

## СОВМЕСТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА И КОРПУСА

*И. А. Пасынкова*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Изучается влияние динамических свойств массивного корпуса на прямое синхронное прецессионное движение неуравновешенного ротора с четырьмя степенями свободы. Предполагается, что ротор представляет собой динамически симметричное твердое тело, укрепленное на линейно упругом безмассовом валу. Предполагается, что корпус также динамически симметричное твердое тело, центр масс которого расположен на оси подшипников. Корпус укреплен в упругих изотропных опорах, восстанавливающие силы которых являются нелинейными функциями перемещения. Рассмотрены нелинейные характеристики типа Герца и типа Дуффинга. Предполагается, что вращение ротора происходит с постоянной угловой скоростью. Сопротивление не учитывается. Показано, что существуют два дополнительных нелинейных резонанса, связанных с динамикой массивного корпуса. Их расположение зависит от соотношения масс ротора и корпуса. Получены амплитудно-частотные характеристики симметричной гиперболоидальной прецессии. Для исследования устойчивости во всем диапазоне угловых скоростей применяется стандартный линейный метод. Показано, что самоцентрирования ротора не происходит, и массивный корпус оказывает балансирующий эффект при угловой скорости, стремящейся к бесконечности. Библиогр. 10 назв. Ил. 5.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика роторов, прецессия ротора, устойчивость стационарного вращения ротора.

**Введение.** При изучении динамики быстро вращающихся роторов часто возникает необходимость учитывать влияние динамики массивного корпуса на колебания неуравновешенного ротора, укрепленного на гибком валу. Как отмечено в [1], связанность колебаний ротора и упругой системы опорной конструкции проявляется в сдвиге критических скоростей вращения ротора, а также в появлении дополнительных критических скоростей, зависящих от динамических свойств опор. Влияние массивно-упругих опор, рассматриваемых как дополнительные точечные массы на концах вала, на критические частоты гибкого невесомого вала с диском исследовалось в [2, 3]. Дополнительные усилия между жестким ротором и массивно-упругими опорами были определены в [4]. Задача о влиянии массивного корпуса, упруго закрепленного на фундаменте, на критические угловые скорости ротора для простейшего случая, когда диск расположен в середине пролета между опорами, а центр масс корпуса находится на оси опор в ее середине, рассматривалась в [1]. В [2] линейная задача о совместных колебаниях системы «ротор — корпус» при упругой подвеске двигателя рассмотрена в более общей постановке, когда диск расположен несимметрично между опорами (т. е. имеет место гироскопический эффект), и корпус рассматривается как тело вращения с центром масс на оси подшипников в произвольной точке. Получено характеристическое уравнение системы и для простейшего симметричного случая асимптотическими методами определены амплитуда и фаза вынужденных колебаний в первой резонансной зоне. В статье [5] приведены результаты численного определения критических частот вала двигателя при наличии близких резонансных режимов.

Прецессионное вращение неуравновешенного ротора в нелинейных упругих опорах изучалось в работах [6–8]. Исследование цилиндрической прецессии статически неуравновешенного ротора на гибком невесомом валу проведено в работе [9]. В на-

стоящей работе изучаются прецессии гиперболоидального типа, когда ось корпуса зачерчивает в пространстве однополостный гиперboloид вращения.

**1°. Описание модели ротора и уравнения движения.** Рассмотрим неуравновешенный ротор с четырьмя степенями свободы, который представляет собой абсолютно твердое динамически симметричное тело, прикрепленное к упругому валу, массой которого можно пренебречь по сравнению с массой тела. Гибкий вал укреплен в жестких подшипниках корпуса, который представляет абсолютно твердое динамически симметричное тело с осью динамической симметрии, направленной по линии подшипников. Упругие опоры корпуса имеют заданные характеристики жесткости и демпфирования.

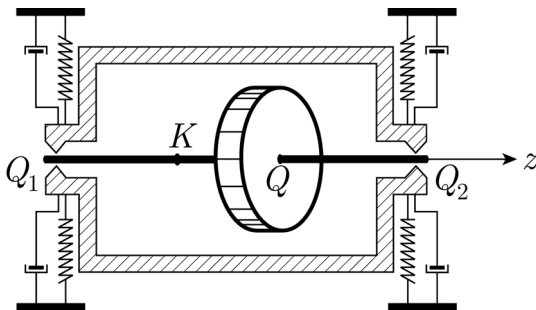


Рис. 1.

Схематическое изображение системы «ротор — корпус» представлено на рис. 1.

Пусть ротор имеет массу  $M_r$ , а длина вала равна  $L_r$ . Моменты инерции ротора равны  $J_{rp}$  (осевой) и  $J_{rt}$  (трансверсальный). Дисбаланс ротора характеризуется тремя величинами:  $e$  — статический эксцентриситет,  $\delta$  — динамический эксцентриситет и  $\varepsilon$  — фазовый сдвиг динамического эксцентриситета.

