УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 2

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОБЪЕДИНЕНИЙ СОБЫТИЙ И ЛЕММЕ БОРЕЛЯ—КАНТЕЛЛИ

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Найдены новые оценки сверху вероятностей объединений событий. Приводимые примеры показывают их оптимальность. Получено обобщение первой части леммы Бореля—Кантелли. Библиогр. 22 назв.

Ключевые слова: неравенства Бонферрони, вероятности объединения событий, лемма Бореля—Кантелли.

1. Введение. Неравенства для вероятностей объединений событий играют важную роль в различных разделах теории вероятностей и ее приложений. В работе автора [1] были получены некоторые новые оценки таких вероятностей снизу. В настоящей работе мы получим ряд новых оценок вероятностей объединений событий сверху. При этом мы будем использовать метод, основанный на следующем результате из [1].

Теорема 1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — события, $N \geqslant 2$. Обозначим*

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} A_i.$$

Пусть l — натуральное число, $l \leqslant N$. Пусть $\{f_{ki},\ 1 \leqslant k \leqslant l,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ — набор неотрицательных вещественных чисел. Для $1 \leqslant k \leqslant l$ положим

$$s_k = \sum_{i=1}^{N} f_{ki} p_i,$$

где p_i — вероятность того, что произошло ровно i событий из $A_1, A_2, \ldots, A_N$, $0 \leqslant i \leqslant N$.

Предположим, что вещественные числа $c_1, c_2, \ldots, c_N$ и $a_1, a_2, \ldots, a_l$ удовлетворяют соотношению $\sum\limits_{i=1}^{N}(1-c_i)p_i = \sum\limits_{i=1}^{l} a_i s_i$.

Если $c_i \geqslant 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant N$, то

$$\mathbf{P}(U) \geqslant \sum_{i=1}^{l} a_i s_i.$$

Если $c_i \leqslant 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant N$, то

$$\mathbf{P}(U) \leqslant \sum_{i=1}^{l} a_i s_i.$$

Кроме того, $\mathbf{P}(U) = \sum\limits_{i=1}^{l} a_i s_i$, *если для некоторых* $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant N$ *вероятности* $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_l}$ *являются решениями системы линейных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{l} f_{ki_j} p_{i_j} = s_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant l, \tag{1}$$

$p_i = 0$ *для всех* $i \neq i_k$ *и* $c_{i_k} = 0$ *для всех* $1 \leqslant k \leqslant l$.

Пусть $f_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant l$, — неотрицательные вещественные функции такие, что $f_k(0) = 0$ для всех k. Тогда, положив $f_{ki} = f_k(i)$, мы получим, что $s_k = \mathbf{E} f_k(\varphi)$, где $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} I\{A_i\}$, $I\{\cdot\}$ — индикатор события в скобках. Таким образом, s_k является некоторым моментом случайной величины φ.

Получению неравенств для вероятностей объединений событий, а также вероятностей осуществления по крайней мере M из N событий и аналогичных вероятностей, посвящено значительное число работ. Наиболее известные оценки $\mathbf{P}(U)$ основаны на биномиальных моментах φ или ее моментах целых порядков. Некоторые из них, называемые также неравенствами Бонферрони, можно найти в книге Феллера [2]. Другие неравенства подобного сорта получены в работах Чжуна и Эрдёша [3], Галло [4], Доусона и Санкова [5], Kуниаса [6], Кверела [7, 8], Галамбоша [9], Мори и Секкея [10], Бороша и Прекопы [11], Галамбоша и Симонелли [12], Прекопы [13], Фролова [1] и др. Различные методы построения таких оценок можно найти, например, в книге Галамбоша и Симонелли [12]. Теорема 1 позволяет строить оценки, основанные на более общих моментах, ранее не рассматривавшихся.

