МАТЕМАТИКА

УДК 519.65

О ПОСТРОЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ ПЯТОГО ПОРЯДКА ПЕРВОЙ ВЫСОТЫ

И. Г. Бурова, С. В. Полуянов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматривается построение среднеквадратического приближения с помощью базисных интегро-дифференциальных сплайнов пятого порядка аппроксимации первой высоты. Библиогр. 6 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: сплайны, среднеквадратическое приближение.

Теория минимальных сплайнов нулевой и ненулевой высоты подробно изложена в работе [1]. Интегро-дифференциальные приближения отличаются использованием интеграла от приближаемой функции по одному или нескольким соседним промежуткам. Полиномиальные непрерывные и гладкие (со свойствами B-сплайнов) интегро-дифференциальные сплайны, а также среднеквадратические приближения полиномиальными интегро-дифференциальными сплайнами предложены в работе [2].

В данной работе рассматриваются приближения функций и их производных с помощью непрерывно дифференцируемых полиномиальных и неполиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов пятого порядка (см. [3]).

1. Построение базисных сплайнов. Рассмотрим промежуток $[a, b]$, где a и b — вещественные числа. Возьмём натуральное число n и построим равномерную сетку узлов $\{x_j\}$ с шагом $h = (b-a)/n$:

$$a = x_0 < \ldots < x_{j-1} < x_j < x_{j+1} < \ldots < x_n = b.$$

Пусть в узлах сетки $\{x_j\} \subset [a, b]$ заданы значения функции u, $u \in C^5[a, b]$, и ее первой производной, а также известны значения $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)dt$. Рассмотрим на каждом $[x_k, x_{k+1}]$ приближение для $u(x)$ в виде

$$\tilde{u}(x) = u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ + u'(x_k)\omega_{k,1}(x) + u'(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t)dt\right) \omega_k^{\langle 1\rangle}(x),$$

где $\omega_{k,0}(x), \omega_{k+1,0}(x), \omega_{k,1}(x), \omega_{k+1,1}(x), \omega_k^{\langle 1\rangle}(x)$ определяем из условий

$$\tilde{u}(x) = u(x) \text{ при } u(x) = 1, \varphi_i(x),\ i = 2, \ldots, 5.$$

Предполагаем, что $1, \varphi_i(x),\ i = 2, 3, 4, 5$ — чебышёвская система на $[x_0, x_n]$, $\varphi_i \in C^5[x_0, x_n]$. Считаем, что функции $\varphi_i(x)$ выбраны так, что $|\omega_k^{\langle 1\rangle}| \le K_0/h$, $|\omega_{s,1}| \le K_1 h$, $|\omega_{s,0}| \le K_2$, $s = k, k+1$, $K_0 > 0$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$. В частности, для полиномиальных сплайнов, как будет показано далее, эти неравенства выполняются.

Рассмотрим случай $\varphi_i = x^{i-1}$, $i = 1, \ldots, 5$. Нетрудно видеть, что $\omega_{k,0}, \omega_{k,1}, \omega_k^{\langle 1\rangle} \in C^1(R^1)$. Пусть $\|f\| = \max_{[a,b]} |f|$.

Отметим, что при равномерной сетке узлов с шагом h на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть функция* $u \in C^{(5)}[x_k, x_{k+1}]$, $\varphi_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. *Тогда при* $x \in [x_k, x_{k+1}]$ *выполняется соотношение*

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le h^5 K \|u^{(5)}\|_{[x_k, x_{k+1}]},\ K = \text{const} > 0.$$

Доказательство. Действительно, при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ представляя $u(x)$, $u(x_{k+1})$ и $u'(x_{k+1})$ с помощью формулы Тейлора, получим

