УДК 510.51 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 2

ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ КЛАССУ P ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ ВЫПОЛНИМОСТИ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ С ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ЕЁ СКОБОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Н. К. Косовский, Т. М. Косовская

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

The notion of bracket characteristic of a propositional formula in the basis of negation, multiple conjunctions, multiple disjunctions and multiple equivalences is introduced. It is proved that the satisfability problem for a propositional formula with any previously given bracket characteristic belongs to the class **P**. So, we have a new hierarchical decomposition of the initial **NP**-complete problem into sub-problems from the class **P**. In this case every problem of the hierarchy permits an infnite set of input data. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: propositional formula, satisfability of propositional formula, class **P**.

Введение. Широко известна иерархия расширяющихся задач, принадлежащих классу **P**, объединением которых является задача ВЫПОЛНИМОСТЬ (ВЫП) [1]. Эта иерархия использует ограничения на количество различных использованных пропозициональных переменных. Ниже рассматривается обобщение задачи ВЫП до задачи по проверке выполнимости пропозициональной формулы в базисе из отрицания, многократных конъюнкции, дизъюнкции и эквивалентности.

Очевидно, что новая задача является NP-полной. Она также может быть представлена как объединение задач по проверке выполнимости пропозициональной формулы, имеющей не более заданного числа различных использованных пропозициональных переменных. Ниже предлагается другая иерархия задач, принадлежащих классу **P**, объединение которых представляет собой рассматриваемую новую задачу.

Иерархия основана на значениях скобочной характеристики пропозициональной формулы в рассматриваемом базисе. Она введена в настоящей работе.

1. Основные определения и утверждения. Напомним, что класс **P** — это класс предикатов, каждый из которых вычислим программой для машины Тьюринга, число шагов которой не превосходит полинома от длины записи исходных данных.

Определения классов **NP** и **P-SPACE** получаются из определения класса **P**, если для первого из них машина Тьюринга недетерминирована, а для второго ограничения поставлены не на число шагов, а на число использованных ячеек.

Определение 1. *Скобочная характеристика пропозициональной формулы в рассматриваемом базисе — это сумма количества знаков отрицаний, увеличенных на 1 количеств аргументов для всех многократных конъюнкций и количеств многократных дизъюнкций и многократных эквивалентностей.*

В частности, для формулы, находяшейся в КНФ, скобочная характеристика совпадает с увеличенным на единицу удвоенным количеством различных элементарных дизъюнкций, составляющих эту формулу.

Отметим, что количество различных пропозициональных формул с одной и той же скобочной характеристикой бесконечно.

Определение 2. *Пусть* k *— целое число и* $k \geq 1$. *Класс предикатов* $\mathbf{P} \parallel n^k$**-SPACE** *(соответственно* $\mathbf{P} \parallel n^k \lceil \log_2 n \rceil^k$**-SPACE**) *— это класс предикатов, каждый из которых вычислим программой для многоленточной детерминированной* *машины Тьюринга за полиномиальное число шагов на лентах, максимальное количество использованных ячеек которой не превосходит Cn^k (соответственно $Cn^k\lceil\log_2 n\rceil^k$) для некоторого C, где n — длина исходных данных.*

Здесь $\lceil z\rceil$ обозначает ближайшее целое число не меньшее, чем z.

Определение 3. *Пусть k — целое число и $k \geq 1$. Класс предикатов* n^k-**SPACE** — *это класс предикатов, каждый из которых вычислим программой для многоленточной детерминированной машины Тьюринга на лентах, максимальное количество использованных ячеек которых не превосходит Cn^k для некоторого C, где n — длина исходных данных.*

Определение 4. *Пусть k — целое число и $k \geq 1$. Класс предикатов* **N** n^k-**SPACE** — *это класс предикатов, каждый из которых вычислим программой для многоленточной недетерминированной машины Тьюринга на лентах, максимальное количество использованных ячеек которых не превосходит Cn^k для некоторого C, где n — длина исходных данных.*

Введение классов предикатов **P** $\|$ n^k-**SPACE** представляет интерес, поскольку справедливо утверждение.

Утверждение 1. *Для всякого целого $k \geq 1$*

$$\mathbf{P} \subseteq n^k\text{-}\mathbf{SPACE} \Longrightarrow \mathbf{P} \neq \mathbf{P}\text{-}\mathbf{SPACE},$$

$$\mathbf{P} \supseteq n^k\text{-}\mathbf{SPACE} \Longrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP} = \mathbf{P}\text{-}\mathbf{SPACE}.$$

Доказательство. Первая импликация доказывается на основе включений $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \subseteq \mathbf{P}\text{-}\mathbf{SPACE}$ и на строгости иерархии по памяти классов n^k-**SPACE** [1].

Доказательство второй импликации основано на том, что существуют P-SPACE-полные задачи, решаемые на линейной зоне, например, задача QBF (для кванторных пропозициональных формул) [1]. ∎

Первую импликацию из утверждения 1 можно дополнить.

Утверждение 2. *Для всякого целого $k \geq 1$*

$$\mathbf{P} \subseteq n^k\text{-}\mathbf{SPACE} \Longrightarrow \mathbf{P} \neq \mathbf{NP}.$$

Доказательство. Эта импликация доказывается на основе того, что n^k-**SPACE** $\subseteq$ **N** n^k-**SPACE** и строгости иерархии по памяти классов **N** n^k-**SPACE** [2]. ∎

Модификации утверждений 1 и 2 при замене n^k-**SPACE** на $n^k\lceil\log_2 n\rceil^k$-**SPACE** могут быть доказаны как следствия этих утверждений.