В работе [1] теорема 1 была использована для построения оценок вероятности $\mathbf{P}(U)$ снизу. В частности, там был получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $l = 2$, $0 < a < b$, $f_{1i} = i^a$, $f_{1i} = i^b$ *для всех* i. *Положим* $\delta = (s_2/s_1)^{1/(b-a)}$, $\theta = \delta - [\delta]$ *и* $\bar{\theta} = (\delta^{b-a} - (\delta-\theta)^{b-a})/((\delta+1-\theta)^{b-a} - (\delta-\theta)^{b-a}) \in [0,1)$, *где* $0/0 = 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(U) \geqslant \frac{\bar{\theta} s_1^{b/(b-a)}}{\left(s_2^{1/(b-a)} + (1-\bar{\theta}) s_1^{1/(b-a)}\right)^a} + \frac{(1-\bar{\theta}) s_1^{b/(b-a)}}{\left(s_2^{1/(b-a)} - \bar{\theta} s_1^{1/(b-a)}\right)^a}. \tag{2}$$

Если $a = 1$ и $b = 2$, то

$$s_1 = \mathbf{E}\varphi = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i), \quad s_2 = \mathbf{E}\varphi^2 = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \mathbf{P}(A_i A_j),$$

$\bar{\theta} = \theta$, а (2) превращается в неравенство из работы Доусона и Санкова [5], усиливающее следующее известное неравенство Чжуна—Эрдёша из [3]:

$$\mathbf{P}(U) \geqslant \frac{s_1^2}{s_2}.$$

Отметим, что неравенство Чжуна—Эрдёша лежит в основе одного из самых широко используемых обобщений второй части леммы Бореля—Кантелли, полученного Эрдёшем и Реньи [14].

При $l = 3$ теорема 1 дает обобщение неравенства Кверела [7], а при $l \geqslant 4$ ее можно использовать для обобщения неравенств из работ Бороша и Прекопы [11], Галамбоша и Симонелли [12], Прекопы [13] и др. Дальшейшие обобщения некоторых следствий теоремы 1 содержат неравенство Куниаса [6], также усиливающее неравенство Чжуна—Эрдёша. Численные примеры показывают оптимальность полученных оценок.

Доказанные неравенства были использованы в [1] для получения новых обобщений второй части леммы Бореля—Кантелли. Эти обобщения содержат в себе результаты Эрдёша и Реньи [14], Кочина и Стоуна [15], Спицера [16], Куниаса [6], Мори и Секея [17], Мартикайнена и Петрова [18], Петрова [19], Фенга, Ли и Шена [20] и др.

В настоящей работе мы применим метод из [1] для получения оценок сверху, а затем получим некоторые обобщения первой части леммы Бореля—Кантелли.

Опишем теперь метод построения оценок $\mathbf{P}(U)$, основанный на теореме 1. Сначала мы выбираем число l и набор $\{f_{ki}\}$. Последний определяет те численные характеристики φ, которые будут представлены в нашей оценке. Следующий шаг — выбор c_i. Наиболее простой способ — положить

$$c_i = 1 - \sum_{j=1}^{l} a_j f_{ji}.$$

При этом мы подберем коэффициенты a_j так, чтобы $c_{i_k} = 0$. Так как мы строим оценку $\mathbf{P}(U)$ сверху, нам следует убедиться, что $c_i \leqslant 0$. (Если требуется построить оценку снизу, то нужно, чтобы $c_i \geqslant 0$.) Применяя теорему 1, мы получим нужное неравенство для $\mathbf{P}(U)$. Так как индексы i_k можно выбирать, вообще говоря, различными способами, мы можем также провести некоторую оптимизацию нашей оценки.

Отметим, что можно сначала выписать c_i. Если, например, $f_{ki} = i^k$, то положим

$$c_i = \prod_{k=1}^{l} \left(1 - \frac{i}{i_k}\right),$$

$1 \leqslant i \leqslant N$, а i_k выберем так, чтобы $c_i \leqslant 0$. В этом случае коэффициенты a_j можно найти как коэффициенты в разложении c_i по степеням i. Недостаток такого подхода проявится, если мы применим его, например, в случае $f_{ki} = i^{\gamma_k}$, $\gamma_k > 0$. Положим

$$c_i = \prod_{k=1}^{l} \left(1 - \left(\frac{i}{i_k}\right)^{\gamma_k}\right).$$

В этом случае мы даже не можем заранее сказать, какое количество и какие именно моменты случайной величины φ будут представлены в нашей оценке. Это будет зависеть от чисел γ_k. Мы предпочитаем сначала зафиксировать моменты φ, а потом строить оценку, в которую входят только они. Поэтому мы используем первый подход. При этом мы используем также второй подход в простейшем случае $f_{ki} = i^k$ для нахождения тех индексов i_k, для которых $c_{i_k} = 0$.

