УДК 532.5 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 1

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ СЖАТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

В. С. Сабанеев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

В первом разделе рассматривается движение сжатого эллипсоида вращения в безграничной жидкости. Вычисляются потенциалы скоростей и присоединенные массы при движении тела вдоль и поперек оси симметрии тела. Во втором разделе рассматривается приближенный метод построения потенциала скоростей тела при наличии плоской стенки. Для этого с другой стороны стенки помещают точно такое же тело и заставляют его двигаться симметрично первому. Вычисляются приближенно потенциалы скоростей и присоединенные массы, содержащие неизвестные скорости в центре «изображения». В третьем разделе вычисляются скорости в центре «изображения» при различном расположении тела относительно стенки. Получены приближенные выражения для присоединенных масс при движении вдоль всех осей. Результаты вычислений приведены в таблицах. Библиогр. 12 назв. Табл. 5.

Ключевые слова: идеальная жидкость, присоединенные массы, сжатый эллипсоид вращения, плоская стенка.

В теории присоединенных масс особое место занимают вопросы зависимости их величины от расстояния до плоской стенки. В идеальной жидкости эти задачи являются частным случаем движения двух равных тел в безграничной жидкости. Первой была решена задача о движении шара вблизи стенки. Этой задачей занимались Г. Стокс [1], В. Томсон и Тэт, В. Хикс [2], А. В. Бассе [3], Р. Герман [4], Н. Е. Жуковский и др. В работе [1] Г. Стокс находит старший член из бесконечного числа членов, обусловленных наличием стенки. В работах [2-4] приведены точные выражения для кинетической энергии жидкости в виде рядов. Задачей о движении двух круглых цилиндров бесконечной длины занимались В. Хикс [5], Гринхилл, А. В. Бассе и др. В работе [5] дано точное выражение для кинетической энергии жидкости в виде ряда. Прошло около 70 лет до появления первых работ, посвященных присоединенным массам при движении около стенки, касающихся тел другой формы, а именно удлиненного эллипсоида вращения. Это работы Ф. Ейзенберга [6], Т. Хавелока [7] и автора [8, 9]. В работе [6], в частности, получен приближенно потенциал скоростей при движении эллипсоида вдоль большой оси параллельно стенке. В работе [7] приближенно найдены присоединенные массы для удлиненного эллипсоида вращения малого удлинения. В работе [9] приближенно получены коэффициенты присоединенных масс удлиненного эллипсоида вращения, движущегося в идеальной жидкости вблизи стенки, причем точно найдены два старших члена разложения, учитывающих влияние стенки. Современное состояние вопроса отражено в справочнике [12].

В данной статье вычисляются точно присоединенные массы сжатого эллипсоида вращения в безграничной идеальной жидкости при поступательных движениях, а также приближенно присоединенные массы такого же тела в жидкости, ограниченной плоской стенкой при поступательных движениях и различном расположении оси симметрии тела относительно стенки.

1. Сжатый эллипсоид вращения в безграничной жидкости. Введем две системы координат с началом в центре рассматриваемого тела: декартову и криволинейную. Если ось $0x$ направить по оси симметрии эллипсоида, то эти системы координат будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned}
&x = c\mu\zeta, && 0 \le \zeta < \infty,\\
&y = \tilde{\omega}\cos\theta, && -1 \le \mu \le 1,\\
&z = \tilde{\omega}\sin\theta, && 0 \le \theta < 2\pi,\\
&\tilde{\omega} = c\left(\zeta^2+1\right)^{1/2}\left(1-\mu^2\right)^{1/2}. &&
\end{aligned}$$

В выбранной системе координат поверхности $\zeta = \mathrm{const}$ являются сжатыми эллипсоидами, у которых длина оси вращения равна $2c\zeta$, а радиус экваториальной плоскости равен $c\left(\zeta^2+1\right)^{1/2}$. При $\zeta = 0$ рассматриваемое тело превращается в диск, а при $\zeta \to \infty$ тело принимает форму шара.