Обозначим точку крепления твердого тела к валу через  $Q$ , а ее положение в неизогнутом состоянии вала, т. е. на оси корпуса, через  $Q_0$ . Пусть точка  $Q_0$  находится на расстоянии  $e_j L$ , от  $j$ -й опоры. Если точка  $Q_0$  расположена снаружи от  $j$ -й опоры, то  $e_j < 0$ , так что всегда выполняется условие  $e_1 + e_2 = 1$ .

Пусть центр масс корпуса точка  $K$  расположен на расстоянии  $e_{kj} L$  от  $j$ -й опоры ( $j = 1, 2$ ), где  $L$  — расстояние между опорами  $Q_1$  и  $Q_2$ . Тогда  $e_{k1} + e_{k2} = 1$ . Корпус имеет массу  $M_k$  и моменты инерции  $J_{kp}$  (осевой) и  $J_{kt}$  (трансверсальный).

Рассмотрим ротор, установленный вертикально, и предположим, что угловая скорость вращения  $\tilde{\omega}$  постоянна, а перемещение ротора вдоль оси вращения пренебрежимо мало.

Введем следующие системы координат (см. рис. 2):  $Oxyz$  — инерциальная система координат с осью  $Oz$ , совпадающей с направлением оси вращения ротора в его неподвижном состоянии; система координат  $Q\xi\eta\zeta$ , жестко связанная с ротором и с осью  $Q\zeta$ , направленной вдоль касательной к изогнутой оси вала.

Система «ротор — корпус» имеет восемь степеней свободы. Обобщенные координаты можно выбрать следующим образом:  $(x, y)$  — декартовы координаты точки крепления твердого тела к валу  $Q$ ;  $(\alpha, \beta)$  — углы, определяющие направление оси  $Q\zeta$ ;  $(x_k, y_k)$  — декартовы координаты центра масс корпуса (точки  $K$ );  $(\alpha_0, \beta_0)$  — углы, определяющие направление оси  $Q_1, Q_2$ .

Кинетическая энергия с точностью до линейных членов относительно параметров дисбаланса  $e, \delta$  и квадратичных членов относительно обобщенных координат и

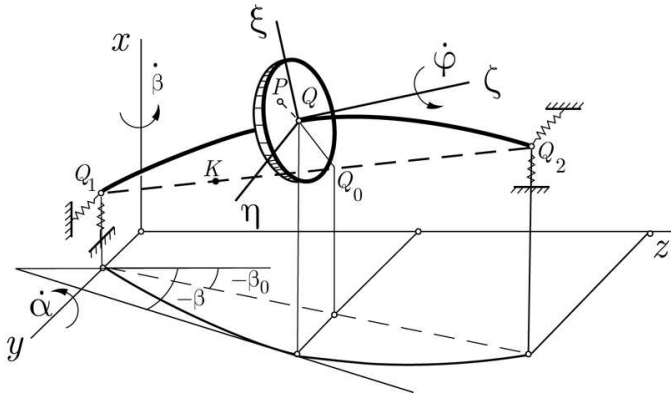


Рис. 2.

их производных может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} M_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) + \frac{1}{2} J_{kt} (\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2) + \\
 & + \frac{1}{2} M_r (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e\tilde{\omega}(\dot{y} \cos(\tilde{\omega} t) - \dot{x} \sin(\tilde{\omega} t))) + \frac{1}{2} J_{rp} (\tilde{\omega}^2 - 2\tilde{\omega}\dot{\beta}\alpha) + \\
 & + \frac{1}{2} J_{rt} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + (J_{rp} - J_{rt}) \delta \tilde{\omega} (\dot{\alpha} \sin(\tilde{\omega} t - \varepsilon) - \dot{\beta} \cos(\tilde{\omega} t - \varepsilon)). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Вал предполагается линейно-упругим, так что потенциальная энергия изогнутого вала может быть записана в виде [10]

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{в}} = & \frac{1}{2} c_{11} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \frac{1}{2} c_{22} ((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2) + \\
 & + c_{12} ((x - x_0)(\alpha - \alpha_0) + (y - y_0)(\beta - \beta_0)). \quad (2)
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения  $C = \{c_{lm}\}$  ( $l, m = 1, 2$ ) — матрица жесткости упругого вала, закрепленного в жестких подшипниках;  $(x_0, y_0)$  — декартовы координаты точки  $Q_0$ ; углы  $(\alpha_0, \beta_0)$  определяют направление прямой  $Q_1Q_2$  и предполагаются малыми. Величины  $(x_0, y_0, \alpha_0, \beta_0)$  характеризуют перемещение ротора как твердого тела (см. рис. 1) и так же, как координаты точки  $K$  ( $x_k, y_k$ ), могут быть определены через координаты  $x_j, y_j$  точек  $Q_j$ :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= e_2 x_1 + e_1 x_2, & y_0 &= e_2 y_1 + e_1 y_2, \\
 x_k &= e_{k2} x_1 + e_{k1} x_2, & y_k &= e_{k2} y_1 + e_{k1} y_2, \\
 \alpha_0 &= (x_2 - x_1)/L, & \beta_0 &= (y_2 - y_1)/L.
 \end{aligned} \quad (3)$$