2. Неравенства для вероятностей объединений событий. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — события, $N \geqslant 2$. Обозначим

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{N} I\{A_i\},$$

где $I\{\cdot\}$ — индикатор события, заключенного в скобках. Обозначим $p_i = \mathbf{P}(\varphi = i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Ясно, что событие $\{\varphi = i\}$ происходит тогда и только тогда, когда происходит ровно i событий из $A_1, A_2, \ldots, A_N$.

Пусть l — натуральное число, $l \leqslant N$. Пусть $\{f_{ki},\ 1 \leqslant k \leqslant l,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ — набор неотрицательных вещественных чисел. Для $1 \leqslant k \leqslant l$ положим

$$s_k = \sum_{i=1}^{N} f_{ki} p_i.$$

Предположим, что $f_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant l$, — неотрицательные вещественные функции такие, что $f_k(0) = 0$ для всех k. Выбирая $f_{ki} = f_k(i)$, мы приходим к равенству $s_k = \mathbf{E} f_k(\varphi)$.

В этом параграфе, используя описанный выше метод, мы построим оценки сверху для вероятности $\mathbf{P}(U)$, основанные на моментах $s_1, s_2, \ldots, s_l$ случайной величины φ.

Несмотря на то, что далее мы используем только степенные функции $f_k(x)$, наш метод работает и в общей ситуации. Отметим также, что полученные результаты можно обобщить на случай произвольных измеримых пространств с конечной мерой.

Начнем с простейшего случая $l = 2$. Пусть $0 < a < b$, $f_{1i} = i^a$, $f_{2i} = i^b$. Положим $c_i = 1 - a_1 i^a - a_2 i^b$. Если бы $a = 1$ и $b = 2$, то мы взяли бы $c_i = (1 - i/i_1)(1 - i/i_2)$. Ясно, что в последнем случае $c_i \leqslant 0$ для всех i только тогда, когда $i_1 = 1$, $i_2 = N$. Поэтому мы ищем a_1 и a_2 из условия $c_1 = c_N = 0$. Таким образом, a_1 и a_2 являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 1 - \quad a_1 - \quad a_2 &= 0, \\ 1 - N^a a_1 - N^b a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Мы имеем

$$a_1 = \frac{N^b - 1}{N^b - N^a}, \quad a_2 = -\frac{N^a - 1}{N^b - N^a}.$$

Проверим, что $c_i \leqslant 0$ для всех i. Рассмотрим функцию $f(x) = 1 - a_1 x^a - a_2 x^b$ при $x \geqslant 1$. Так как $f(1) = f(N) = 0$, $f(+\infty) = +\infty$, а $f'(x) = -x^{a-1}(a a_1 + b a_2 x^{b-a})$ может обращаться в ноль только в одной точке, $f(x) \leqslant 0$ при $x \in [1, N]$ и $c_i \leqslant 0$ для всех i.

По теореме 1 $\mathbf{P}(U) \leqslant a_1 s_1 + a_2 s_2$, и мы приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть $l = 2$, $0 < a < b$, $f_{1i} = i^a$, $f_{2i} = i^b$ для всех i. Тогда*

$$\mathbf{P}(U) \leqslant \frac{N^b - 1}{N^b - N^a} s_1 - \frac{N^a - 1}{N^b - N^a} s_2. \tag{3}$$

Напомним, что $s_1 = \mathbf{E}\varphi^a$ и $s_1 = \mathbf{E}\varphi^b$ в (3). При $a = 1$ и $b = 2$ моменты s_1 и s_2 можно легко выписать в терминах сумм вероятностей $\mathbf{P}(A_i)$ и $\mathbf{P}(A_i A_j)$. Сделав соответствующие выкладки, из теоремы 3 мы получим следующий результат.

Следствие 1. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}(A_i) - \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \mathbf{P}(A_i A_j). \tag{4}$$

Точные оценки $\mathbf{P}(U)$, подобные неравенству (4), получены Кверелом [8].

Перейдем к случаю $l = 3$. Пусть $a > 0$, $\varrho > 0$, $f_{1i} = i^a$, $f_{2i} = i^{a+\varrho}$, $f_{3i} = i^{a+2\varrho}$. Положим $c_i = 1 - a_1 i^a - a_2 i^{a+\varrho} - a_3 i^{a+2\varrho}$.