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) - u(x) &= u(x_k)\Big(\omega_{k,0}(x) + \omega_{k+1,0}(x) + (x_{k+1} - x_k)\omega_k^{\langle 1\rangle} - 1\Big) + \\
&+ u'(x_k)\Big((x_{k+1} - x_k)\omega_{k,0}(x) + \omega_{k,1}(x) + \omega_{k+1,1}(x) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2!}\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) - (x - x_k)\Big) + \\
&+ u''(x_k)\Big(\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2!}\omega_{k+1,0}(x) + (x_{k+1} - x_k)\omega_{k+1,1}(x) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{3!}\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) - \\
&\qquad - \frac{(x - x_k)^2}{2!}\Big) + \\
&+ u'''(x_k)\Big(\frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{3!}\omega_{k+1,0}(x) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2!}\omega_{k+1,1}(x) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^4}{4!}\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) - \\
&\qquad - \frac{(x - x_k)^3}{3!}\Big) + \\
&+ u''''(x_k)\Big(\frac{(x_{k+1} - x_k)^4}{4!}\omega_{k+1,0}(x) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{3!}\omega_{k+1,1}(x) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^5}{5!}\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) - \\
&\qquad - \frac{(x - x_k)^4}{4!}\Big) + R,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R = \frac{1}{5!}u^{(5)}(\tau_2)(x_{k+1} - x_k)^5\omega_{k+1,0}(x) + \frac{1}{4!}u^{(5)}(\tau_3)(x_{k+1} - x_k)^4\omega_{k+1,1}(x) + \\
+ \frac{1}{5!}\int_{x_k}^{x_{k+1}} u^{(5)}(\tau_1)(t - x_k)^5 dt\,\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) - \frac{1}{5!}u^{(5)}(\tau_1)(x - x_k)^5.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\tilde{u}(x) - u(x) = R$, если базисные функции $\omega_{j,i}(x)$, $j = k, k+1$, $i = 0, 1$, находим как решение системы уравнений

$$\omega_{k,0}(x) + \omega_{k+1,0}(x) + (x_{k+1} - x_k)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x) = 1, \tag{1}$$

$$x_k\omega_{k,0}(x)+x_{k+1}\omega_{k+1,0}(x)+\omega_{k,1}(x)+\omega_{k+1,1}(x)+\left(\frac{x_{k+1}^2}{2}-\frac{x_k^2}{2}\right)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x)=x, \tag{2}$$

$$x_k^2\omega_{k,0}(x)+x_{k+1}^2\omega_{k+1,0}(x)+2x_k\omega_{k,1}(x)+2x_{k+1}\omega_{k+1,1}(x)+\left(\frac{x_{k+1}^3}{3}-\frac{x_k^3}{3}\right)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x)=x^2, \tag{3}$$

$$x_k^3\omega_{k,0}(x)+x_{k+1}^3\omega_{k+1,0}(x)+3x_k^2\omega_{k,1}(x)+3x_{k+1}^2\omega_{k+1,1}(x)+\left(\frac{x_{k+1}^4}{4}-\frac{x_k^4}{4}\right)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x)=x^4, \tag{4}$$

$$x_k^4\omega_{k,0}(x)+x_{k+1}^4\omega_{k+1,0}(x)+4x_k^3\omega_{k,1}(x)+4x_{k+1}^3\omega_{k+1,1}(x)+\left(\frac{x_{k+1}^5}{5}-\frac{x_k^5}{5}\right)\omega_k^{\langle 1\rangle}(x)=x^5, \tag{5}$$

Определитель системы уравнений (1)–(5) равен $-\frac{1}{30}(x_{k+1}-x_k)^9$.

Решив систему уравнений, получаем при $x\in[x_k,x_{k+1}]$ следующие формулы базисных сплайнов:

$$\omega_{k,0}(x)=(1/h)^4(5x+h-5x_k)(-3x+h+3x_k)(x_k+h-x)^2,$$
$$\omega_{k+1,0}(x)=-(1/h)^4(-x_k+x)^2(-3x+3x_k+2h)(-5x+5x_k+6h),$$
$$\omega_k^{\langle 1\rangle}(x)=(30/h^5)(-x_k+x)^2(x_k+h-x)^2,$$
$$\omega_{k,1}(x)=(1/2)(1/h)^3(-x_k+x)(2h-5x+5x_k)(x_k+h-x)^2,$$
$$\omega_{k+1,1}(x)=(1/2)(1/h)^3(-x_k+x)^2(-5x+3h+5x_k)(x_k+h-x).$$

Нетрудно видеть, что при $x\in[x_k,x_{k+1}]$ справедливы соотношения: $|\omega_{k,0}(x)|\le 1$, $|\omega_{k+1,0}(x)|\le 1$, $|\omega_{k,1}(x)|\le \frac{1}{4}(\frac{2}{5}-(\frac{1}{10})\sqrt{6})h\sqrt{6}(-\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\sqrt{6})^2\approx 0.06778775h$, $|\omega_{k+1,1}(x)|\le \frac{1}{4}(\frac{3}{5}-\frac{1}{10})\sqrt{6})^2h(\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\sqrt{6})\sqrt{6}\approx 0.0225959h$. $|\omega_k^{\langle 1\rangle}(x)|\le\frac{15}{8h}=1.875/h$.