В этой системе криволинейных координат коэффициенты Ламе равны

$$\begin{aligned}
H_\zeta &= c\left(\zeta^2+\mu^2\right)^{1/2}\left(\zeta^2+1\right)^{-1/2},\\
H_\mu &= c\left(\zeta^2+\mu^2\right)^{1/2}\left(1-\mu^2\right)^{-1/2},\\
H_\theta &= c\left(\zeta^2+1\right)^{1/2}\left(1-\mu^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Известно, что потенциал скоростей должен удовлетворять уравнению Лапласа во всем пространстве, занятом жидкостью, граничному условию на поверхности тела и условию покоя жидкости на бесконечности.

Ограничимся рассмотрением поступательных движений эллипсоида. В этом случае потенциал скоростей может быть представлен в виде

$$\Phi_\infty = U_1\varphi_{1\infty} + U_2\varphi_{2\infty} + U_3\varphi_{3\infty},$$

где U_1, U_2, U_3 — проекции скорости тела на оси декартовой системы координат, а $\varphi_{i\infty}$ — потенциалы скоростей при движении тела вдоль i-й оси с единичной скоростью.

Каждый из потенциалов $\varphi_{i\infty}$ должен удовлетворять уравнению Лапласа, условию покоя жидкости на бесконечности и граничному условию на поверхности эллипсоида S $(\zeta = \zeta_0)$:

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial\varphi_{1\infty}}{\partial\zeta}\right|_S = \left.\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right|_S = c\mu,\\
&\left.\frac{\partial\varphi_{2\infty}}{\partial\zeta}\right|_S = \left.\frac{\partial y}{\partial\zeta}\right|_S = c\zeta_0\left(\zeta_0^2+1\right)^{-1/2}\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\cos\theta,\\
&\left.\frac{\partial\varphi_{3\infty}}{\partial\zeta}\right|_S = \left.\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right|_S = c\zeta_0\left(\zeta_0^2+1\right)^{-1/2}\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\sin\theta.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Из математической физики известно, что уравнение Лапласа, записанное в координатах сжатого эллипсоида вращения, имеет решения вида [10]

$$A_{nm}P_n^m(\mu)\,Q_n^m(i\zeta)\left\{\begin{array}{l}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{array}\right.,$$

где $P_n^m(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра I рода порядка n и ранга m, $Q_n^m(i\zeta)$ — присоединенные функции Лежандра II рода того же порядка и ранга, n и m — целые неотрицательные числа, причем $m \le n$.

Для нахождения потенциалов $\varphi_{i\infty}$ достаточно подобрать значения n и m так, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям. Поскольку $P_1^0(\mu) = \mu$, для $\varphi_{1\infty}$ следует выбрать $n = 1$, $m = 0$, тогда [11]

$$\varphi_{1\infty} = A_{10}\mu Q_1^0\left(i\zeta\right), \tag{1.2}$$

где

$$Q_1^0(i\zeta) = -q_1^0(\zeta) = \zeta \operatorname{arcctg} \zeta - 1.$$

Коэффициент A_{10} легко находится из граничного условия:

$$A_{10} = -c\left[\dot{q}_1^0\left(\zeta_0\right)\right]^{-1}.$$

Аналогично, так как $P_1^1(\mu) = \left(1 - \mu^2\right)^{1/2}$, для $\varphi_{2\infty}$ надо выбрать $n = m = 1$, тогда [11]

$$\varphi_{2\infty} = A_{11}\left(1 - \mu^2\right)^{1/2} Q_1^1(i\zeta)\cos\theta, \tag{1.3}$$

где

$$Q_1^1(i\zeta) = q_1^1(\zeta) = \left(\zeta^2 + 1\right)^{1/2}\left[\frac{\zeta}{\zeta^2 + 1} - \operatorname{arcctg}\zeta\right].$$

Коэффициент A_{11} находится из граничного условия:

$$A_{11} = c\zeta_0\left(\zeta_0^2 + 1\right)^{-1/2}\left[\dot{q}_1^1\left(\zeta_0\right)\right]^{-1}.$$

Потенциал $\varphi_{3\infty}$ отличается от $\varphi_{2\infty}$ только тем, что вместо $\cos\theta$ надо взять $\sin\theta$.

Зная потенциалы скоростей, можно найти присоединенные массы по формуле

$$\lambda_{ii}^{\infty} = -\rho\iint\limits_S \varphi_{i\infty}\frac{\partial\varphi_{i\infty}}{\partial n}dS, \tag{1.4}$$

где ρ — плотность жидкости.