Введем комплексные переменные:

$$\begin{aligned}
 S &= x + iy, & S_j &= x_j + iy_j \quad (j = 0, 1, 2), \\
 \gamma &= \alpha + i\beta, & \gamma_0 &= \alpha_0 + i\beta_0.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Опоры предполагаются изотропными и нелинейно упругими. В этом случае восстанавливающие силы в опорах имеют только радиальные составляющие, и реакция  $j$ -й опоры может быть записана в виде

$$\mathbf{R}_j = -F_j(|S_j|) \mathbf{n}_j. \quad (5)$$

Здесь  $S_j$  — смещение точки  $Q_j$  от ее равновесного положения,  $\mathbf{n}_j$  — единичный вектор направления  $S_j$ . Функции  $F_j(|S_j|)$  являются непрерывно дифференцируемыми, возрастающими и  $F_j(0) = 0$ .

Будем предполагать, что на ротор действуют силы внешнего трения, задаваемые диссипативной функцией

$$\Phi = \frac{1}{2} \tilde{\mu} (\dot{S}^2 + L^2 \dot{\gamma}^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=1,2} \tilde{\mu}_j \dot{S}_j^2, \quad (6)$$

где  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\mu}_j$  — коэффициенты внешнего трения, действующего на ротор и на опоры.

Уравнения Лагранжа II рода относительно комплексных переменных (4) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} M\ddot{S} + \tilde{\mu}\dot{S} + c_{11}(S - S_0) + c_{12}(\gamma - \gamma_0) &= M e \tilde{\omega}^2 \exp(i\tilde{\omega}t), \\ J_t \ddot{\gamma} - i J_p \tilde{\omega} \dot{\gamma} + \tilde{\mu} L^2 \dot{\gamma} + c_{12}(S - S_0) + c_{22}(\gamma - \gamma_0) &= (J_t - J_p) \delta \tilde{\omega}^2 \exp(i(\tilde{\omega}t - \varepsilon)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left( M_k e_k^2 e_{k(3-j)} + \frac{J_{kt}}{L^2} \right) \ddot{S}_j + \left( M_k e_{k1} e_{k2} - \frac{J_{kt}}{L^2} \right) \ddot{S}_{(3-j)} + \tilde{\mu}_1 \dot{S}_j + F_j(|S_j|) \frac{S_j}{|S_j|} &= \\ = \left( c_{11} e_{(3-j)} + (-1)^j \frac{c_{12}}{L} \right) (S - S_0) + \left( c_{12} e_{(3-j)} + (-1)^j \frac{c_{22}}{L} \right) (\gamma - \gamma_0), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим левые части уравнений (8) через  $\tilde{N}_j$ . В силу предположения о линейной упругости вала уравнения (8) являются линейными относительно величин  $(S, \gamma)$ . Следовательно, возможно найти точное решение

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1,2} \left( e_{(3-j)} S_j + \varkappa_{1j} \tilde{N}_j \right), \quad \varkappa_{1j} = c_{11}^* + (-1)^j c_{12}^* e_j L, \\ \gamma &= \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( \frac{S_j}{L} + \varkappa_{2j} \tilde{N}_j \right), \quad \varkappa_{2j} = c_{22}^* e_j L + (-1)^j c_{12}^*, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $C^* = \{c_{lm}^*\}$  — матрица податливости. Компоненты этой матрицы  $c_{lm}^*$  зависят от способа крепления вала. Для различных видов опор эти функции можно найти во многих монографиях, например, [1].

После подстановки (9) в уравнения (7) получим систему дифференциальных уравнений относительно  $S_1, S_2$ . Введем безразмерное время  $\tau$  и безразмерные переменные  $s_j$  по формулам:

$$\tau = \omega_0 t, \quad s_j = S_j/h, \quad (10)$$

где  $h$  — некоторая малая длина, например, статический эксцентриситет  $e$  или величина  $L \delta$ . Выбор характерной угловой скорости  $\omega_0$  зависит от вида нелинейности  $F_j(|S_j|)$ .

