АСТРОНОМИЯ

УДК 521.11

ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ ПО МОДУЛЮ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ*

Т. Н. Санникова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматривается движение точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения $\mathbf{P}$. Предполагается, что $\mathbf{P}$ мало́ по сравнению с основным ускорением, вызванным тяготением $\mathcal{S}$. Второе допущение состоит в постоянстве вектора $\mathbf{P}$ в одной из двух стандартных в небесной механике систем отсчета с общим началом $\mathcal{S}$, но разными направлениями осей: основная инерциальная $\mathcal{O}$ с неподвижными ортами и сопутствующая $\mathcal{O}_1$ с вращающимися ортами, направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). К уравнениям типа Эйлера в оскулирующих элементах применено осредняющее преобразование. Именно, в первом приближении выведены формулы замены переменных от оскулирующих элементов к средним и получены уравнения движения в средних элементах. Результат выражен в замкнутой форме, без разложения в ряды по степеням эксцентриситета или наклона. При постоянстве $\mathbf{P}$ в системе $\mathcal{O}$ уравнения движения консервативны. При постоянстве $\mathbf{P}$ в системе $\mathcal{O}_1$ уравнения движения консервативны лишь при условии центральности ускорения $\mathbf{P}$. Библиогр. 11 назв.

Ключевые слова: изменение оскулирующих элементов, осредняющее преобразование, решение в замкнутой форме.

Введение. Пусть точка нулевой массы $\mathcal{A}$ движется под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ и возмущающего ускорения $\mathbf{P}$. Введем две стандартные в небесной механике системы отсчета с общим началом $\mathcal{S}$, но разными направлениями осей: основную инерциальную $\mathcal{O}$ с неподвижными ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и сопутствующую $\mathcal{O}_1$ с вращающимися ортами $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$, направленными по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). В качестве вспомогательной понадобится также система $\mathcal{O}'$ с ортами $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$, направленными в перицентр оскулирующей орбиты, по нормали к $\mathbf{i}'$ в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения и бинормали.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-02-00804) и Программы проведения фундаментальных исследований СПбГУ по приоритетным направлениям (грант № 6.37.110.2011).

Исследуем движение $\mathcal{A}$, считая компоненты вектора $\mathbf{P}$ постоянными в одной из двух указанных систем координат. В настоящей статье мы воспользуемся уравнениями Эйлера в оскулирующих элементах и применим к ним осредняющее преобразование, считая отношение возмущающего ускорения $|\mathbf{P}|$ к основному $\varkappa^2/r^2$ малой величиной и ограничиваясь возмущениями первого порядка. Здесь $r = \mathcal{SA}$, $\varkappa^2$ — произведение постоянной тяготения на массу тела $\mathcal{S}$. Решение осредненных уравнений мы исследуем в следующей статье.

Поставленная модельная задача не имела приложений в докосмическую эру. Но теперь можно указать по меньшей мере два приложения.

Во-первых, движение космического аппарата с малой постоянной по модулю тягой. Например, для перевода ИСЗ на более высокую орбиту проще всего (с точки зрения управления движением) считать $\mathbf{P}$ постоянным в системе $\mathcal{O}_1$.

Во-вторых, движение астероида, на котором установлен реактивный двигатель, обеспечивающий малую постоянную по модулю тягу с целью, например, предотвращения столкновения с Землей. Если астероид не вращается или двигатель установлен на одном из его полюсов, то $\mathbf{P}$ постоянно в системе $\mathcal{O}$. Однако при установке двигателя на зависнущем рядом с астероидом КА по схеме *гравитационный тягач* [1] легко осуществить постоянство $\mathbf{P}$ и в системе $\mathcal{O}_1$.

Уравнения движения и их осредняющее преобразование. Обратимся к уравнениям движения типа Эйлера в оскулирующих элементах [2]. За последние выберем кеплеровские элементы $\omega, e, i, \Omega, \sigma, M$ — среднее движение, эксцентриситет, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия. Выбор среднего движения вместо большой полуоси a сильно упрощает операции осреднения, поскольку скорость изменения M в невозмущенном движении линейно зависит от ω, но существенно нелинейно от a.