Теперь применяя теорему о среднем, получаем при $x\in[x_k,x_{k+1}]$

$$|R|=|\tilde u(x)-u(x)|\le\|u^{(5)}\|\Bigg(\frac{h^5}{5!}\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]}|\omega_{k+1,0}(x)|+\frac{h^4}{4!}\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]}|\omega_{k+1,1}(x)|+$$
$$+\frac{h^6}{6!}\max_{x\in[x_k,x_{k+1}]}|\omega_k^{\langle 1\rangle}(x)|+\frac{h^5}{5!}\Bigg).$$

Отсюда $|\tilde u(t)-u(t)|\le 0.02h^5\|u^{(5)}\|$.

Лемма доказана.

Замечание 1. Из доказательства следует, что K не превосходит 0.02.

Замечание 2. Переходя к переменной t по правилу $x=x_k+th$, получаем следующие формулы «исходных» базисных сплайнов:

$$\omega_{0,0}(t)=\begin{cases}-(5t+1)(3t-1)(t-1)^2,\ t\in[0,1],\\ -(3t+1)(5t-1)(1+t)^2,\ t\in[-1,0],\\ 0,\ t\notin[-1,1],\end{cases}$$

$$\omega_{0,1}(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2}th(5t-2)(t-1)^2,\ t\in[0,1],\\ \frac{1}{2}th(2+5t)(1+t)^2,\ t\in[-1,0],\\ 0,\ t\notin[-1,1],\end{cases}\qquad \omega_0^{\langle 1\rangle}(t)=\begin{cases}\frac{30t^2}{h}(t-1)^2,\ t\in[0,1],\\ 0,\ t\notin[0,1].\end{cases}$$

Заметим, что при $t\in[0,1]$ $\omega_{1,0}(t)=-(5t-6)(3t-2)t^2,\quad \omega_{1,1}(t)=\frac{1}{2}h(5t-3)(t-1)t^2$.

В [5, с. 84] отмечено, что при интерполяции функции Рунге (1901 г.) $y(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ при равноотстоящих узлах на промежутке $[-1,\ 1]$ и бесконечном увеличении порядка n интерполяционного полинома p_n последовательность $p_n(x)$ расходится вблизи концов промежутка $[-1,\ 1]$. Последовательность интерполяционных кубических В-сплайнов эрмитовых сплайнов, всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции [4, 5].

На рис. 1. представлены результаты аппроксимации функции Рунге предлагаемыми интегро-дифференциальными сплайнами пятого порядка первой высоты на промежутке [−1,1] при равномерной сетке узлов при трех узлах (−1, 0, 1) и семи узлах (−1, −2/3, −1/3, 0, 1/3, 2/3, 1) интерполяции.

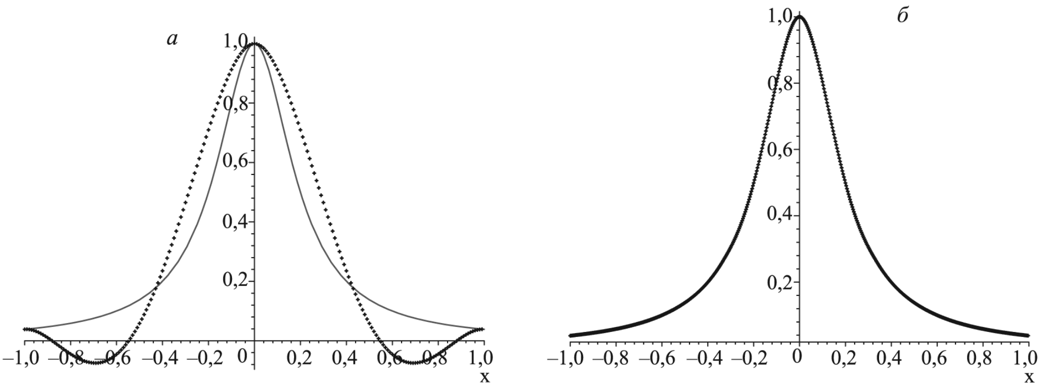

Рис. 1. Графики функции и приближения: *а* — при трех узлах интерполяции, *б* — при семи узлах интерполяции.