Безразмерные дифференциальные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \left( \frac{d^2}{d\tau^2} (e_{(3-j)} s_j + \sigma_{1j} N_j) + \mu \frac{d}{d\tau} (e_{(3-j)} s_j + \sigma_{1j} N_j) + N_j \right) &= d_1 \Omega^2 \exp(i\Omega\tau), \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( \frac{d^2}{d\tau^2} (s_j + \sigma_{2j} N_j) + (\mu k (1-\lambda) - i \lambda \Omega) \frac{d}{d\tau} (s_j + \sigma_{2j} N_j) + e_j k (1-\lambda) N_j \right) &= \\ = (1-\lambda) d_2 \Omega^2 \exp(i(\Omega\tau - \varepsilon)), \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнениях (11) использованы следующие обозначения для безразмерных параметров и функций  $f_j, N_j$ :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\tilde{\omega}}{\omega_0}, \quad \lambda = \frac{J_p}{J_t}, \quad k = \frac{ML^2}{J_t(1-\lambda)}, \quad m_k = \frac{M_k}{M}, \quad J_k = \frac{J_{kt}}{ML^2}, \\ d_1 &= \frac{e}{h}, \quad d_2 = \frac{L\delta}{h}, \quad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{M\omega_0}, \quad \mu_j = \frac{\tilde{\mu}_j}{M\omega_0}, \quad \sigma_{1j} = \varkappa_{1j} M \omega_0^2, \quad \sigma_{2j} = \varkappa_{2j} LM \omega_0^2, \\ f_j(|s_j|) &= \frac{1}{h M \omega_0^2} F_j(h|s_j|), \\ N_j &= (m_k e_{k(3-j)}^2 + J_k) \ddot{s}_j + (m_k e_{k1} e_{k2} - J_k) \ddot{s}_{(3-j)} + \mu_j \dot{s}_j + f_j(|s_j|) \frac{s_j}{|s_j|}, \\ & \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{12}$$

**2°. Прямые синхронные круговые прецессии ротора.** Уравнения (11) допускают точное решение, которое параметризует прямую синхронную круговую прецессию:

$$s_j = R_j \exp(i\varphi_j) \exp(i\Omega\tau), \tag{13}$$

где  $R_j$  и  $\varphi_j$  вещественные постоянные и  $R_j > 0$ . В зависимости от значений параметров комплексной амплитуды  $R_j$  и  $\varphi_j$  прецессия может быть цилиндрической, конической или гиперболоидальной, при этом ось корпуса, то есть прямая  $Q_1Q_2$ , зачерчивает в пространстве цилиндр, конус или однополостный гиперboloид.

Для дальнейшего удобно обозначить

$$X = \Omega^2, \quad Y_j = \frac{f_j(R_j)}{R_j}. \tag{14}$$

Последнее соотношение можно разрешить относительно  $R_j$ :  $R_j = g_j(Y_j)$ .

Подставив решение в виде (13) в систему (11) с учетом замены (14), получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно величин  $\exp(i\varphi_j)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} (A_j + i\Omega C_j) g_j(Y_j) \exp(i\varphi_j) &= d_1 \Omega^2, \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j (B_j + i\Omega D_j) g_j(Y_j) \exp(i\varphi_j) &= d_2 \Omega^2 \exp(-i\varepsilon), \end{aligned} \tag{15}$$

где коэффициенты  $A_j, B_j, C_j, D_j$  имеют вид

$$\begin{aligned} A_j &= (\sigma_{11}n_{1j} + \sigma_{12}n_{2j}) X^2 - (e_{3-j} + n_{1j} + n_{2j} + \sigma_{1j}(Y_j + \mu\mu_j)) X + Y_j, \\ B_j &= (-\sigma_{21}n_{1j} + \sigma_{22}n_{2j}) X^2 + (k(e_1 n_{1j} - e_2 n_{2j}) - \\ & \quad - (-1)^j (1 + \sigma_{2j}(Y_j + k\mu\mu_j)) X + (-1)^j k e_j Y_j, \\ C_j &= -(\mu(\sigma_{11}n_{1j} + \sigma_{12}n_{2j}) + \sigma_{1j}\mu_j) X + \mu(e_{3-j} + \sigma_{1j}Y_j) + \mu_j, \\ D_j &= (-1)^j (k\mu(\sigma_{21}n_{1j} - \sigma_{22}n_{2j}) + \sigma_{2j}\mu_j) X + (k\mu(1 + \sigma_{2j}Y_j) + k e_j \mu_j), \\ n_{jj} &= m_k e_{k(3-j)}^2 + J_k, \quad n_{j,(3-j)} = m_k e_{k1} e_{k2} - J_k. \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим определитель этой системы за  $\Delta_\mu$ . При  $\mu = 0, \mu_j = 0$  этот определитель принимает вид  $\Delta = A_1 B_2 + B_1 A_2$ . Множество  $\Delta = 0$  задает в пространстве

$\{X, Y_1, Y_2\}$  множество нелинейных резонансов, которое разделяет это пространство на области, где прецессии имеют качественно различный характер [6, 8].