Переходя в этой формуле к координатам сжатого эллипсоида вращения, получаем

$$\lambda_{ii}^{\infty} = -\rho c\left(\zeta_0^2 + 1\right)\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi_{i\infty}\frac{\partial\varphi_{i\infty}}{\partial\zeta}d\mu\, d\theta. \tag{1.5}$$

Подставляя в (1.5) соответствующие выражения для потенциала скоростей (1.2) и граничного условия (1.1), при движении вдоль оси симметри тела (оси Ox) находим

$$\lambda_{11}^{\infty} = \frac{4\pi}{3}\rho c^3\zeta_0\left(\zeta_0^2 + 1\right)\left[-\frac{q_1^0(\zeta_0)}{\zeta_0\,\dot{q}_1^0(\zeta_0)}\right] = \rho V \varkappa_{11}^{\infty},$$

где V — объем тела, $\varkappa_{11}^{\infty}$ — коэффициент присоединенной массы.

Полагая $\zeta_0 \to \infty$ и раскрывая неопределенность, получаем известный результат для шара:

$$\lambda_{11}^{\infty} = \frac{1}{2}\rho V.$$

Для диска ($\zeta_0 = 0$) также получаем известный результат

$$\lambda_{11}^{\infty} = \frac{2}{\pi}\,\rho V^{*}\,,$$

где V^* — объем сферы радиуса диска.

При движении вдоль оси Oy, используя (1.3) и (1.1), находим

$$\lambda_{22}^{\infty} = \rho V \left[-\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2 + 1}\,\frac{q_1^1(\zeta_0)}{\dot{q}_1^1(\zeta_0)} \right] = \rho V \varkappa_{22}^{\infty}.$$

Полагая $\zeta_0 \to \infty$ и раскрывая неопределенность, получаем известный результат для шара:

$$\lambda_{22}^{\infty} = \frac{1}{2}\,\rho V.$$

В другом предельном случае $\zeta_0 = 0$, раскрывая неопределенность, получаем ожидаемый результат для диска:

$$\lambda_{22}^{\infty} = 0.$$

В силу симметрии $\lambda_{33}^{\infty} = \lambda_{22}^{\infty}$, $\varkappa_{33}^{\infty} = \varkappa_{22}^{\infty}$. Численные значения λ_{11}^{∞} и λ_{22}^{∞} приведены ниже в табл. 1–3.

2. Приближенный метод нахождения потенциала скоростей в жидкости, ограниченной плоской стенкой. Рассмотрим движение сжатого эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой. Будем предполагать, что ось симметрии нашего тела параллельна стенке. Граничное условие на стенке сводится в идеальной жидкости к условию непротекания, т. е. $\partial\Phi^*/\partial n = 0$ в любой точке плоскости. Нетрудно понять, что если поместить с другой стороны стенки зеркальное «изображение» тела и заставить его двигаться симметричным образом, то в любой точке стенки нормальные компоненты скорости, вызванные движением этих тел, будут равны и противоположны по направлению, а компоненты скорости, лежащие в плоскости стенки, будут равны и сонаправлены. Следовательно, в идеальной жидкости рассматриваемая задача эквивалентна частному случаю задачи о движении двух симметричных тел в безграничной жидкости. Частный случай обусловлен требованием симметричности движения тел относительно стенки.

Искомый потенциал скорости Φ^* целесообразно представить в следующем виде:

$$\Phi^* = \Phi + \hat{\Phi},$$

где Φ — потенциал скорости, возникающий при движении 1-го тела в предположении, что 2-е тело («изображение») покоится, а $\hat{\Phi}$ имеет аналогичный смысл.

Заметим, что такое представление Φ^* имеет свои положительные и отрицательные стороны. С одной стороны, оно отражает полную равноправность обоих тел, с другой стороны, потенциал Φ^* оказывается выраженным в разных системах координат. Действительно, потенциал Φ известен в координатах, связанных с 1-м телом, а $\hat{\Phi}$ — в координатах, связанных со 2-м телом.