Принято различать вектор медленных переменных $\mathbf{x} = (\omega, e, i, \Omega, \sigma)$, постоянных в невозмущенном движении, и скалярную быструю переменную $y = M$, линейно зависящую от $x_1 = \omega$. Здесь и ниже компоненты трехмерного вектора $\mathbf{P}$ и пятимерных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{X}, \mathbf{F}$ обозначены теми же буквами с номером компоненты в виде нижнего индекса.

Уравнения типа Эйлера в указанных системах отсчета $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_1$ приведены в [3]. В любой из них они имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mu \mathbf{f}(\mathbf{x}, y), \\ \dot{y} &= x_1 + \mu g(\mathbf{x}, y). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени t, μ — малый параметр, который мы вводим искусственно и считаем постоянным, а $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ и g — вещественно-аналитические функции в окрестности начальных данных. Более того, аналитичность гарантируется при всех вещественных $\omega, \Omega, \sigma, M$. Ограничимся эллиптическим оскулирующим движением. Особенности в этом случае возникают при $e = 0$ и $\sin i = 0$, но они устраняются переходом к переменным типа Лагранжа.

Совершим замену переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + \mu \mathbf{u}(\mathbf{X}, Y), \\ y &= Y + \mu v(\mathbf{X}, Y), \end{aligned} \tag{2}$$

в результате чего (1) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mu \mathbf{F}(\mathbf{X}, Y) + \ldots, \\ \dot{Y} &= X_1 + \mu G(\mathbf{X}, Y) + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

В дальнейшем мы ограничимся возмущениями первого порядка и не будем указывать на наличие членов более высокого порядка.

Согласно [4, 5] функции $\mathbf{u}, v$ и $\mathbf{F}, G$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} X_1 \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, Y)}{\partial Y} &= \mathbf{f}(\mathbf{X}, Y) - \mathbf{F}(\mathbf{X}, Y), \\ X_1 \frac{\partial v(\mathbf{X}, Y)}{\partial Y} &= u_1(\mathbf{X}, Y) + g(\mathbf{X}, Y) - G(\mathbf{X}, Y). \end{aligned} \tag{4}$$

Первые пять (в скалярной форме) уравнений независимы друг от друга и от последнего уравнения, и каждое содержит две неизвестные функции u_k, F_k $(k = 1, \ldots, 5)$. После определения u_1 в последнем уравнении (4) также остаются две подлежащие определению функции: v, G.

Уравнения вида (4) хорошо изучены в небесной механике. В нашем случае лишь одна переменная M является быстрой, поэтому малые знаменатели не появляются и решение находится элементарно. Согласно методу осреднения за $\mathbf{F}$ следует взять среднее значение $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathcal{E}\mathbf{f}(\mathbf{X}, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(\mathbf{X}, Y)\, dY. \tag{5}$$

После этого $\mathbf{u}$ находится простой квадратурой:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, Y) = \mathcal{I}\mathbf{f}(\mathbf{X}, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{X_1} \int \left[\mathbf{f}(\mathbf{X}, Y) - \mathcal{E}\mathbf{f}(\mathbf{X}, Y)\right] dY, \tag{6}$$

где первообразная выделяется однозначно условием нулевого среднего:

$$\mathcal{E}\mathbf{u} = 0. \tag{7}$$

Теперь однозначно находятся G и v:

$$G(\mathbf{X}) = \mathcal{E}g(\mathbf{X}, Y), \qquad v(\mathbf{X}, Y) = \mathcal{I}\left[u_1(\mathbf{X}, Y) + g(\mathbf{X}, Y)\right], \qquad \mathcal{E}v = 0. \tag{8}$$

Таким образом, функции $\mathbf{F}, G$ не зависят от Y, а функции $\mathbf{u}, v$ периодичны по Y и обладают нулевым средним.