2. Основной результат. Пусть индексы переменных записываются в виде любых слов в некотором неоднобуквенном алфавите.

Определение 5. *Полиномом Жегалкина называется полином по модулю 2, в котором отсутствуют скобки, приведены все подобные члены и все константы и показатели степеней равны нулю или единице.*

Для доказательства основной теоремы потребуется лемма.

Лемма 1. *Установление разрешимости равенства нулю полинома Жегалкина осуществимо многоленточной машиной Тьюринга за линейное число шагов.*

Доказательство. Полином Жегалкина не имееет корней тогда и только тогда, когда он совпадает с константой 1. Действительно, если свободный член равен нулю, то корнем является набор, состоящий только из нулей. Если свободный член равен 1, то выбираем одночлен, отличный от 1, наименьшей степени. Все его переменные полагаем равными 1, а остальные переменные полагаем равными 0. Этот набор констант и будет набором значений переменных, на которых полином Жегалкина обращается в 0. Проверка совпадения полинома Жегалкина с 1 осуществима за линейное время. ∎

Теорема 1. *Каково бы ни было целое положительное число k, задача проверки выполнимости пропозициональной формулы со скобочной характеристикой, не превосходящей $k+1$, принадлежит классу* $\mathbf{P} \parallel n^k\lceil\log_2 n\rceil^k$**-SPACE**.

Доказательство. Исходная формула заменяется системой равенств нулю полиномов Жегалкина без скобок. Сначала $\neg x$ заменяется на $(x+1)$, $(x \vee y \vee \ldots \vee z)$ заменяется на $(x{\cdot}y{\cdot}\ldots{\cdot}z)$, $(x \,\&\, y \,\&\, \ldots \,\&\, z)$ заменяется на $((x{+}1){\cdot}(y{+}1){\cdot}\ldots{\cdot}(z{+}1){+}1)$, $(x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z)$ заменяется на $(x{+}y{+}\ldots{+}z)$. Здесь значению *истина* соответствует константа 0, значению *ложь* соответствует константа 1.

В результате пропозициональная формула превращактся в равенство нулю полинома по модулю 2 со скобками. Исходная формула выполнима тогда и только тогда, когда полученное уравнение имеет решение. При этом длина записи полученного уравнения не превосходит линейной функции от длины исходной формулы и число скобок в ней равно скобочной характеристике исходной пропозициональной формулы.

Преобразуем полученное уравнение в систему равенств нулю полиномов Жегалкина. Число уравнений в этой системе равно уменьшенной на единицу скобочной характеристике исходной пропозициональной формулы.

Точнее, начиная с самых внутренних вложенных скобок заменяем их новой пропозициональной переменной и добавляем равенство этой новой переменной содержимому скобок. Этот процесс повторяем до тех пор, пока имеются скобки. В результате получаем систему уравнений из равенств нулю полиномов Жегалкина. Длина записи каждого уравнения этой системы на превосходит линейной функции от $n\lceil\log_2 n\rceil$, где n — длина записи первоначального уравнения.

Эту систему уравнений решаем следующим образом. Перемножаем все левые части уравнений, увеличенные на единицу. К результату прибавляем единицу и приравниваем нулю. В полученном уравнении приводим подобные члены. Две последние операции можно осуществить на многоленточной машине Тьюринга, работающей за полиномиальное число шагов и на зоне $n^k\lceil\log_2 n\rceil^k$**-SPACE**, где n — длина записи формулы, $(k+1)$ — скобочная характеристика. Осталось применить лемму. ∎

Заключение. Доказательство теоремы предоставляет способ решения практических задач, сформулированных в виде выполнимости пропозициональной формулы с небольшой скобочной характеристикой. Эта теорема дополняет результат из [3] об NP-полноте задачи проверки совместности системы сравнений двучленных полиномов Жегалкина с нулём.

Литература

1. *Du D. Z., Ko K. I.* Theory of Computational Complexity. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., 2000.

2. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. (Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.)

3. *Косовская Т. М., Косовский Н. К.* О числе шагов получения булевого решения у полиномиальных сравнений и у систем из них // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 3. С. 82–90.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

Косовский Николай Кириллович — доктор физико-математических наук, профессор; kosov@nk1022.spb.edu

Косовская Татьяна Матвеевна — доктор физико-математических наук, доцент; kosovtm@gmail.com

BELONGING TO THE CLASS P OF THE SATISFABILITY PROBLEM FOR A PROPOSITIONAL FORMULA WITH A GIVEN VALUE OF ITS BRACKET CHARACTERISTIC

Nikolay K. Kosovskiy, Tatiana M. Kosovskaya

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; kosov@nk1022.spb.edu, kosovtm@gmail.com

The notion of bracket characteristic of a propositional formula in the basis of negation, multiple conjunctions, multiple disjunctions and multiple equivalences is introduced. It is proved that the satisfability problem for a propositional formula with any previously given bracket characteristic belongs to the class **P**. So, we have a new hierarchical decomposition of the initial **NP**-complete problem into sub-problems from the class **P**. In this case every problem of the hierarchy permits an infnite set of input data. Refs 3.

Keywords: propositional formula, satisfability of propositional formula, class **P**.