Пусть  $\mu = 0, \mu_j = 0$ . Разрешим систему (15) относительно  $(\exp(i\varphi_1), \exp(i\varphi_2))$ ; получим

$$\exp(i\varphi_j) = \frac{(d_1 B_{3-j} + (-1)^j d_2 A_{3-j} \exp(-i\varepsilon))}{g_j(Y_j) \Delta}, \quad g_j(Y_j) \neq 0, \Delta \neq 0. \quad (17)$$

Используя тождество  $|\exp(i\varphi_j)| \equiv 1$ , исключим переменные  $\varphi_j$  и получим уравнения

$$X^2 (d_1^2 B_{3-j}^2 + d_2^2 A_{3-j}^2 + (-1)^j d_1 d_2 A_{3-j} B_{3-j} \cos(\varepsilon)) = g_j^2(Y_j) \Delta^2, \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

Разрешая эти уравнения относительно  $(Y_1, Y_2)$ , получаем выражения для амплитудных характеристик  $Y_j = Y_j(X)$ , а затем и для фазовых характеристик  $\varphi_j = \varphi_j(X)$ . Анализ полученных выражений показывает, что самоцентрирования системы «ротор—корпус» не происходит, а наблюдается балансировка ротора, т. е.  $\lim R = \lim g(Y_j) = 0$  при  $X \rightarrow \infty$ .

### 3°. Симметричная гиперболоидальная прецессия и ее устойчивость.

Рассмотрим возможность существования симметричных прецессий, для которых характерно  $R_1 = R_2 = R$  или  $Y_1 = Y_2 = Y$ .

Предположим, что ротор укреплен точно посередине между опорами, и центр масс корпуса совпадает с его геометрическим центром. Опоры корпуса предполагаются одинаковыми. В этих предположениях  $e_1 = e_2 = 1/2$ ,  $e_{k1} = e_{k2} = 1/2$ ,  $f_1 = f_2 = f$ ,  $g_1 = g_2 = g$ . Матрица податливости вала будет диагональной и  $c_{11}^* = L^3/(48EJ)$ ,  $c_{22}^* = L/(12EJ)$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $J$  — момент инерции поперечного сечения вала. Тогда получим  $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma$ ,  $\sigma_{21} = \sigma_{22} = 2\sigma$  и  $A_1 = A_2 = A$ ,  $B_1 = B_2 = B$ ,  $\Delta = 2AB$ .

Систему уравнений (18) можно преобразовать к виду

$$d_1 d_2 A B \cos(\varepsilon) = 0, \quad X^2 (d_1^2 B^2 + d_2 A^2) = 4g^2(Y) A^2 B^2. \quad (19)$$

Из первого уравнения системы (19) следует, что симметричная прецессия возможна только при  $\cos(\varepsilon) = 0$ , т. е. при  $\varepsilon = \pi/2$ . Тогда из уравнений (17) получим, что  $\varphi_1 = -\varphi_2$ . Отсюда следует, что симметричная прецессия будет гиперболоидального типа, так как для цилиндрической прецессии должно быть  $\varphi_1 = \varphi_2$ , а для конической либо  $\varphi_1 = \varphi_2$ , либо  $\varphi_1 = \pi - \varphi_2$ . Из второго уравнения в (19) получим аналитическое выражение для АЧХ симметричной гиперболоидальной прецессии

$$g(Y) = \frac{X}{2} \sqrt{\frac{d_1^2}{A^2} + \frac{d_2^2}{B^2}}. \quad (20)$$

Множество нелинейных резонансов преобразуется в множество  $\{A = 0 \cup B = 0\}$ , где каждая кривая представляет гиперболу. Гипербола  $A = 0$  имеет вертикальную асимптоту  $X = 1/(\sigma)$  и наклонную  $Y - m_k/4 X + 1/(2\sigma) = 0$ , а гипербола  $B = 0$  имеет вертикальную асимптоту  $X = k/(4\sigma)$  и наклонную  $Y - 2J_k X + 1/(2\sigma) = 0$ . Ветви этих гипербол являются по существу скелетными кривыми для АЧХ.

Исследование устойчивости можно провести по первому приближению. Введем малые возмущения по формуле

$$s_j = (R + r_j) \exp(i(\varphi_j + \alpha_j)) \exp(i\Omega \tau). \quad (21)$$

Уравнения первого приближения в комплексной форме можно записать в виде

$$\sum_{j=1,2} (L_{1j} + i L_{2j}) \exp(i \varphi_j) = 0, \quad \sum_{j=1,2} (-1)^j (L_{3j} + i L_{4j}) \exp(i \varphi_j) = 0, \quad (22)$$

где  $L_{nj}, j = \overline{1,4}$  — линейные формы относительно величин  $r_j, \alpha_j$  и их производных до четвертого порядка включительно.