Основная система координат $\mathcal{O}$. Правые части уравнений (1) в функции от истинной θ и от эксцентрической аномалии E содержатся в [3]. В задаче о движении ИСЗ выгоднее использовать истинную аномалию [6]. В нашей задаче лучше использовать эксцентрическую:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{3}{r}\left[\sin E\, \Phi_1 - \eta \cos E\, \Phi_2\right], \\ f_2 &= \frac{\eta}{2\omega r}\left[-\eta \sin 2E\, \Phi_1 + (3 - 4e \cos E + \cos 2E)\, \Phi_2\right], \end{aligned}$$

$$f_3 = \frac{1}{\omega a \eta}\left[\cos\sigma(\cos E - e) - \eta\sin\sigma\sin E\right]\Phi_3\,,$$

$$f_4 = \frac{1}{\omega a \eta \sin i}\left[\sin\sigma(\cos E - e) + \eta\cos\sigma\sin E\right]\Phi_3\,,$$

$$f_5 = \frac{1}{2\omega r e}\Big[\eta\,(-3 + 2e\cos E + \cos 2E)\,\Phi_1 + {} + (-2e\sin E + \sin 2E)\,\Phi_2\Big] - \cos i f_4\,,$$

$$g = \frac{1}{2\omega r e}\Big\{\big[3(1+e^2) - 2e(3+e^2)\cos E - (1-3e^2)\cos 2E\big]\,\Phi_1 - {} - \eta\,\big[2e\sin E + (1-2e^2)\sin 2E\big]\,\Phi_2\Big\}. \tag{9}$$

Здесь введены зависящие только от медленных переменных функции

$$\eta = \sqrt{1-e^2}\,, \qquad \Phi_1 = b_{11}P_1 + b_{21}P_2 + b_{31}P_3\,,$$

$$\Phi_2 = b_{12}P_1 + b_{22}P_2 + b_{32}P_3\,, \qquad \Phi_3 = b_{13}P_1 + b_{23}P_2 + b_{33}P_3\,. \tag{10}$$

Элементы

$$\begin{array}{lll}
b_{11} = \cos\sigma\cos\Omega - \cos i\sin\sigma\sin\Omega, & b_{12} = -\sin\sigma\cos\Omega - \cos i\cos\sigma\sin\Omega, & b_{13} = \sin i\sin\Omega,\\
b_{21} = \cos\sigma\sin\Omega + \cos i\sin\sigma\cos\Omega, & b_{22} = -\sin\sigma\sin\Omega + \cos i\cos\sigma\cos\Omega, & b_{23} = -\sin i\cos\Omega,\\
b_{31} = \sin i\sin\sigma, & b_{32} = \sin i\cos\sigma, & b_{33} = \cos i
\end{array} \tag{11}$$

образуют матрицу поворота $\mathcal{B}(i,\Omega,\sigma)$ от системы $\mathcal{O}$ к системе $\mathcal{O}'$:

$$\begin{pmatrix} P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix} = \mathcal{B}(i,\Omega,\sigma)\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\end{pmatrix}, \tag{12}$$

так что Φ_1, Φ_2, Φ_3 — компоненты вектора $\mathbf{P}$ в системе $\mathcal{O}'$. Обозначения из [3] слегка изменены.

Средние значения $\mathbf{f}, g$ вычисляются без труда с учетом приведенных в Приложении формул:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = \frac{3\eta}{2\omega a}\Phi_2\,, \quad F_3 = -\frac{3e}{2\omega a\eta}\cos\sigma\Phi_3\,, \quad F_4 = -\frac{3e}{2\omega a\eta\sin i}\sin\sigma\Phi_3\,,$$

$$F_5 = -\frac{3\eta}{2\omega a e}\Phi_1 + \frac{3e\operatorname{ctg} i}{2\omega a\eta}\sin\sigma\Phi_3\,, \quad G = \frac{3(1+e^2)}{2\omega a e}\Phi_1\,. \tag{13}$$