Если бы $a = 1$ и $\varrho = 1$, то мы взяли бы $c_i = (1-i/i_1)(1-i/i_2)(1-i/i_3)$. В последнем случае $c_i \leqslant 0$ для всех i, если $i_1 = 1$, $i_2 = m-1$, $i_3 = m$, где m — натуральное число такое, что $3 \leqslant m \leqslant N$. Число m мы в дальнейшем рассматриваем как параметр, по которому можно провести оптимизацию нашей оценки.

Поэтому мы ищем $a_1 = a_1(m)$, $a_2 = a_2(m)$ и $a_3 = a_3(m)$ из условия $c_1 = c_{m-1} = c_m = 0$. Следовательно a_1, a_2 и a_3 — решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
1 - a_1 - a_2 - a_3 &= 0,\\
1 - (m-1)^a a_1 - (m-1)^{a+\varrho} a_2 - (m-1)^{a+2\varrho} a_3 &= 0,\\
1 - m^a a_1 - m^{a+\varrho} a_2 - m^{a+2\varrho} a_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$a_1 = \frac{(m^{a+2\varrho}-1)((m-1)^{a+\varrho}-1) - (m^{a+\varrho}-1)((m-1)^{a+2\varrho}-1)}{\Delta_m}, \tag{5}$$

$$a_2 = -\frac{(m^{a+2\varrho}-1)((m-1)^{a}-1) - (m^{a}-1)((m-1)^{a+2\varrho}-1)}{\Delta_m}, \tag{6}$$

$$a_3 = \frac{(m^{a+\varrho}-1)((m-1)^{a}-1) - (m^{a}-1)((m-1)^{a+\varrho}-1)}{\Delta_m}, \tag{7}$$

где $\Delta_m = m^a(m-1)^a(m^\varrho-1)((m-1)^\varrho-1)(m^\varrho-(m-1)^\varrho)$.

Проверим, что $c_i \leqslant 0$ для всех i. Рассмотрим функцию $f(x) = 1 - a_1 x^a - a_2 x^{a+\varrho} - a_3 x^{a+2\varrho}$, $x \geqslant 1$. Так как $f(1) = f(m-1) = f(m) = 0$, $f(+\infty) = -\infty$, а $f'(x) = -x^{a-1}(a a_1 + (a+\varrho) a_2 x^\varrho + (a+2\varrho) a_3 x^{2\varrho})$ может обращаться в ноль только в двух точках, $f(x) \leqslant 0$ при $x \in [1, m-1] \cup [m, N]$ и $f(x) \geqslant 0$ при $x \in [m-1, m]$. Поэтому $c_i \leqslant 0$ для всех i.

По теореме 1 мы получим неравенство

$$\mathbf{P}(U) \leqslant a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 = s_1 + (a_2 + a_3)(s_2 - s_1) + a_3(s_3 - s_2). \tag{8}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

Напомним, что $a_i = a_i(m)$, и последнее неравенство справедливо для всех m таких, что $3 \leqslant m \leqslant N$. Для того чтобы провести оптимизацию этого неравенства по m, выпишем систему линейных уравнений (1). Мы имеем

$$\begin{aligned}
p_1 + (m-1)^a p_{m-1} + m^a p_m &= s_1,\\
p_1 + (m-1)^{a+\varrho} p_{m-1} + m^{a+\varrho} p_m &= s_2,\\
p_1 + (m-1)^{a+2\varrho} p_{m-1} + m^{a+2\varrho} p_m &= s_3.
\end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений, мы получим

$$p_1 = \frac{m^{a+2\varrho}(m-1)^{a+\varrho} - m^{a+\varrho}(m-1)^{a+2\varrho}}{\Delta_m} s_1 - \frac{m^{a+2\varrho}(m-1)^{a} - m^{a}(m-1)^{a+2\varrho}}{\Delta_m} s_2 + {} \\ + \frac{m^{a+\varrho}(m-1)^{a} - m^{a}(m-1)^{a+\varrho}}{\Delta_m} s_3,$$

$$p_{m-1} = -\frac{m^{a+2\varrho} - m^{a+\varrho}}{\Delta_m} s_1 + \frac{m^{a+2\varrho} - m^a}{\Delta_m} s_2 - \frac{m^{a+\varrho} - m^a}{\Delta_m} s_3,$$
$$p_m = \frac{(m-1)^{a+2\varrho} - (m-1)^{a+\varrho}}{\Delta_m} s_1 - \frac{(m-1)^{a+2\varrho} - (m-1)^a}{\Delta_m} s_2 + \frac{(m-1)^{a+\varrho} - (m-1)^a}{\Delta_m} s_3.$$