Потенциалы Φ и $\hat{\Phi}$ могут быть представлены (как и в безграничной жидкости) в виде линейной формы относительно поступательных скоростей, т. е.

$$\Phi = U_1\varphi_1 + U_2\varphi_2 + U_3\varphi_3,$$
$$\hat{\Phi} = U_1\hat{\varphi}_1 + U_2\hat{\varphi}_2 + U_3\hat{\varphi}_3.$$

Потенциалы φ_i и $\hat{\varphi}_i$ будем искать методом последовательных приближений. За первое приближение целесообразно принять соответствующий потенциал в безграничной жидкости, т. е. $\varphi_i^{(1)} = \varphi_{i\infty}$. Потенциал $\varphi_{i\infty}$ удовлетворяет граничному условию на поверхности 1-го тела по определению, но не будет удовлетворять таковому на поверхности 2-го тела. Для того чтобы удовлетворить граничному условию на 2-м теле, необходимо выразить скорости на поверхности 2-го тела (в координатах, связанных с 1-м телом) через координаты, связанные со 2-м телом. Хотя связь между декартовыми координатами двух тел весьма проста, связь между криволинейными координатами достаточно сложна. Именно это обстоятельство создает большие трудности на пути получения точного решения задачи.

Рассмотрим поток жидкости, создаваемый движением 1-го тела вблизи поверхности 2-го тела. Этот поток будет криволинейным и неравномерным. Однако, если тела находятся на большом расстоянии друг от друга, то этими факторами можно пренебречь и приближенно считать, что движение 1-го тела будет в окрестности 2-го тела создавать поступательный поток со скоростью $(-\Delta U_i)$ относительно осей координат, связанных со 2-м телом. При этом под $(-\Delta U_i)$ следует понимать скорость, создаваемую движением 1-го тела в центре 2-го тела. Теперь можно приближенно удовлетворить граничному условию на 2-м теле. Для этого достаточно наложить поток $+\Delta U_i \hat{\varphi}_{i\infty}$, т. е. второе приближение будет равно

$$\varphi_{i\infty} + \Delta U_i \hat{\varphi}_{i\infty}.$$

Теперь граничное условие на поверхности 2-го тела будет приближенно выполнено, но будет нарушено граничное условие на поверхности 1-го тела. Наложенный поток будет в окрестности 1-го тела создавать поступательный поток со скоростью $(-\Delta U_i^2)$ и т.д.

Продолжая этот процесс, получаем

$$\varphi_i = \varphi_{i\infty} + \Delta U_i \hat{\varphi}_{i\infty} + \Delta U_i^2 \varphi_{i\infty} + \dots \; . \tag{2.1}$$

Аналогично,

$$\hat{\varphi}_i = \hat{\varphi}_{i\infty} + \Delta U_i \varphi_{i\infty} + \Delta U_i^2 \hat{\varphi}_{i\infty} + \dots \; . \tag{2.2}$$

Следовательно,

$$\varphi_i + \hat{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i\infty} + \hat{\varphi}_{i\infty}}{1 - \Delta U_i}.$$

Удержание бесконечного числа членов в рядах (2.1) и (2.2) не повышает точности решения, но позволяет записать его в компактном виде.

Теперь вычислим присоединенные массы при поступательных движениях по формуле (1.4):

$$\lambda_{ii} = \frac{-\rho}{1 - \Delta U_i} \iint (\varphi_{i\infty} + \hat{\varphi}_{i\infty}) \frac{\partial \varphi_{i\infty}}{\partial n} \, dS.$$

Первое слагаемое дает

$$\lambda_{ii}^* = \rho V \frac{\varkappa_{ii}^\infty}{1 - \Delta U_i}.$$

Для нахождения 2-го слагаемого необходимо применить формулу Гаусса—Остроградского, т. е. перейти к объемному интегралу и воспользоваться уже принятыми предположениями

$$\left.\frac{\partial \hat{\varphi}_{1\infty}}{\partial x}\right|_{\hat{O}} = -\Delta U_1, \quad \left.\frac{\partial \hat{\varphi}_{2\infty}}{\partial y}\right|_{\hat{O}} = -\Delta U_2, \quad \left.\frac{\partial \hat{\varphi}_{3\infty}}{\partial z}\right|_{\hat{O}} = -\Delta U_3.$$

В результате получим

$$\lambda_{ii}^{**} = \rho V \frac{\Delta U_i}{1 - \Delta U_i}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{ii} = \rho V \frac{\varkappa_{ii}^{\infty} + \Delta U_i}{1 - \Delta U_i}. \tag{2.3}$$

Так как $\varkappa_{ii}^{\infty}$ уже вычислены, остается найти ΔU_i при различных расположениях рассматриваемого тела относительно стенки.