Чтобы определить границы неустойчивости, достаточно вычислить свободный член характеристического уравнения, т. е. в уравнениях (22) надо выписать только члены, содержащие  $r_j, \alpha_j$ . Получим

$$\begin{aligned} L_{1j}(r_j, \alpha_j) &= C r_j, & L_{2j}(r_j, \alpha_j) &= A g(Y) \alpha_j, \\ L_{3j}(r_j, \alpha_j) &= (-1)^j D r_j, & L_{4j}(r_j, \alpha_j) &= (-1)^j B g(Y) \alpha_j, \end{aligned} \quad (23)$$

где коэффициенты  $C, D$  имеют вид

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \sigma m_k X^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} m_k + \sigma f'(g(Y))\right) X + f'(g(Y)), \\ D &= 4 \sigma J_k X^2 - (1 + k J_k + 2 \sigma f'(g(Y))) X + \frac{1}{2} k f'(g(Y)). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $f'(g(Y))$  означает, что сначала вычислена производная  $\frac{d}{dR} f(R)$ , а затем сделана подстановка  $R = g(Y)$ .

Свободный член вычисляется как определитель, имеющий блочную структуру:

$$\begin{aligned} a_8 &= \det \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_1 \\ -\Delta_2 & \Delta_2 \end{pmatrix} \\ \Delta_1 &= \begin{pmatrix} C \cos(\varphi) & A g(Y) \sin(\varphi) \\ -D \sin(\varphi) & B g(Y) \cos(\varphi) \end{pmatrix}, & \Delta_2 &= \begin{pmatrix} C \sin(\varphi) & A g(Y) \cos(\varphi) \\ -D \cos(\varphi) & B g(Y) \sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

Из формул (17) определим функции  $\sin(\varphi), \cos(\varphi)$ :

$$\sin(\varphi) = \frac{d_2 A}{\sqrt{d_1^2 B^2 + d_2^2 A^2}}, \quad \cos(\varphi) = \frac{d_1 B}{\sqrt{d_1^2 B^2 + d_2^2 A^2}}. \quad (26)$$

Окончательно выражение для  $a_8$  будет

$$a_8 = \frac{4g^2(Y)}{d_2^2 A^2 + d_1^2 B^2} A B K_1 K_2, \quad K_1 = d_2^2 A C + d_1^2 B D, \quad K_2 = d_2^2 A^3 D + d_1^2 B^3 C. \quad (27)$$

Границы смены устойчивости получим как точки пересечения АЧХ и кривых  $K_1 = 0, K_2 = 0$ , а также  $A = 0, B = 0$ . Уравнения (7) содержат гироскопические члены и вращение ротора рассматривается при отсутствии сопротивления, значит возможна только гироскопическая стабилизация.

В качестве примеров рассмотрим упругие опоры с нелинейными характеристиками типа Герца и типа Дурффинга.

**4°. Нелинейные упругие характеристики опор типа Герца.** Предположим, что упругие опоры обладают нелинейными характеристиками типа Герца, т. е. восстанавливающие силы опор определяются формулой  $F(|S_j|) = c|S_j|^{3/2}$ . В этом случае

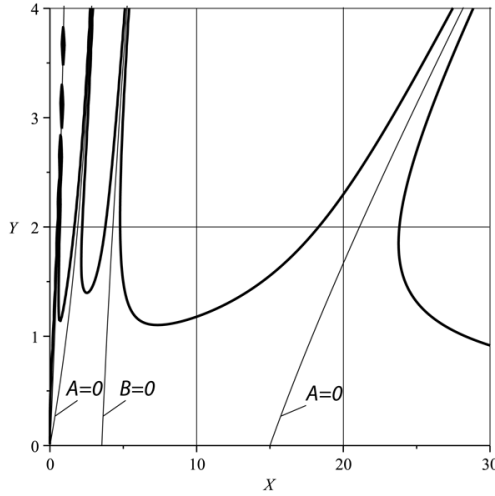


Рис. 3.

удобно выбрать  $\omega_0^2 = (c\sqrt{h})/M$ . Безразмерные величины  $Y$ ,  $g(Y)$ ,  $f'(Y)$  будут равны

$$Y = R^{1/2}, \quad g(Y) = Y^2, \quad f'(Y) = \frac{3}{2}Y.$$

На рис. 3 показаны нелинейные резонансы  $A = 0$ ,  $B = 0$  и амплитудно-частотная характеристика гиперболоидальной прецессии для следующих значений параметров:  $\sigma = 0.2$ ,  $k = 1.5$ ,  $d_1 = 1.0$ ,  $d_2 = 2.0$ ,  $m_k = 0.5$ ,  $J_k = 0.75$ . Первые два резонанса соответствуют резонансным колебаниям ротора без учета массы корпуса. Третий и четвертый резонансы связаны с динамикой массивного корпуса, и с уменьшением массы и момента инерции корпуса они сдвигаются в сторону высоких угловых скоростей. В зависимости от параметров системы взаимное расположение резонансных кривых может быть различным, что будет существенно влиять на колебания ротора и их устойчивость в резонансной области. На рис. 4 приведены результаты численного исследования устойчивости для заданных параметров. Следует отметить, что при этих параметрах кривая  $K_1 = 0$  вырождается в точку  $(0, 0)$ . Неустойчивые режимы показаны штрихованными линиями отдельно для первого и второго (рис. 4, а) и третьего и четвертого (рис. 4, б) резонансов.