Так как $p_{m-1} \geqslant 0$ и $p_m \geqslant 0$, мы приходим к неравенствам

$$-s_1(m^{2\varrho} - m^{\varrho}) + s_2(m^{2\varrho} - 1) - s_3(m^{\varrho} - 1) \geqslant 0,$$
$$s_1((m-1)^{2\varrho} - (m-1)^{\varrho}) - s_2((m-1)^{2\varrho} - 1) + s_3((m-1)^{\varrho} - 1) \geqslant 0,$$

которые запишем в виде

$$(s_2 - s_1)(m^{2\varrho} - 1) - (s_3 - s_1)(m^{\varrho} - 1) \geqslant 0,$$
$$(s_2 - s_1)((m-1)^{2\varrho} - 1) + (s_3 - s_1)((m-1)^{\varrho} - 1) \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$(m-1)^{\varrho} \leqslant \frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1} \leqslant m^{\rho}.$$

Так как

$$s_3 - s_2 = \sum_{i=2}^{N} i^{a+\varrho}(i^{\varrho} - 1)p_i \geqslant 2^{\varrho} \sum_{i=2}^{N} i^{a}(i^{\varrho} - 1)p_i = 2^{\varrho}(s_2 - s_1),$$

при $s_2 - s_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\delta = \left(\frac{s_3 - s_2}{s_2 - s_1}\right)^{1/\varrho} \geqslant 2,$$

и мы можем положить $m = \min\{[\delta] + 1, N\}$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа в скобках.

Заметим, что, определив m, мы фактически построили сосредоточенное в точках $0, 1, m-1, m$ распределение φ, для которого неравенство (8) обращается в равенство. Отметим также, что другой формой записи (8) является неравенство

$$\mathbf{P}(U) \leqslant p_1 + p_{m-1} + p_m.$$

Подчеркнем, что существует много различных наборов событий $A_1, A_2, \ldots, A_N$, которым соответствуют одинаковые s_1, s_2, s_3. При этом лишь для некоторых из этих наборов событий p_1, p_{m-1} и p_m удовлетворяют системе (1), а остальные p_i, кроме p_0, равны нулю. Для них мы будем иметь в (8) равенство, а для остальных — строгое неравенство.

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $l = 3$, $a > 0$, $\varrho > 0$, $f_{1i} = i^a$, $f_{2i} = i^{a+\varrho}$, $f_{3i} = i^{a+2\varrho}$ для всех i. Пусть $s_2 - s_1 > 0$. Положим $\delta = ((s_3 - s_2)/(s_2 - s_1))^{1/\varrho}$, $m = \min\{[\delta] + 1, N\}$. Определим a_2 и a_3 по формулам (6) и (7) соответственно.*

Тогда

$$\mathbf{P}(U) \leqslant s_1 + (a_2 + a_3)(s_2 - s_1) + a_3(s_3 - s_2). \tag{9}$$

Неравенство (9) справедливо и при $s_2 - s_1 = 0$. Действительно, в последнем случае $p_i = 0$ для всех $i \geqslant 2$. Поэтому $s_3 - s_2 = 0$, события $A_1, A_2, \ldots, A_N$ попарно несовместны, а $\mathbf{P}(U) = p_1 = s_1$.

При $a = \varrho = 1$ формулы в теореме 4 упрощаются. Мы имеем $a_2 = -2/(m-1)$, $a_3 = 1/(m(m-1))$,

$$\mathbf{P}(U) \leqslant s_1 - \frac{2m(s_2 - s_1) - (s_3 - s_1)}{m(m-1)}.$$

Отсюда мы приходим к следующему результату, доказанному Кверелом [7] (см. также работы Бороша и Прекопы [11] и Прекопы [13]).

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и $a = \varrho = 1$. Положим $\theta = \delta - [\delta]$. Тогда выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U) \leqslant s_1 - \frac{(s_3 - s_1 - 2\theta(s_2 - s_1))(s_2 - s_1)^2}{(s_3 - s_1 - \theta(s_2 - s_1))(s_3 - s_2 - \theta(s_2 - s_1))}. \tag{10}$$

Следующий пример показывает, что неравенство (10) точное.