3. Присоединенные массы сжатого эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой. Пусть ось симметрии тела Ox параллельна стенке, а ось Oz перпендикулярна ей. С «изображением» тела свяжем декартову систему координат $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$, симметричную системе $Oxyz$. Эти системы координат будут связаны соотношениями

$$x = \hat{x}, \quad y = \hat{y}, \quad z + \hat{z} = 2h,$$

где h — расстояние от центра эллипсоида до стенки.

Декартовы координаты центра «изображения» $\hat{O}$ будут $x = 0$, $y = 0$, $z = 2h$. В криволинейных координатах будем иметь $\zeta = \eta$, $\mu = 0$, $\theta = \pi/2$. Величину η найдем из выражения для большой оси эллипсоида

$$c\left(\eta^2 + 1\right)^{1/2} = 2h,$$

откуда

$$\eta^2 = \left(\frac{2h}{c}\right)^2 - 1.$$

Вычислим скорость, создаваемую потенциалом $\varphi_{1\infty}$ (1.2) в центре «изображения» $\hat{O}$:

$$-\Delta U_1 = \left.\frac{\partial \varphi_{1\infty}}{H_\mu \partial \mu}\right|_{\hat{0}} = \left.\frac{c}{H_\mu} \frac{q_1^0(\zeta)}{\dot{q}_1^0(\zeta_0)}\right|_{\hat{0}} = \frac{q_1^0(\eta)}{\eta \dot{q}_1^0(\zeta_0)}. \tag{3.1}$$

Нетрудно убедиться, что компоненты скорости по осям Oy и Oz обращаются в 0.

Теперь найдем скорость, создаваемую потенциалом $\varphi_{2\infty}$ (1.3) в точке $\hat{O}$:

$$-\Delta U_2 = -\left.\frac{\partial \varphi_{2\infty}}{H_\theta \partial \theta}\right|_{\hat{0}} = -\frac{c}{H_\theta} \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 + 1}} \left.\frac{q_1^1(\zeta)}{\dot{q}_1^1(\zeta_0)} (-\sin\theta)\right|_{\hat{0}} = \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 + 1}\sqrt{\eta^2 + 1}} \frac{q_1^1(\eta)}{\dot{q}_1^1(\zeta_0)}. \tag{3.2}$$

Остальные компоненты скорости в точке $\hat{O}$ обращаются в 0.

Наконец, найдем скорость, создаваемую потенциалом $\varphi_{3\infty}$ в точке $\hat{O}$:

$$-\Delta U_3 = \left.\frac{\partial \varphi_{3\infty}}{H_\zeta \partial \zeta}\right|_{\hat{O}} = \frac{c}{H_\zeta} \frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2 + 1}} \left.\frac{\dot{q}_1^1(\zeta)}{\dot{q}_1^1(\zeta_0)} \sin\theta\right|_{\hat{O}} = \frac{\zeta_0 \sqrt{\eta^2 + 1}}{\eta\sqrt{\zeta_0^2 + 1}} \frac{\dot{q}_1^1(\eta)}{\dot{q}_1^1(\zeta_0)}. \tag{3.3}$$

Заметим, что скорость точки $\hat{O}$, создаваемая потенциалом $\varphi_{3\infty}$, будет положительной относительно оси Oz и, следовательно, отрицательной относительно оси $\hat{O}\hat{z}$. Остальные компоненты скорости точки $\hat{O}$ будут равны 0.

Подставляя (3.1) в формулу (2.3), находим приближенное значение присоединенной массы сжатого эллипсоида вращения при его движении вдоль оси Ox при наличии стенки (табл. 1).