Столь же просто вычисляются функции замены переменных $\mathbf{u}, v$ с учетом приведенных в Приложении формул:

$$u_1 = -\frac{3}{2\omega a}\left[(e + 2\cos E)\Phi_1 + 2\eta\sin E\,\Phi_2\right],$$

$$\mathcal{I}u_1 = \frac{3}{4\omega^2 a}\Big\{[-2(2-e^2)\sin E + e\sin 2E]\Phi_1 + \eta[2e + 4\cos E - e\cos 2E]\Phi_2\Big\},$$

$$u_2 = \frac{\eta}{4\omega^2 a}[\eta\cos 2E\,\Phi_1 + (-2e\sin E + \sin 2E)\Phi_2],$$

$$u_3 = \frac{1}{4\omega^2 a\eta}\left\{[2(2-e^2)\sin E - e\sin 2E]\cos\sigma + \eta[2e + 4\cos E - e\cos 2E]\sin\sigma\right\}\Phi_3\,,$$

$$u_4 = \frac{1}{4\omega^2 a\eta \sin i}\left\{[2(2-e^2)\sin E - e\sin 2E]\sin\sigma - \eta[2e + 4\cos E - e\cos 2E]\cos\sigma\right\}\Phi_3\,,$$

$$u_5 = \frac{1}{4\omega^2 ae}\Big\{\eta(-2e\sin E + \sin 2E)\Phi_1 + (2e^2 + 4e\cos E - \cos 2E)\Phi_2\Big\} - \cos i\, u_4\,,$$

$$\mathcal{I}g = \frac{1}{4\omega^2 ae}\Big\{[-2e(3-e^2)\sin E - (1-3e^2)\sin 2E]\Phi_1 + \\ + \eta[2e^2 + 4e\cos E + (1-2e^2)\cos 2E]\Phi_2\Big\},$$

$$v = \frac{1}{4\omega^2 ae}\Big\{[-2e(9-4e^2)\sin E - (1-6e^2)\sin 2E]\Phi_1 + \\ + \eta[8e^2 + 16e\cos E + (1-5e^2)\cos 2E]\Phi_2\Big\}. \tag{14}$$

Исследуем свойства функций $\mathbf{F}, G$, и $\mathbf{u}, v$.

1. Функция F_1 тождественно равна нулю. Это свойство вытекает из теоремы Лагранжа о неизменности (в первом приближении) больших полуосей для консервативных систем [7]. Консервативность системы (1) очевидна: возмущающее ускорение $\mathbf{P}$ порождается пертурбационной функцией

$$R = \xi_1 P_1 + \xi_2 P_2 + \xi_3 P_3\,, \tag{15}$$

где ξ_k — декартовы координаты точки $\mathcal{A}$.

Как следствие получаем постоянство X_1, т. е. неизменность осредненных среднего движения ω и большой полуоси a.

2. Среднее значение R находится элементарно, см. Приложение:

$$\mathcal{E}R = -\frac{3}{2}ae\,(b_{11}P_1 + b_{21}P_2 + b_{31}P_3)\,, \tag{16}$$

где b_{11}, b_{21}, b_{31} даются формулами (11). Ясно, что $\mathcal{E}R$ является интегралом осредненной системы (3).

3. Функции F_4 и F_5 содержат $\sin i$ в знаменателях, а функции F_5 и G содержат e в знаменателях. Эти особенности — следствие линейной зависимости $\mathcal{E}R$ от e и $\sin i$ — обычны для небесной механики, и они исчезают после перехода к элементам типа Лагранжа.

4. Функции $\mathbf{u}, v$ — тригонометрические многочлены второй степени от эксцентрической аномалии. Их среднее значение (по средней аномалии) равно нулю. Функции u_4 и u_5 содержат $\sin i$ в знаменателях, а функции u_5 и v содержат e в знаменателях.