Пример 1. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, $\mathcal{F}$ — сигма-агебра всех подмножеств Ω, $\mathbf{P}(\{i\}) = 1/12$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 12$. Пусть $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 5\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$, $A_4 = \{1\}$.

В этом случае $p_0 = 7/12$, $p_1 = 2/12$, $p_2 = 0$, $p_3 = 2/12$, $p_4 = 1/12$. Поэтому $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 10$. Следовательно, $\delta = 3.5$, $\theta = 0.5$, $m = 4$. В силу неравенства (10) мы имеем $\mathbf{P}(U) \leqslant 5/12$. Нетрудно проверить, что $\mathbf{P}(U) = 5/12$. Отметим, что в данном случае p_1, p_3 и p_4 являются решениями системы линейных уравнений (1), а $p_2 = 0$. Поэтому в этом примере оценка точна.

Правая часть неравенства (10) убывает по θ и $\theta \in [0, 1)$. Положив $\theta = 0$, мы заключаем, что из следствия 2 вытекает следующий результат.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и $a = \varrho = 1$. Тогда выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U) \leqslant s_1 - \frac{(s_2 - s_1)^2}{s_3 - s_2}. \tag{11}$$

Неравенство (11) более простое, но менее точное, чем (10). В приведенном выше примере 1 оно приведет нас к оценке $\mathbf{P}(U) \leqslant 3/7$.

Следующий пример показывает, что оценки могут ухудшаться за счет повторения одних и тех же событий в рассматриваемом наборе. При этом неравенство (10) перестает быть точным, а неравенство (9) дает лучшую оценку, чем неравенство (10).

Пример 2. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство из примера 1. Возьмем $A_1 = A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_3 = A_4 = \{1, 2, 3, 5\}$, $A_5 = A_6 = \{1, 2, 3\}$, $A_7 = A_8 = \{1\}$. Так как новый набор событий получен повторением событий из примера 1, событие U в обоих примерах совпадает.

Пусть $a = \varrho = 1$. Мы имеем $s_1 = 2$, $s_2 = 12$, $s_3 = 80$, $\delta = 6.8$, $\theta = 0.8$, $m = 7$. Неравенство (10) дает $\mathbf{P}(U) \leqslant 11/21 \approx 0.5238$. При этом $\mathbf{P}(U) = 5/12 \approx 0.4167$.

Пусть теперь $a = 1$, $\varrho = 1/2$. В этом случае $s_1 = 2$, $s_2 \approx 4.8065$, $s_3 = 12$, $\delta = 6.5698$, $\theta = 0.5698$, $m = 7$, $a_2 \approx -1.5253$, $a_3 \approx 0.2756$. Правая часть неравенства (9) приближенно равна 0.4752.

Таким образом, оценка в неравенстве (9) улучшилась при использовании моментов порядков 1, $3/2$ и 2 вместо 1, 2 и 3 соответственно.

Этот пример наводит нас на мысль о том, что уменьшение порядков используемых моментов дает лучшие оценки. Приведем еще одно следствие теоремы 4 в этом направлении.

Пусть теперь $a = \varrho$. В этом случае формулы (5)–(7) превращаются в

$$a_1 = 1 + \frac{1}{m^\varrho} + \frac{1}{(m-1)^\varrho}, \quad a_2 = -\frac{1}{m^\varrho} - \frac{1}{(m-1)^\varrho} - \frac{1}{m^\varrho(m-1)^\varrho}, \quad a_3 = \frac{1}{m^\varrho(m-1)^\varrho},$$

и мы приходим к следующему результату.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и $a = \varrho$. Тогда выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U) \leqslant s_1 - \frac{(m^\varrho + (m-1)^\varrho)(s_2 - s_1)}{m^\varrho(m-1)^\varrho} + \frac{s_3 - s_2}{m^\varrho(m-1)^\varrho}. \tag{12}$$

Заметим, что $s_1 = s_1(\varrho)$, $s_2 = s_2(\varrho)$, $s_3 = s_3(\varrho)$ в неравенстве (12). Легко видеть, что $s_k = s_k(\varrho) \to \mathbf{P}(U)$ при $\varrho \to 0$ для всех k. Числа m также зависят от ϱ в (12), но $3 \leqslant m \leqslant N$. По принципу двух милиционеров $m^\varrho \to 1$ и $(m-1)^\varrho \to 1$ при $\varrho \to 0$. Следовательно, $a_1 = a_1(\varrho) \to 3$, $a_2 = a_2(\varrho) \to -3$ и $a_3 = a_3(\varrho) \to 1$ при $\varrho \to 0$. Отсюда вытекает следующий результат.