2. Среднеквадратическое приближение. Среднеквадратическое приближение на промежутке $[a, b]$ определяем соотношением (см., например, [6])

$$\tilde{\tilde{u}}(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \Omega_j(x),\ \ n \in \mathbb{N},$$

где $\Omega_j(x)$ — базисные функции, а коэффициенты c_j определяются из условия минимальности E:

$$E = \int_a^b [u - \tilde{\tilde{u}}]^2 dx \to \min\,. \tag{6}$$

Необходимым условием экстремума является выполнение соотношений

$$\frac{\partial E}{\partial c_j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

которые приводят к необходимости решения системы уравнений $MC = F$, где $M = (m_{i,j})$ — положительно определенная матрица,

$$m_{i,j} = (\Omega_i, \Omega_j) = \int_a^b \Omega_i(x)\Omega_j(x) dx,$$

$$F = (f_i)\,, \quad f_i = (u, \Omega_i) = \int\limits_a^b u(x)\Omega_i(x)dx.$$

Таким образом, система уравнений имеет единственное решение, которое доставляет минимум функционалу (6).

3. Формирование и хранение элементов матрицы Грама. Рассмотрим построение среднеквадратического приближения на промежутке $[0,1]$ с помощью построенных непрерывно дифференцируемых интегро-дифференциальных базисных сплайнов.

В случае полиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов элементы матрицы Грама имеют вид

$$(\omega_{i,k}, \omega_{j,s}) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \omega_{i,k}(x)\omega_{j,s}(x)dx,\ (\omega_{i,k}, \omega_j^{\langle 1\rangle}) = \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \omega_{i,k}(x)\omega_j^{\langle 1\rangle}(x)dx,$$

$k, s = 0, 1,\ i, j = 0, \ldots, n.$

Матрица Грама M системы уравнений $MC = F$ может быть представлена в блочном виде:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_5 \\ M_3 & M_4 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{pmatrix},$$

причем $M_3 = (M_2)^T, M_7 = (M_5)^T, M_8 = (M_6)^T$, а $M_1, M_2, M_5,\ M_4, M_6, M_9$ — ленточные матрицы. Носители базисных функций $\omega_{j,0}$, $\omega_{j,1}$ содержат два сеточных интервала, а носитель $\omega_j^{\langle 1\rangle}$ — один сеточный интервал, поэтому в матрице M мало отличных от нуля элементов. Результаты вычислений показывают, что различных между собой элементов 14. Таким образом, при вычислениях нет необходимости хранить в памяти компьютера всю матрицу и достаточно ограничиться хранением четырнадцати элементов:

$$a_1 = \frac{8h}{35}, \quad b_1 = \frac{16h}{35}, \quad c_1 = -\frac{h}{70}, \quad a_2 = \frac{h^2}{60}, \quad a_3 = -\frac{h^2}{60}, \quad c_2 = \frac{h^2}{210}, \quad c_3 = -\frac{h^2}{210},$$

$$a_4 = \frac{h^3}{630}, \quad b_4 = \frac{h^3}{315}, \quad c_4 = \frac{h^3}{1260}, \quad a_5 = -\frac{3}{14}, \quad a_6 = -\frac{h}{84}, b_6 = \frac{h}{84}, \quad a_9 = \frac{10}{7h}.$$

Приведем вид матриц M_i при $n = 3$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & c_1 & a_1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 & a_3 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} a_4 & c_4 & 0 & 0 \\ c_4 & b_4 & c_4 & 0 \\ 0 & c_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} a_5 & 0 & 0 \\ a_5 & a_5 & 0 \\ 0 & a_5 & a_5 \\ 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix},\ M_6 = \begin{pmatrix} a_6 & 0 & 0 \\ b_6 & a_6 & 0 \\ 0 & b_6 & a_6 \\ 0 & 0 & b_6 \end{pmatrix},\ M_9 = \begin{pmatrix} a_9 & 0 & 0 \\ 0 & a_9 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{pmatrix}.$$

Правая часть F системы уравнений представима в виде блоков $F = \left(F^1, F^2, F^3\right)^T$, элементы f_i^α которых вычисляются по формулам

$$f_i^\alpha = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega_{i,\alpha}(x)u(x)dx,\ \alpha = 1,2,\ i = 1,2,\dots,n-1,$$

$$f_1^\alpha = \int\limits_{x_0}^{x_1} \omega_{0,\alpha}(x)u(x)dx,\ \alpha = 1,2, \quad f_n^\alpha = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \omega_{n,\alpha}(x)u(x)dx,\ \alpha = 1,2,$$

$$f_i^3 = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_i^{\langle 1\rangle}(x)u(x)dx,\ i = 0,1,\dots,n.$$

4. Результаты вычислений. Вычисления проводились на C++ с поддержкой OpenMP. Вычисление элементов вектора $F^\alpha, \alpha = 1,2,3$, производится параллельно с динамическим распределением блоками по процессорам.