Сопутствующая система координат $\mathcal{O}_1$. Обозначим по-прежнему правые части уравнений типа Эйлера в системе $\mathcal{O}_1$ через $\mathbf{f}, g$. Это не приводит к путанице, поскольку системы $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_1$ не используются одновременно. Тогда согласно [3]

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{3}{r}\left(e \sin E\, S + \eta\, T\right), \\
f_2 &= \frac{\eta}{\omega a}\left[\frac{a\eta}{r}\sin E\, S + \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right) T\right], \\
f_5 &= \frac{1}{\omega a e}\left[\frac{a\eta}{r}(e-\cos E)S + \left(\frac{p}{r}+1\right)\sin E\, T\right] - \cos i f_4\,, \\
g &= \frac{1}{\omega a e}\left\{\frac{a}{r}[-3e + (1+3e^2)\cos E - e^3\cos 2E]\, S - \eta\left(\frac{p}{r}+1\right)\sin E\, T\right\},
\end{aligned} \tag{17}$$

где в системе $\mathcal{O}_1$ принято $\mathbf{P} = (S, T, W)$; $p = a(1-e^2)$.

Вычислим правые части осредненных уравнений:

$$F_1 = -\frac{3\eta}{a}T, \quad F_2 = -\frac{3e\eta}{2\omega a}T, \quad F_5 = \frac{\eta}{\omega a}S + \frac{3e\operatorname{ctg} i}{2\omega a\eta}\sin\sigma W, \quad G = -\frac{3}{\omega a}S. \tag{18}$$

Вычислим функции замены переменных $\mathbf{u}, v$:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{3e}{2\omega a}\left[(e+2\cos E)S - 2\eta\sin E\, T\right], \\
\mathcal{I}u_1 &= \frac{3e}{4\omega^2 a}\Big\{[2(2-e^2)\sin E - e\sin 2E]S + \eta[2e + 4\cos E - e\cos 2E]T\Big\}, \\
u_2 &= \frac{\eta}{4\omega^2 a}[-2\eta(e+2\cos E)S + \big[2(4-3e^2)\sin E - e\sin 2E\big]\, T, \\
u_5 &= -\frac{1}{4\omega^2 a e}\Big\{4\eta^3\sin ES + [2e(2-e^2) + 4(2-e^2)\cos E - e\cos 2E)T\Big\} - \cos i u_4\,, \\
\mathcal{I}g &= \frac{1}{4\omega^2 a e}\Big\{2(2\sin E - e^3\sin 2E)S + \\
&\qquad + \eta[2e(2-e^2) + 4(2-e^2)\cos E - e\cos 2E]T\Big\}, \\
v &= \frac{1}{4\omega^2 a e}\Big\{[2(2+6e^2-3e^4)\sin E - 5e^3\sin 2E]S + \\
&\qquad + \eta[4e(1+e^2) + 8(1+e^2)\cos E - e(1+3e^2)\cos 2E]T\Big\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Мы не выписали выражений для $f_3, f_4, F_3, F_4, u_3, u_4$, поскольку они совпадают с прежними (9), (13), (14) вследствие очевидного равенства $\Phi_3 = W$.

Исследуем свойства $\mathbf{F}, G$ и $\mathbf{u}, v$.

1. Функция F_1 уже не нуль при $T \neq 0$. Она зависит от a и e. Это свойство — следствие неконсервативности системы (1). Докажем более сильное свойство: *возмущающее ускорение* $\mathbf{P}$ *нелинейно зависит от скорости*, если $T \neq 0$ или $W \neq 0$.

Компоненты $\mathbf{P}$ в основной $\mathcal{O}$ и сопровождающей $\mathcal{O}_1$ системах координат связаны аналогичным (12) соотношением

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B}(i, \Omega, u)\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где через $u = \sigma + \theta$ обозначен аргумент широты. В силу постоянства S, T, W достаточно исследовать зависимость от скорости матрицы $\mathcal{B}$.