Следствие 5. *Пусть выполнены условия следствия 4. Для всех $\varrho > 0$ определим $s_k = s_k(\varrho)$ и $m = m(\varrho)$ так же, как в условии следствия 4. Тогда*

$$\mathbf{P}(U) = \lim_{\varrho \searrow 0} \left(s_1 - \frac{(m^\varrho + (m-1)^\varrho)(s_2 - s_1)}{m^\varrho(m-1)^\varrho} + \frac{s_3 - s_2}{m^\varrho(m-1)^\varrho} \right). \tag{13}$$

Закончим этот параграф замечанием о применении нашего метода оценивания вероятности $\mathbf{P}(U)$ при $l \geqslant 4$. В этом случае вычисления, конечно, усложняются. Отметим лишь, что выбор i_k проще всего осуществлять по аналогии со случаем $l = 3$. То есть, брать два из i_k, равными m и $m-1$, а оставшиеся выбирать по краям. Например, при $l = 4$ положить $i_1 = 1$, $i_2 = m-1$, $i_3 = m$, $i_4 = N$. При $l = 5$ можно взять $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = m-1$, $i_5 = m$, $i_5 = N$. При $l = 6$ можно выбрать $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = m-1$, $i_5 = m$, $i_4 = N-1$, $i_5 = N$. И так далее.

3. Лемма Бореля—Кантелли. В этом параграфе мы получим некоторые обобщения первой части леммы Бореля—Кантелли. Начнем с формулировки.

Лемма 1. *(Первая часть леммы Бореля—Кантелли.) Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий такая, что ряд $\sum_n \mathbf{P}(A_n)$ сходится. Тогда $\mathbf{P}(A_n$ б.ч.$) = 0$.*

Этот результат играет важную роль при доказательстве различных сильных предельных теорем теории вероятностей, в частности, при доказательствах усиленного закона больших чисел и закона повторного логарифма. При этом в некоторых случаях оказывается желательным расширить область применимости этого результата на случай последовательностей событий $\{A_n\}$ таких, что ряд $\sum_n \mathbf{P}(A_n)$ расходится. Некоторые результаты в этом направлении получены Барндорф-Нильсеном [21] и Балакришнаном и Степановым [22]. В частности, в первой работе было доказано, что если $\mathbf{P}(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_n \mathbf{P}(A_n\overline{A_{n+1}})$ сходится, то $\mathbf{P}(A_n\,\text{б.ч.}) = 0$. В других работах также предполагается, что $\mathbf{P}(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и некоторый ряд, аналогичный последнему ряду, сходится.

В предыдущем параграфе мы получили новые результаты, позволяющие оценивать вероятности объединений событий сверху. Так как

$$\mathbf{P}(A_n\,\text{б.ч.}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right),$$

всякая такая оценка приводит к обобщению первой части леммы Бореля—Кантелли. Мы приведем пример подобного результата, вытекающего из теоремы 4 и ее следствий.

Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий, $a > 0$, $\varrho > 0$. Для всех натуральных m и n таких, что $m \geqslant n \geqslant 1$, обозначим

$$\varphi_{nm} = \sum_{k=n}^{m} I\{A_k\}, \quad s_{1nm} = \mathbf{E}\varphi_{nm}^{a}, \quad s_{2nm} = \mathbf{E}\varphi_{nm}^{a+\varrho}, \quad s_{3nm} = \mathbf{E}\varphi_{nm}^{a+\varrho}.$$

Обозначим через R^i_{nm}, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, выражения, которые получаются в правых частях соотношений (9)–(13) при оценивании вероятности $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{m} A_k\right)$ соответственно.

Используя теорему 4 и ее следствия, мы получаем такой результат.

Теорема 5. *Если $\{A_n\}$ — последовательность событий, то*

$$\mathbf{P}(A_n\,\textit{б.ч.}) \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant 5}\left(\liminf_{n\to\infty}\liminf_{m\to\infty} R^i_{nm}\right).$$

Приведем пример, показывающий, что теорема 5 применима в случае, когда неприменимы лемма Бореля—Кантелли и все упомянутые выше ее обобщения.

