_1^0)^2]r^2} + \frac{(R_1^0)^2 p_1 - (R_2^0)^2 p_2}{(R_2^0)^2 - (R_1^0)^2}, \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}).$$

Поскольку толщина сосуда зрительного нерва много меньше его внутреннего и внешнего радиусов, в качестве модели СЗН можно рассмотреть тонкостенную цилиндрическую трубку.

Пусть  $R_*^0$ ,  $h_0$  — радиус срединной поверхности тонкостенной цилиндрической трубки и ее толщина до деформации соответственно. Учитывая (1), после необходимых преобразований выводим

$$\hat{R}_* = R_*^0 \left(1 - \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0}\right), \quad \hat{h} = h_0 \left(1 + \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0}\right). \quad (2)$$

Здесь  $\hat{R}_*$ ,  $\hat{h}$  — радиус срединной поверхности СЗН и его толщина после деформации.

Радиальное перемещение и напряжения в новых переменных примут вид

$$u(r) = -\frac{3(p_2 - p_1)(R_*^0)^3}{4Erh_0}, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_2 - p_1) (R_*^0)^3}{2h_0 r^2} - \frac{R_*^0 (p_2 - p_1)}{2h_0} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0 (p_2 - p_1)}{8R_*^0}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{(p_2 - p_1) (R_*^0)^3}{2h_0 r^2} - \frac{R_*^0 (p_2 - p_1)}{2h_0} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0 (p_2 - p_1)}{8R_*^0}, \quad (5)$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{R_*^0 (p_2 - p_1)}{2h_0} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0 (p_2 - p_1)}{8R_*^0}. \quad (6)$$

**Геометрически нелинейная модель теории упругости для сосуда зрительного нерва.** Для построения данной модели используется метод, изложенный в [5, 6]. В соответствии с ним внутреннее и внешнее давления, действующие на тонкостенную цилиндрическую трубку, представляются в виде

$$p_1 = \Delta p_1^1 + \Delta p_1^2 + \dots + \Delta p_1^n, \quad p_2 = \Delta p_2^1 + \Delta p_2^2 + \dots + \Delta p_2^n.$$

Полагая  $\Delta p_1^1 = \Delta p_1^2 = \dots = \Delta p_1^n = p_1/n$  и  $\Delta p_2^1 = \Delta p_2^2 = \dots = \Delta p_2^n = p_2/n$ , согласно формулам (2) получаем значения радиуса срединной поверхности трубки и ее толщины на  $n$ -й ступени нагружения:

$$R_*^n = R_*^0 \left( 1 - \frac{3(p_2 - p_1) R_*^0}{4Enh_0} \right)^n, \quad h_n = h_0 \left( 1 + \frac{3(p_2 - p_1) R_*^0}{4Enh_0} \right)^n.$$

Отсюда при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$\tilde{R}_* = \lim_{n \rightarrow \infty} R_*^n = R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1) R_*^0}{4Eh_0} \right), \quad \tilde{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1) R_*^0}{4Eh_0} \right). \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{R}_*$  и  $\tilde{h}$  — соответственно значения деформированного радиуса срединной поверхности и толщины СЗН.

Введя безразмерные величины  $\hat{t} = \frac{\tilde{R}_*}{R_*^0}$ ,  $\tilde{t} = \frac{\tilde{R}_*}{R_*^0}$ ,  $g = \frac{3(p_2 - p_1) R_*^0}{4Eh_0}$ , перепишем формулы (2) и (7) следующим образом:  $\hat{t} = 1 - g$ ,  $\tilde{t} = \exp(g)$ . Графики функций  $\hat{t}$  и  $\tilde{t}$  представлены на рис. 2 соответственно линиями 1 и 2.