Для решения системы уравнений применяется параллельный вариант встречной прогонки. Среднеквадратическое приближение функции $u(x)$

$$\tilde{\tilde{u}}(x) = c_{k,0}\omega_{k,0}(x) + c_{k+1,0}\omega_{k+1,0}(x) + c_{k,1}\omega_{k,1}(x) + c_{k+1,1}\omega_{k+1,1}(x) + c_{k,2}\ \omega_k^{\langle 1\rangle}(x)$$

и среднеквадратическое приближение производной функции $u(x)$

$$\tilde{\tilde{u}}'(x) = c_{k,0}\omega'_{k,0}(x) + c_{k+1,0}\omega'_{k+1,0}(x) + c_{k,1}\omega'_{k,1}(x) + c_{k+1,1}\omega'_{k+1,1}(x) + c_{k,2}\ \omega'^{\langle 1\rangle}_k(x)$$

строим параллельно на двух процессорах при $x \in [x_0, x_{N-1}]$ и $x \in [x_N, x_n]$ (предполагаем, что $n = 2N - 1$).

На рис. 2 представлены результаты среднеквадратического приближения функции $y = \sin(5x) + (1/5)\cos(50x) + (1/20)\sin(150x)$ и её производной предлагаемыми сплайнами на промежутке [0,1] при $n = 6$ (число обусловленности матрицы $\mathrm{cond}(M) \approx 7 \cdot 10^6$, $\det(M) \approx 0.2 \cdot 10^{-22} h^{22}$).

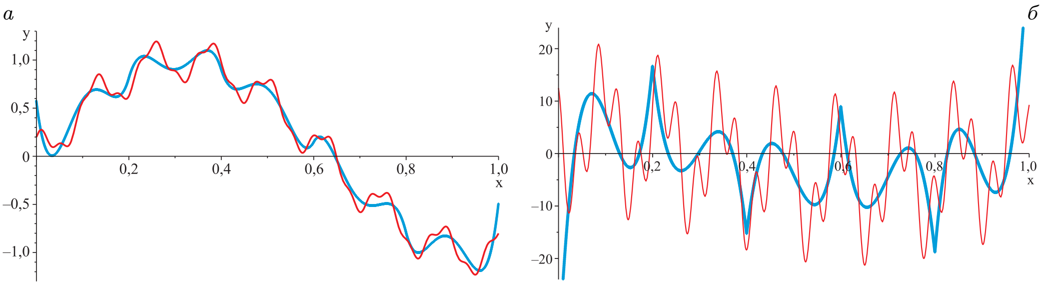

Рис. 2. Графики: *а* — функции $y(x) = \sin(5x) + (1/5)\cos(50x) + (1/20)\sin(150x)$ и её среднеквадратического приближения, *б* — производной этой функции и её среднеквадратического приближения при $n = 6$.

На рис. 3 представлены результаты среднеквадратического приближения этой же функции при $n = 9$ ($\mathrm{cond}(M) \approx 4 \cdot 10^7$, $\det(M) = 0.5 \cdot 10^{-31} h^{31}$). Для сравнения на

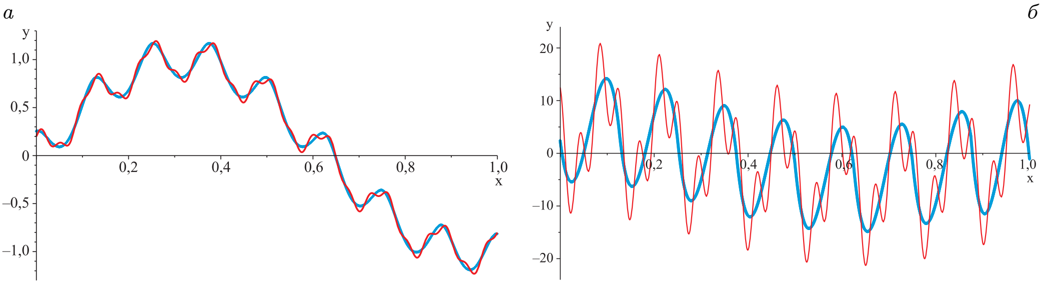

Рис. 3. Графики: *а* — функции $y(x) = \sin(5x) + (1/5)\cos(50x) + (1/20)\sin(150x)$ и её среднеквадратического приближения, *б* — производной этой функции и её среднеквадратического приближения при $n = 9$.