По смыслу матрицы $\mathcal{B}$ ее первый столбец равен $\mathbf{r}/r$. Второй столбец равен $\mathbf{v}_T/v_T$, где $\mathbf{v}_T = \mathbf{v} - (\dot{r}/r)\mathbf{r}$ — трансверсальная скорость. Третий столбец равен $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}/|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|$. Таким образом, элементы первого столбца не зависят от скоростей $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$, а элементы второго и третьего столбца зависят от скоростей нелинейно, что и доказывает наше утверждение.

Согласно [8, гл. 4, § 5], [9, § 6.6], только при линейной зависимости сил от скоростей возможно существование обобщенного потенциала. Поэтому он может существовать лишь при условии

$$T = W = 0.$$

В этом случае

$$P_1 = \frac{\xi_1}{r}S, \qquad P_2 = \frac{\xi_2}{r}S, \qquad P_3 = \frac{\xi_3}{r}S,$$

так что существует обычный потенциал

$$R = rS, \qquad \mathcal{E}R = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)S,$$

и система уравнений движения консервативна. Отличны от нуля только F_5 и G, так что средние элементы a, ω, e, i, Ω постоянны. Это — хорошо известное свойство движения в центральном поле.

При $T > 0$ среднее движение и эксцентриситет уменьшаются, большая полуось растет. При $T < 0$ среднее движение и эксцентриситет растут, большая полуось уменьшается. При $T = 0$ эти величины постоянны.

2. Функции F_4 и F_5 содержат $\sin i$ в знаменателях, но e в знаменателях уже не появляется.

3. Функции $\mathbf{u}, v$ — тригонометрические многочлены второй степени от эксцентрической аномалии. Их среднее значение (по средней аномалии) равно нулю. Функции u_4 и u_5 содержат $\sin i$ в знаменателях, а функции u_5 и v содержат e в знаменателях.

Заключение. В двух рассмотренных случаях (постоянство возмущающего ускорения $\mathbf{P}$ в системах отсчета $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_1$) получены замкнутые формулы для перехода от оскулирующих элементов $\mathbf{x}, y$ к средним $\mathbf{X}, Y$ и найдены дифференциальные уравнения изменения средних элементов. Во всех случаях разности оскулирующих и средних элементов оказались тригонометрическими многочленами второго порядка от эксцентрической аномалии. Правые части уравнений для средних элементов исключительно просты. Вряд ли возможно предложить другую задачу небесной механики, решение которой методом осреднения в первом порядке по малому параметру оказалось бы столь простым.

Автор выражает сердечную благодарность и искреннюю признательность научному руководителю профессору, доктору физ.-мат. наук Константину Владиславовичу Холшевникову за неоценимую помощь в подготовке статьи. Автор также благодарит ст. науч. сотрудника Лаборатории динамики планет и малых тел ГАО РАН, кандидата физ.-мат. наук Александра Викторовича Мельникова за полезные замечания.

Средние значения и первообразные от некоторых функций эллиптического движения

Все нужные нам величины считаются функциями средней аномалии и могут быть выражены явно как аналитические 2π-периодические функции эксцентрической аномалии, зависящие от параметра e, $0 \leqslant e < 1$.

Любая переменная может быть представлена суммой четной и нечетной функции, причем свойства четности/нечетности по переменным M и E совпадают. Среднее значение нечетной функции равно нулю. Поэтому ограничимся четными функциями, для которых среднее значение равно

$$\mathcal{E}w = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi w\,dM = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi w(1 - e\cos E)\,dE. \tag{21}$$

Полезными могут оказаться следующие свойства:

$$\int_0^\pi w(\cos x)\,dx = 0, \quad \text{если} \quad w(\cos x) = -w(-\cos x), \tag{22}$$

$$\int_0^\pi w(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} w(\cos x)\,dx, \quad \text{если} \quad w(\cos x) = w(-\cos x). \tag{23}$$

Приведем средние значения нужных нам функций, многие из которых можно найти в [10, 11]:

$$\mathcal{E}\cos E = -\frac{e}{2}\,, \quad \mathcal{E}\cos(k+1)E = \mathcal{E}\frac{a\cos kE}{r} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\mathcal{E}\frac{a}{r} = 1, \qquad \mathcal{E}\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2}\,, \qquad \mathcal{E}\frac{r}{a}\cos\theta = -\frac{3}{2}e, \qquad \mathcal{E}\xi_k = -\frac{3}{2}aeb_{k1}\,.$$

Здесь ξ_k — декартовы координаты, величины b_{k1} даются формулами (11).