Учитывая (3), находим перемещение деформированной координаты точки внутри полой трубки на  $i$ -й ступени нагружения:

$$u(r_i) = -\frac{3(p_2 - p_1) (R_*^i)^3}{4Eh_i} \frac{1}{r_i}, \quad R_*^i \leq r \leq R_2^0.$$

Отсюда

$$r_{i+1} = r_i \left( 1 - \frac{3p (R_*^i)^3}{4Enh_i} \frac{1}{r_i^2} \right), \quad R_*^{i+1} = R_*^i \left( 1 - \frac{3(p_2 - p_1) (R_*^i)}{4Enh_i} \right). \quad (8)$$

Запишем  $r_{i+1}$  в виде суммы  $r_{i+1} = R_*^{i+1} + \rho_{i+1}$  ( $-h_{i+1}/2 \leq \rho_{i+1} \leq h_{i+1}/2$ ). Тогда первое из выражений (8) примет вид

$$R_*^{i+1} + \rho_{i+1} = (R_*^i + \rho_i) r_i \left( 1 - \frac{3(p_2 - p_1) R_*^i}{4Enh_i} \frac{1}{(1 + \rho_i/R_*^i)^2} \right).$$

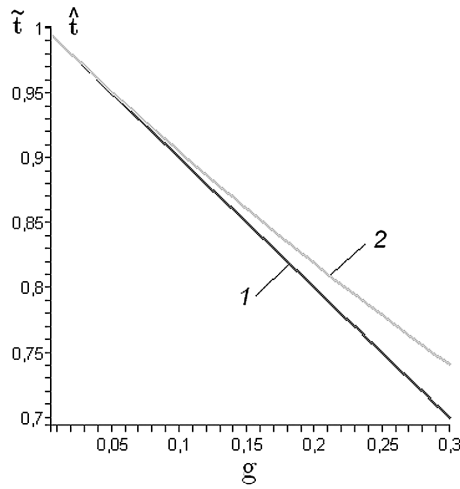


Рис. 2.

Поскольку  $|\rho_i/R_*^i| \ll 1$ ,

$$\frac{1}{(1 + \rho_i/R_*^i)^2} \approx (1 - 2(\rho_i/R_*^i)).$$

Учитывая это обстоятельство, после соответствующих выкладок устанавливаем

$$\rho_n = \rho_0 \left( 1 + \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Enh_0} \right)^n.$$

Отсюда при  $n \rightarrow \infty$  получаем

$$\tilde{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right).$$

Принимая во внимание зависимости (7), находим

$$\tilde{r} = \tilde{R}_* + \tilde{\rho} = R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) + \rho_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right). \quad (9)$$

Подставляя в формулы (3)–(6) равенства (7) и (9), окончательно получаем

$$\tilde{u}(R_*^0 + \rho_0) = \frac{3(p_2 - p_1) \left( R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^3}{4E \left( h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \right) \left( R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) + \rho_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \right)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr} = & \frac{(p_2 - p_1) \left( R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^3}{2h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \left( R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) + \rho_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^2} - \\ & - \frac{R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) (p_2 - p_1)}{2h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right)} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) (p_2 - p_1)}{8R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right)}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = - \frac{(p_2 - p_1) \left( R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^3}{2h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \left( R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) + \rho_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) \right)^2} -$$

$$\frac{R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) (p_2 - p_1)}{2h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right)} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) (p_2 - p_1)}{8R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right)}, \quad (12)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = - \frac{R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) (p_2 - p_1)}{2h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right)} - \frac{(p_1 + p_2)}{2} - \frac{h_0 \exp \left( \frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right) (p_2 - p_1)}{8R_*^0 \exp \left( -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4Eh_0} \right)}. \quad (13)$$

Из соотношения (10) вытекает, что внутренний радиус СЗН уменьшается, когда  $p_2 > p_1$ . С ростом внутриглазного давления происходит увеличение напряжения  $\tilde{\sigma}_{zz}$ , что приводит к удлинению сосудов. Вследствие этого ослабевают их воздействие на решетчатую пластинку диска зрительного нерва, и она прогибается. Приведенная цепочка рассуждений объясняет наблюдаемый врачами факт, что больные гипертонической болезнью, страдающие глаукомой, при прочих равных условиях дольше сохраняют зрительные функции по сравнению с гипотониками.

**Физически и геометрически нелинейная модель теории упругости для сосуда зрительного нерва.** Введем следующие предположения:

- 1) процесс повышения внутреннего и внешнего давления является активным;
- 2) нагружение считается простым;
- 3) материал сосуда зрительного нерва изотропен и несжимаем.