Таблица 1. **Значения $\varkappa_{11}$ и $\varkappa_{11}^{\infty}$**

h/a	Значения a/b					
	1	1,25	1,75	2,5	4	8
1,125	0,644	0,660	0,995	1,53	2,65	6,12
1,5	0,558	0,655	0,973	1,47	2,48	5,33
2	0,524	0,653	0,964	1,44	2,42	5,07
5	0,502	0,652	0,959	1,43	2,38	4,92
∞	0,5	0,652	0,959	1,43	2,38	4,91

Таблица 2. **Значения $\varkappa_{22}$ и $\varkappa_{22}^{\infty}$**

h/a	Значения a/b					
	1	1,25	1,75	2,5	4	8
1,125	0,569	0,463	0,374	0,279	0,185	0,0972
1,5	0,528	0,446	0,357	0,267	0,178	0,0944
2	0,512	0,441	0,349	0,263	0,176	0,0933
5	0,501	0,434	0,344	0,259	0,174	0,0926
∞	0,5	0,434	0,343	0,259	0,174	0,0925

Таблица 3. **Значения $\varkappa_{33}$ и $\varkappa_{33}^{\infty}$**

h/a	Значения a/b					
	1	1,25	1,75	2,5	4	8
1,125	0,569	0,496	0,416	0,302	0,197	0,103
1,5	0,528	0,459	0,372	0,276	0,183	0,0965
2	0,512	0,443	0,355	0,266	0,178	0,0941
5	0,501	0,435	0,344	0,260	0,174	0,0926
∞	0,5	0,434	0,343	0,259	0,174	0,0925

Аналогично найдем значения присоединенной массы эллипсоида вращения при его движении вдоль оси Oy при наличии стенки. Результаты расчетов даны в табл. 2.

Подставляя (3.3) в формулу (2.3), находим приближенное значение присоединенной массы сжатого эллипсоида вращения при его движении вдоль оси Oz при наличии стенки. Результаты расчетов приведены в табл. 3.

Пусть теперь ось симметрии тела Ox будет перпендикулярна стенке. С «изображением» тела свяжем декартову систему координат $\hat{O}\hat{x}\hat{y}\hat{z}$, симметричную системе $Oxyz$. Эти системы координат будут связаны соотношениями

$$x + \hat{x} = 2h, \qquad y = \hat{y}, \qquad z = \hat{z}.$$

Декартовы координаты центра «изображения» $\hat{O}$ будут $x = 2h$, $y = 0$, $z = 0$, а в криволинейных координатах будем иметь $\zeta = \eta^*$, $\mu = 1$, $\theta = 0$. Величину η^* найдем из выражения для малой оси эллипсоида:

$$c\eta^* = 2h.$$

Вычислим скорость, создаваемую потенциалом $\varphi_{1\infty}$ в центре «изображения» $\hat{O}$:

$$-\Delta U_1^* = \frac{\partial \varphi_{1\infty}}{H_\zeta \partial \zeta} = \frac{c}{H_\zeta} \frac{\dot{q}_1^0(\zeta)}{\dot{q}_1^0(\zeta_0)}\bigg|_{\hat{0}} = \frac{\dot{q}_1^0\,(\eta^*)}{\dot{q}_1^0(\zeta_0)} \tag{3.4}$$

Отметим,что скорость точки $\hat{O}$, создаваемая потенциалом $\varphi_{1\infty}$, будет положительной относительно оси Ox и, следовательно, отрицательной относительно оси $\hat{O}\hat{x}$. Остальные компоненты скорости точки $\hat{O}$ будут равны 0.

Теперь найдем скорость, создаваемую потенциалом $\varphi_{2\infty}$ в точке $\hat{O}$

$$-\Delta U_2^* = -\frac{\partial\varphi_{2\infty}}{H_\mu \partial\mu} = -\frac{\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0^2+1}\sqrt{\eta^{*2}+1}} \frac{q_1^1(\eta^*)}{\dot{q}_1^1(\zeta_0)}. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.4) в формулу (2.3), находим приближенное значение присоединенной массы сжатого эллипсоида вращения при его движении вдоль оси Ox при наличии стенки (табл. 4).

Таблица 4. **Значения $\varkappa_{11}^*$ и $\varkappa_{11}^\infty$**

h/b	Значения a/b					
	1	1,25	1,75	2,5	4	8
1,125	0,644	0,906	1,55	2,87	6,80	25,9
1,5	0,558	0,756	1,21	2,09	4,60	16,6
2	0,524	0,695	1,07	1,74	3,50	11,6
5	0,502	0,656	0,965	1,45	2,48	5,87
∞	0,5	0,652	0,959	1,43	2,38	4,91

Наконец, подставляя (3.5) в (2.3), находим значения присоединенной массы рассматриваемого тела при его движении вдоль оси Oy при наличии стенки (табл. 5).