Пусть последовательность событий $\{A_n\}$ образована бесконечным последовательным повторением событий A_1, A_2, A_3 и A_4 из примера 1. В этом случае ряд $\sum\limits_n \mathbf{P}(A_n)$ расходится и $\mathbf{P}(A_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, в данном случае лемма Бореля—Кантелли и упомянутые выше ее обобщения применить нельзя. Вероятность $\mathbf{P}(A_n\,\text{б.ч.})$ совпадает с вероятностью объединения событий A_1, A_2, A_3 и A_4. По следствию 5 в теореме 5 мы имеем равенство вместо неравенства.

Литература

1. *Frolov A. N.* Bounds for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma // Statist. Probab. Lett. 2012. Vol. 82. P. 2189–2197.

2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967.

3. *Chung K. L., Erdős P.* On the application of the Borel—Cantelli lemma // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72. P. 179–186.

4. *Gallot S.* A bound for the maximum of a number of random variables // J. Appl. Probab. 1966. Vol. 3. P. 556–558.

5. *Dawson D. A., Sankoff D.* An inequality for probabilities // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18. P. 504–507.

6. *Kounias E. G.* Bounds for the probability of a union, with applications // Ann. Math. Statist. 1968. Vol. 39. P. 2154–2158.

7. *Kwerel S. M.* Bounds on the probability of the union and intersection of m events // Adv. Appl. Probab. 1975. Vol. 7. P. 431–448.

8. *Kwerel S. M.* Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified probability systems // J. Amer. Statist. Assoc. 1975. Vol. 70. P. 472–479.

9. *Galambos J.* Bonferroni inequalities // Ann. Probab. 1977. Vol. 5. P. 577–581.

10. *Móri T. F., Székely G. J.* A note on the background of several Bonferroni-Galambos-type inequalities // J. Appl. Pobab. 1985. Vol. 22. P. 836–843.

11. *Boros E., Prékopa* Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occurs // Math. Oper. Research. 1989. Vol. 14. P. 317–342.

12. *Galambos J., Simonelli I.* Bonferroni-type inequalities with applications. Springer-Verlag N.Y. 1996.

13. *Prékopa A.* Inequalities for discrete higher order convex functions // J. Math. Inequalities. 2009. Vol. 4. P. 485–498.

14. *Erdős P., Rényi A.* On Cantor's series with convergent $\sum 1/q$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math. 1959. Vol. 2. P. 93–109.

15. *Kochen S., Stone C.* A note on the Borel—Cantelli lemma // Illinois J. Math. 1964. Vol. 8. P. 248–251.

16. *Spitzer F.* Principles of random walk. Van Nostrand, Princeton. 1964.

17. *Móri T. F., Székely G. J.* On the Erdős—Rényi generalization of the Borel—Cantelli lemma // Studia Sci. Math. Hungar. 1983. Vol. 18. P. 173–182.

18. *Мартикайнен А. И., Петров В. В.* О лемме Бореля—Кантелли // Записки научн. семин. ПОМИ. 1990. Т. 184. С. 200–207.

19. *Petrov V. V.* A note on the Borel—Cantelli Lemma // Statist. Probab. Lett. 2002. Vol. 58. P. 283–286.

20. *Feng C., Li L., Shen J.* On the Borel—Cantelli lemma and its generalization // Comptes Rendus Math. 2009. Vol. 347. P. 1313–1316.

21. *Barndorff-Nielsen O.* On the rate of the growth of the partial maxima of a sequence of independent identically distributed random variables // Math. Scand. 1961. Vol. 9. P. 383–394.

22. *Balakrishnan N., Stepanov A.* Generalization of Borel—Cantelli lemma // The Math. Scientist. 2010. Vol. 35. P. 61–62.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

Фролов Андрей Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

ON INEQUALITIES FOR PROBABILITIES OF UNIONS OF EVENTS AND THE BOREL—CANTELLI LEMMA

Andrei N. Frolov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

New upper bound are found for probabilities of unions of events. Examples show theirs optimality. A generalization of the first par of the Borel—Cantelli lemma is obtained. Refs 22.

Keywords: Bonferroni inequalities, probabilities of unions of events, Borel—Cantelli lemma.