При выполнении этих предположений напряжения и деформации в СЗН будут связаны между собой соотношениями (см. [10, 11]):

$$\sigma_i = F(\varepsilon_i),$$

$$\sigma_{rr} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{zz} - \sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{zz},$$

$$\sigma = (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \quad \theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} \quad (14)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr})^2},$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}.$$

Здесь  $\sigma_i = F(\varepsilon_i) = f(r)$  — нелинейный закон упругого деформирования.

Истинные деформации определяются по следующим формулам:

$$\varepsilon_{rr} = \ln \left( 1 + \frac{du}{dr} \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \ln \left( 1 + \frac{u}{r} \right), \quad \varepsilon_{zz} = 0. \quad (15)$$

Координата произвольной точки сосуда зрительного нерва после деформации удовлетворяет зависимости

$$r_* = r + u(r), \quad (16)$$

где  $r$  — недеформированная координата этой точки, а  $u(r)$  — ее перемещение. Так как сосуд зрительного нерва несжимаем,  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} = 0$ . Тогда согласно (15) и (16)

$$\frac{r_*}{r} \frac{dr_*}{dr} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{dr_*}{dr} = \frac{r}{r_*}.$$

Интегрируя данное уравнение, получаем  $r_* = \sqrt{r^2 + 2\alpha^2}$ .

Учитывая соотношение (16), можем записать

$$u = \sqrt{r^2 + 2\alpha^2} - r, \quad (17)$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная интегрирования. Отметим, что ее размерность совпадает с размерностью  $u$  и  $r$ . Внесем выражение (17) в зависимости (15):

$$\varepsilon_{rr} = \ln r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 2\alpha^2), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \ln(r^2 + 2\alpha^2) - \ln r.$$

Нетрудно видеть, что

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = -\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{2\alpha^2}{r^2}\right). \quad (18)$$

Тогда формула для определения интенсивности деформации из (14) примет вид

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(1 + \frac{2\alpha^2}{r^2}\right). \quad (19)$$

Умножая уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r_*} = 0$$

на  $\frac{dr_*}{dr}$ , получаем

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r_*} \frac{dr_*}{dr} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (20)$$

Согласно равенствам (14), (18) и (19) находим

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_i, \quad \sigma_{rr} - \sigma_{zz} = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}. \quad (21)$$

После интегрирования уравнения (20) на основании (21) имеем

$$\sigma_{rr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{R_1}^r \frac{\sigma_i r}{r^2 + 2\alpha^2} dr + C \quad (C = \text{const}). \quad (22)$$

Принимая во внимание краевые условия  $\sigma_{rr}(R_1) = -p_1$ ,  $\sigma_{rr}(R_2) = -p_2$ , из выражения (22) выводим

$$\sigma_{rr} = -p_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{R_1}^r \frac{\sigma_i r}{r^2 + 2\alpha^2} dr. \quad (23)$$

Отсюда

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_i r}{r^2 + 2\alpha^2} dr.$$

Предположим, что обобщенная кривая  $\sigma_i = F(\varepsilon_i)$  имеет вид [10]

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^{\frac{1}{n}} \quad (A = \text{const}, n = \text{const}),$$

где постоянная  $A$  имеет размерность напряжений.

После соответствующих преобразований выводим следующее выражение для определения константы  $\alpha$ :

$$\alpha^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}(p_1 - p_2)}{2A \ln \frac{R_2}{R_1}}\right)^n. \quad (24)$$

Заметим, что во всех вышеприведенных соотношениях предполагалось, что  $h = O(R_1, R_2)$ . Если, наоборот,  $h = o(R_1, R_2)$ , тогда в формуле (24)

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{\Delta}{R_1}\right) \approx \frac{\Delta}{R_1},$$

т. е. для тонкостенного сосуда зрительного нерва параметр  $\alpha^2$  будет

$$\alpha^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}(p_1 - p_2)}{2A \frac{\Delta}{R_1}}\right)^n.$$