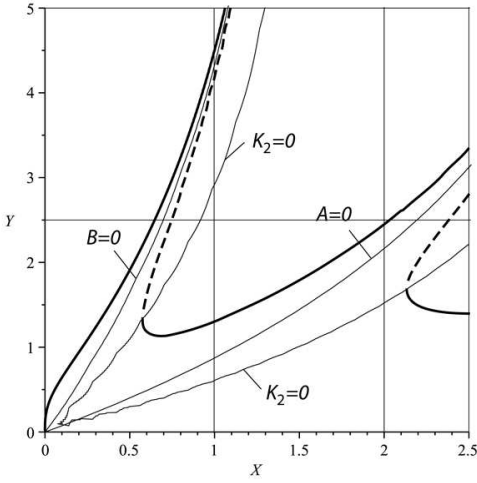
**5°. Нелинейные упругие характеристики опор типа Дуффинга.** Рассмотрим теперь упругие опоры, обладающие нелинейными характеристиками типа Дуффинга, т. е. восстанавливающие силы опор в этом случае определяются формулой  $F(|S_j|) = c_0(|S_j| + c_1|S_j|^3)$ . В этом случае удобно выбрать  $\omega_0^2 = c_0/M$ . К безразмерным величинам перейдем, используя замену  $Y = R^2$  и обозначение  $c = c_1/c_0$ , тогда резонансные кривые примут вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sigma m_k X^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m_k + \sigma(1 + cY)\right)X + 1 + cY, \\ B &= 4\sigma J_k X^2 - (kJ_k + 1 + 2\sigma(1 + cY))X + \frac{1}{2}k(1 + cY), \end{aligned} \quad (28)$$

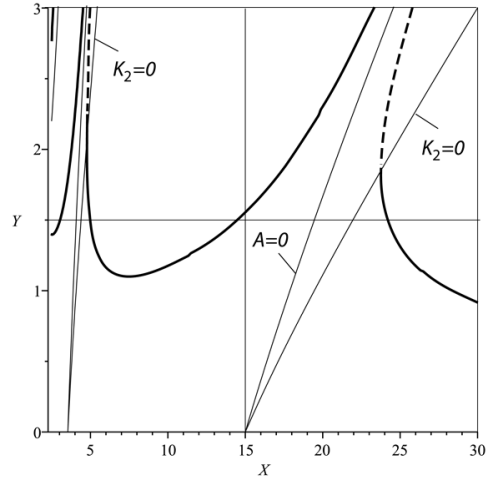
а выражение для АЧХ будет

$$\sqrt{Y} = \frac{X}{2} \sqrt{\frac{d_1^2}{A^2} + \frac{d_2^2}{B^2}}. \quad (29)$$



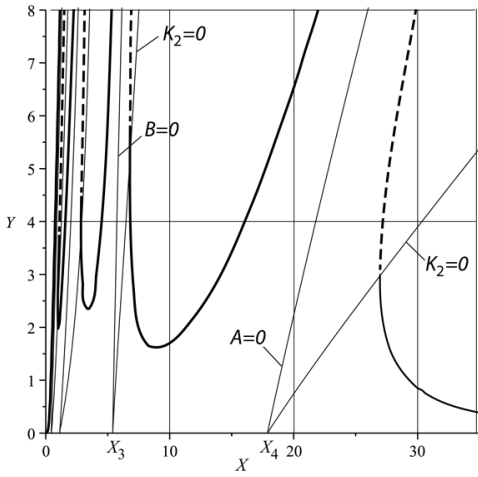


a)

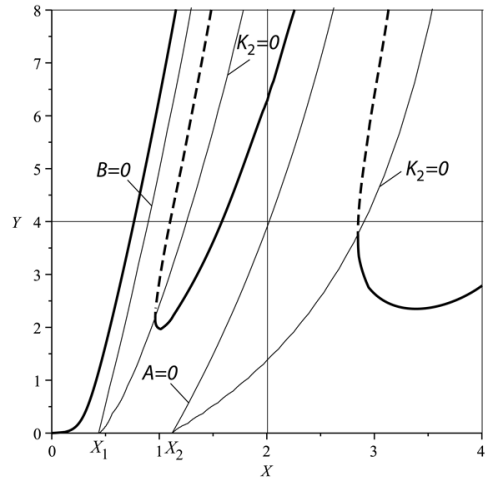


b)

Рис. 4.



a)



b)

Рис. 5.