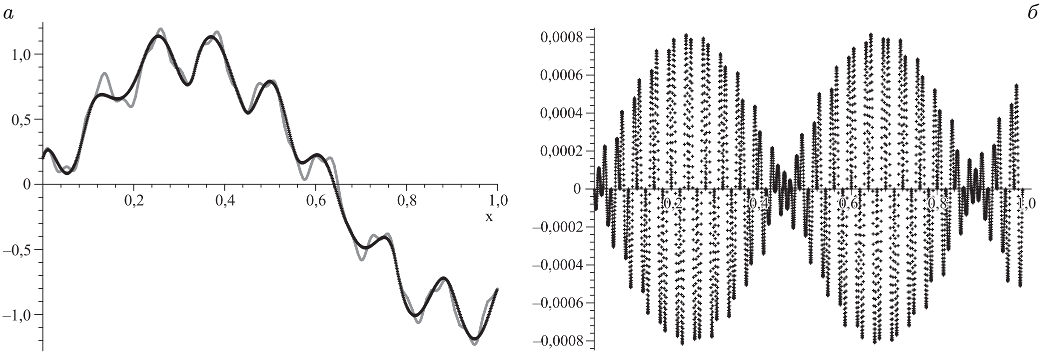

Рис. 4. Графики: *а* — функции $y(x) = \sin(5x) + (1/5)\cos(50x) + 1/20\sin(150x)$ и её интерполяции при $n = 9$, *б* — погрешности интерполяции этой же функции при $n = 50$.

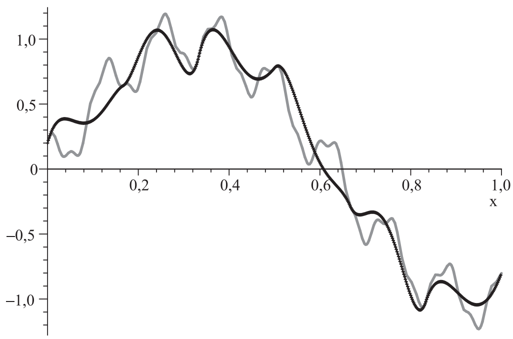

Рис. 5. Графики функции $y(x) = \sin(5x) + (1/5)\cos(50x) + (1/20)\sin(150x)$ и её интерполяции при $n = 6$.

рис. 4, *а* приведем графики функции $y(x) = \sin(5x) + (1/5)\cos(50x) + (1/20)\sin(150x)$ и ее интерполяции предлагаемыми сплайнами при $n = 9$, а на рис. 5 — при $n = 6$.

На рис. 4, *б* приведем график погрешности интерполяции этой же функции при $n = 50$ (заметим, что теоретическая оценка погрешности интерполяции в этом случае $|R| \leq 0.26$).

На рис. 6, *а* приведем графики функции Рунге и ее среднеквадратического приближения при $n = 6$, на рис. 6, *б* — график погрешности.

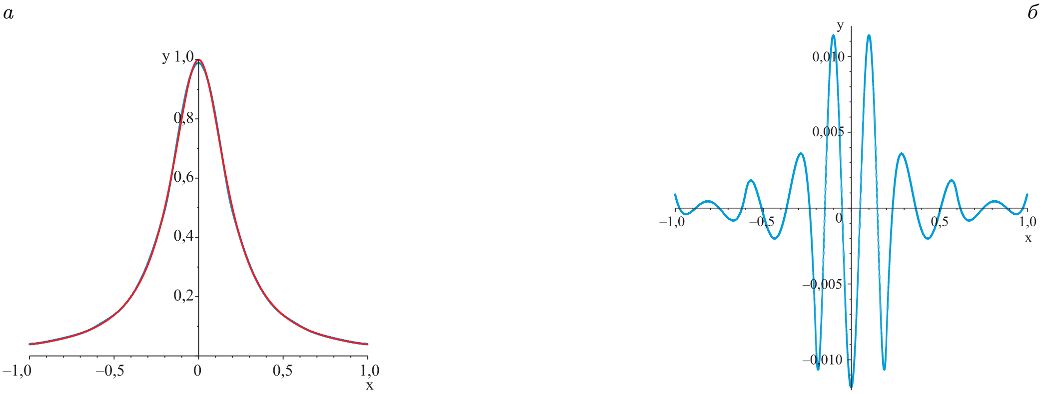

Рис. 6. Графики: *а* — функции Рунге и её среднеквадратического приближения при $n = 6$, *б* — погрешности.