Таблица 5. **Значения $\varkappa_{22}^*$ и $\varkappa_{22}^\infty$**

h/b	Значения a/b					
	1	1,25	1,75	2,5	4	8
1,125	0,569	0,484	0,459	0,394	0,303	0,178
1,5	0,528	0,456	0,413	0,333	0,261	0,164
2	0,512	0,443	0,369	0,297	0,228	0,149
5	0,501	0,435	0,345	0,262	0,180	0,0950
∞	0,5	0,434	0,343	0,259	0,174	0,0925

О точности полученных значений можно судить только косвенно. Так как известно точное решение для шара в виде ряда по степеням a/h, сравнение его с приближенным решением показало совпадение первых трех членов ряда, два из которых учитывают наличие стенки [9].

Литература

1. *Stokes G.* On some Cases of Fluid Motion // Trans. of the Cambr. Phil. Soc. Vol. VIII. 1844. P. 1.

2. *Hicks W.* On the Motion of Two Spheres in a Fluid // Phil. Trans. of the Royal Society. Vol. 171. 1880. P. 1. С. 455–492.

3. *Basset A.* On the Motion of Two Spheres in a Liquid, and Allied Problems // Proc. of the London Math. Soc. Vol. XVIII. 1886–1887. С. 369–377.

4. *Herman R.* On the Motion of two spheres in fluid and allied problems // The Quart. Journ. of pure and applied Math. Vol. XXII. 1887.

5. *Hicks W.* On the Motion of Two Cylinders in a Fluid // The Quart. Journ. of pure and applied Math. Vol. XVI. 1879.

6. *Eisenberg Ph.* An Approximate Solution for Incompressible Flow About an Ellipsoid Near a Plane Wall // Journ. of Appl. Mech. Vol. 17, N 2. 1950. С. 154–158.

7. *Havelock T.* Ship vibrations: the virtual inertia of a spheroid in shallow water // Quart. Trans. of Inst. of Naval Archit. Vol. 95, N 1. 1953. С. 1–9.

8. *Сабанеев В.* О движении эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой // Вестн. Ленингр. ун-та. Серия матем., мех. и астр. № 13. Вып. 3. 1958. С. 132–146.

9. *Сабанеев В.* Присоединенные массы эллипсоида вращения, движущегося в жидкости, ограниченной плоской стенкой // Вестн. Ленингр. ун-та. Серия матем., мех. и астр. №19. Вып. 4. 1958. С. 168–186.

10. *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы математической физики. Т. II. М.: Изд. иностр. лит., 1960. С. 886.

11. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. С. 928.

12. *Короткин А.* Присоединенные массы судостроительных конструкций: Справочник. СПб.: Мор Вест, 2007. С. 448.

Статья поступила в редакцию 27 июня 2013 г.

Сведения об авторе: *Сабанеев Валентин Серафимович* — кандидат физико-математических наук, доцент; lesha@westcall.spb.ru

ADDED MASSES OF AN OBLATE SPHEROID NEAR A PLANE WALL

Valentin S. Sabaneev

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vssabaneev@gmail.com

In the first part of the paper, the motion of an oblate spheroid in unlimited liquid is considered. Velocity potentials and added masses are calculated in the cases the motion is along and across to the body symmetry axis.

In the second part the approximate method of the velocity potential calculating in the case the motion near a plane wall is presented. It is shown that the motion near a plane wall is equivalent to the symmetric motion of two identical spheroids in an unlimited fluid with the symmetry plane coinciding with the plane wall. Approximate formulae including the unknown velocity of the second body center (the "image" center) are given for the velocity potentials and added masses.

Calculating the "image" center velocity in cases of parallel and orthogonal direction of the symmetry axis to the plane wall has been done. The results are compared with the exact solutions for the sphere and presented in tables. Refs 12. Tables 5.

Keywords: ideal fluid, added masses, oblate spheroid, plane wall.