На рис. 5, а показана АЧХ (жирная линия) для следующих значений параметров:  $\sigma = 0.2$ ,  $k = 2.8$ ,  $d_1 = 1.0$ ,  $d_2 = 2.0$ ,  $m_k = 0.5$ ,  $J_k = 0.75$ ,  $c = 0.3$ . На рис. 5, б показаны первые два нелинейных резонанса в увеличенном масштабе. Точки пересечения резонансных кривых с осью абсцисс определяют квадраты критических угловых скоростей ротора, соответствующих линейным упругим опорам. Для выбранных параметров они равны соответственно  $X_1 = 0.43$ ,  $X_2 = 1.12$ ,  $X_3 = 5.40$ ,  $X_4 = 17.88$ .

При исследовании устойчивости выражения (24) принимают вид

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{2} \sigma m_k X^2 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} m_k + \sigma (1 + 3cY) \right) X + 1 + 3cY, \\
 D &= 4\sigma J_k X^2 - (k J_k + 1 + 2\sigma (1 + 3cY)) X + \frac{1}{2} k (1 + 3cY).
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Для заданных параметров кривая  $K_1 = 0$  вырождается в точку  $(0, 0)$ , а кривая  $K_2 = 0$  представляет собой кривую четвертого порядка.

Полученные результаты могут быть полезны при конструировании и исследовании динамики высокоскоростных роторных машин.

### Литература

1. *Диментберг Ф. М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 248 с.
2. *Гробов В. А.* Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. М.: Изд-во АН СССР. 1961. 166 с.
3. *Пасынкова И. А., Степанова П. П.* Влияние массы и упругости опор на критические частоты неуравновешенного ротора Джеффкотта // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 2. С. 141–147.
4. *Кельзон А. С., Циманский Ю. П., Яковлев В. И.* Динамика роторов в упругих опорах. М., 1982. 280 с.
5. *Плотников А. М., Харитонов Л. А.* Некоторые особенности колебаний роторов в упруго-подвешенных корпусах // Динамика гибких роторов. М.: Наука, 1972. С. 61–65.
6. *Пасынкова И. А.* Гиперболоидальная прецессия ротора в нелинейных упругих опорах // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 4, № 22. С. 88–95.
7. *Пасынкова И. А.* Бифуркации прецессионного движения неуравновешенного ротора // Прикладная математика и механика. Т. 70. Вып. 4. 2006. С. 605–616.
8. *Pasynkova I. A.* Whirling Motion of an Unbalanced Rotor in Linear and Nonlinear Elastic Bearings // Magdeburger Maschinenbau-Tage. 11.-12. Oktober 2005 an der Otto-von-Guericke-Universitaet Magdeburg. Tagungsband. 2005. P. 143–148.
9. *Пасынкова И. А., Степанова П. П.* Цилиндрическая прецессия неуравновешенного ротора в массивно-податливых опорах // Пятые Поляховские чтения. Избранные труды. 2009. С. 101–106.
10. *Genta G.* Vibration of structure and machines: practical aspects // Berlin: Springer, 1999. 599 p.

Статья поступила в редакцию 27 июня 2013 г.

Сведения об авторе: *Пасынкова Инна Анатольевна* — доктор физико-математических наук, профессор; [iapasynkova@gmail.com](mailto:iapasynkova@gmail.com)

### NON-LINEAR VIBRATION OF THE ROTOR-HOUSING SYSTEM

*Inna A. Pasynkova*

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; [iapasynkova@gmail.com](mailto:iapasynkova@gmail.com)

An influence of dynamical properties of a massive housing system on forward synchronous whirling motion of an unbalanced rotor with four degrees of freedom is studied. The rotor is assumed to be a rigid body with dynamical axial symmetry attached to a massless linearly elastic shaft. The case is also a dynamically symmetric body with its center of mass located on the bearings' axes.

The elastic supports of the case are isotropic with restoring forces being non-linear functions of the displacement. The Hertz and Duffing's types of non-linearity have been considered. Rotation occurs with constant spin speed. Damping is not taken into account. Two additional non-linear resonances, which are connected with the dynamics of the massive case, have been found. Their location depends on the rotor and case's mass ratio. The dynamic response of a symmetric hyperboloidal whirling has been obtained. The linear standard method of stability investigation has been applied for a full range of frequencies. It has been also shown that rotor's self-centering does not take place and the massive case produces a balancing effect as the spin speed approaches infinity. Refs 10. Figs 5.

*Keywords:* nonlinear rotor dynamics, whirling motion, stability of stationary revolution.