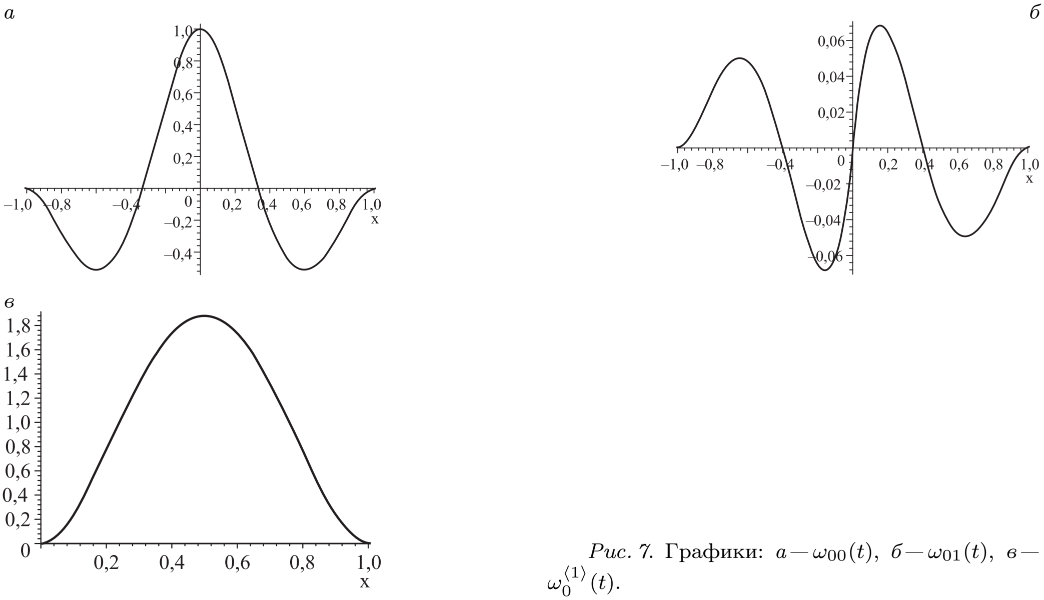

Рис. 7. Графики: *а* — $\omega_{00}(t)$, *б* — $\omega_{01}(t)$, *в* — $\omega_0^{\langle 1\rangle}(t)$.

На рис. 7 приведены графики базисных функций $\omega_{00}(t), \omega_{01}(t), \omega_0^{\langle 1\rangle}(t)$ при $h = 1$.

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные замечания, сделанные в процессе работы над статьей.

Литература

1. *Бурова И. Г., Демьянович Ю. К.* Минимальные сплайны и их приложения. Теория минимальных сплайнов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 364 с.

2. *Киреев В. И., Пантелеев А. В.* Численные методы в примерах и задачах. М., 2008. 480 с.

3. *Бурова И. Г.* Аппроксимация вещественными и комплексными минимальными сплайнами. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 142 с.

4. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М., 1980. 353 с.

5. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.

6. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М., 1962. 464 с.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

Бурова Ирина Герасимовна — доктор физико-математических наук, профессор; burovaig@mail.ru
Полуянов Сергей Викторович — аспирант; sergeypoluyanov@gmail.com

THE CONSTRUCTION OF MEANSQUARE APPROXIMATION WITH INTEGRO-DIFFERENTIAL SPLINES OF FIFTH ORDER AND FIRST LEVEL

Irina G. Burova, Sergei V. Poluyanov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; burovaig@mail.ru, sergeypoluyanov@gmail.com

The construction of meansquare approximation with integro-differential splines of fifth order and first level is considered. The results of numerical experiments for computations acceleration with the algorithm parallelization are presented. Refs 6. Figs 7.

Keywords: splines, meansquare approximation.