Проведем качественную оценку перемещений, возникающих в сосудах зрительного нерва под действием внутреннего и внешнего давления. Для этого перепишем формулу (3) следующим образом:

$$\frac{u(R_*^0)}{R_*^0} = -\frac{3(p_2 - p_1)R_*^0}{4E h_0}.$$

Полагая (сугубо ориентировочно)

$$\frac{R_*^0}{h_0} \approx 10, \quad \frac{(p_2 - p_1)}{E} \approx \frac{1}{50},$$

имеем

$$\frac{u(R_*^0)}{R_*^0} \approx -0,15.$$

Отсюда следует, что уменьшение внутреннего диаметра СЗН, связанное с увеличением разницы между ВГД и давлением внутри сосуда, может вызывать задержку аксоплазматического тока и приводить к коллапсу в астроглиальной ткани. Этот факт, а также удлинение сосудов зрительного нерва, способствуют распространению экскавации ДЗН.

Авторы выражают благодарность Юрию Михайловичу Далю за советы и помощь в работе.

## Литература

1. Бауэр С. М., Зимин Б. А., Товстик П. Е. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2000. 92 с.
2. Бауэр С. М., Любимов Г. А., Товстик П. Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления. // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 1. С. 24–39.
3. Керейчук М. А. Математическая модель глаукомы: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб., 2001. 105 с.
4. Морщинина Д. А. Выбор искусственного хрусталика при лечении катаракты. Напряженно-деформированное состояние интраокулярных линз // Lambert Academic Publishing. 2011. 115 с.
5. Даль Ю. М., Морщинина А. А. Линейные и нелинейные математические модели склеры и сосудов зрительного нерва при глаукоме // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2008. Вып. 3. С. 47–55.
6. Морщинина А. А. Математическая модель глаукомы. Модели теории упругости для склеры и сосудов зрительного нерва при глаукоме // Lambert Academic Publishing. 2011. 94 с.
7. Морщинина Д. А. Напряженное состояние и прочность интраокулярных линз (теория и эксперимент) // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2012. Вып. 1. С. 102–106.
8. Морщинина А. А. О деформациях и напряжениях толстостенной нелинейно упругой сферы (теория и приложения) // Материалы конференции «Актуальные проблемы прочности». Киев, 2010. С. 235.
9. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 344 с.
10. Даль Ю. М., Пронина Ю. Г. Деформация шаровой поры в нелинейно-упругом теле // Известия РАН. Серия физическая. 2006. Т. 70, № 9. С. 1341–1343.
11. Новожиллов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

### Сведения об авторах

*Морщинина Алина Алексеевна* — кандидат физико-математических наук, ассистент; e-mail: a.morshinina@spbu.ru

*Морщинина Диана Алексеевна* — кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: d.morshinina@spbu.ru

## ABOUT MATHEMATICAL MODELING OF GLAUCOMA

*Alina A. Morschinina, Diana A. Morschinina*

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; a.morshinina@spbu.ru, d.morshinina@spbu.ru

Glaucoma is one of the most dangerous eye diseases. There are two concepts of its development: mechanical and ischemic. This work is devoted to the ischemic concept according to which the main reason for a disease is considered blood circulation violation in vessels of an optic nerve.

In this article as vessels of an optic nerve the thin-walled cylindrical tubes loaded by internal and external pressure are considered. On the basis of the linear solution geometrically nonlinear model of a vessel of an optic nerve is constructed. Expressions for displacement and stresses are determined. Physically and geometrically nonlinear model of a vessel of an optic nerve is constructed.

On the basis of the received results the following conclusions are drawn:

- 1) To growth of intraocular pressure there is a lengthening of vessels of an optic nerve;
- 2) Decrease of internal diameter of vessel of an optic nerve connected with increase in a difference between intraocular pressure and pressure in a vessel can cause a delay of aksoplazmatic current and lead to collapse in astroglial tissue.

These facts promote extension of excavation of a disk of an optic nerve. Refs 11. Figs 2.

*Keywords:* theory of elasticity, geometrically nonlinearity, physically and geometrically nonlinearity, stresses, deformations, displacements, glaucoma, ischemic concept, vessels of an optic nerve.