Теперь легко вычислить первообразные при натуральном k:

$$\int(\cos E - \mathcal{E}\cos E)\,dM = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\sin E - \frac{e}{4}\sin 2E,$$

$$\int \sin E\,dM = -\frac{e}{2} - \cos E + \frac{e}{4}\cos 2E,$$

$$\int\left(\frac{a}{r} - \mathcal{E}\frac{a}{r}\right)\,dM = E - M = e\sin E, \quad \int\left(\frac{r}{a} - \mathcal{E}\frac{r}{a}\right)\,dM = -\frac{e}{4}[2(2-e^2)\sin E - e\sin 2E],$$

$$\int\frac{a\cos kE}{r}\,dM = \frac{\sin kE}{k}\,, \quad \int\frac{a\sin E}{r}\,dM = -\frac{e}{2} - \cos E,$$

$$\int\frac{a\sin(k+1)E}{r}\,dM = -\frac{\cos(k+1)E}{k+1}.$$

Выписанные первообразные обладают нулевым средним.

Литература

1. *Lu E. T, Love S. G.* Gravitational tractor for towing asteroids // Nature, November 2005. 438. P. 177–178.

2. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.

3. *Санникова Т. Н., Холшевников К. В.* Уравнения движения в оскулирующих элементах в различных системах отсчета // Вестн. С.-Петерб. ун-та, 2013. Сер. 1. Вып. 4. С. 134–145.

4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ФМ, 1963. 412 с.

5. *Холшевников К. В.* Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 208 с.

6. *Брауер Д., Клеменс Дж.* Методы небесной механики. М.: Мир, 1964. 516 с.

7. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике. М.: Наука, 1965. 572 с.

8. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1980. 368 с.

9. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.

10. *Battin R. H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. Reston, Virginia, USA: AIAA educ. ser. 1987, 800 p.

11. *Холшевников К. В., Титов В. Б.* Задача двух тел: учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 180 с.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

Сведение об авторе: *Санникова Татьяна Николаевна* — аспирант; tnsannikova@gmail.com

AVERAGED EQUATIONS OF MOTION IN A CENTRAL FIELD IN THE PRESENCE OF A CONSTANT IN ABSOLUTE VALUE DISTURBING ACCELERATION

Tatiana N. Sannikova

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; tnsannikova@gmail.com

The motion of a point of zero mass due to the attraction to a central body $\mathcal{S}$ and the disturbing acceleration $\mathbf{P}$ is considered. We suppose that $\mathbf{P}$ is small in comparison with the main acceleration caused by the gravitation of $\mathcal{S}$. The second assumption is the constancy of the vector $\mathbf{P}$ in one of the two standard in celestial mechanics frames of references with the common origin $\mathcal{S}$ but different behaviour of their axes: the main inertial one $\mathcal{O}$ with fixed axes and the accompanying one $\mathcal{O}_1$ with rotating axes directed along the radius-vector, along the transversal (perpendicular to the radius-vector in the plane of the osculating orbit towards the direction of motion), and the binormal (directed along the angular momentum vector). Averaging transform is applied to Euler-like equations in osculating elements. Namely, formulae for transition from osculating elements to the mean ones, and the equations of motion in the mean elements are derived in the first approximation. The result is expressed in closed form, without expansions in powers of the eccentricity or the inclination. The equations of motion are conservative if $\mathbf{P}$ is constant in the system $\mathcal{O}$. The same assertion is true in the system $\mathcal{O}_1$ if the acceleration $\mathbf{P}$ is a central one only. Refs 11.

Keywords: variation of osculating elements, averaging transform, solution in a closed form.