УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 2

О ФОРМУЛАХ Г. В. КОЛОСОВА В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РАЗРЕЗОВ

Ю. М. Даль

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматриваются решения плоской теории упругости в терминах двух регулярных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексного переменного z — две формулы Колосова. Показано, что правая часть первой из этих формул является интегралом уравнения неразрывности, а правая часть второй — интегралом двух уравнений равновесия. Приведено решение задачи о плоскости, ослабленной неограниченным числом прямолинейных разрезов. Показано, что аналитическое решение подобной задачи существует, если выполняются следующие условия: 1) область с разрезами является бесконечной плоскостью; 2) главный вектор внешних усилий, приложенных к совокупности всех разрезов, равен нулю; 3) напряженно-деформированное состояние плоскости симметрично относительно оси ox. Отмечено, что решения в терминах функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — однозначных в многосвязной области — более предпочтительны по сравнению с аналогичными решениями на основе многозначных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Библиогр. 12 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: теория упругости, комплексная переменная, формулы Колосова, математическая теория трещин.

1. Введение. Решения многих задач плоской теории упругости получены на основе формул Г. В. Колосова, связывающих компоненты тензора напряжений с двумя регулярными функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$.

В настоящей работе дано физическое и математическое истолкование этих формул. Помимо их классического представления указаны ещё два варианта соотношений Г. В. Колосова. Частным случаем одного из них являются, так называемые, зависимости Вестергарда.

Найдено точное аналитическое решение периодической задачи о плоскости, содержащей на оси абсцисс неограниченной число прямолинейных разрезов. Предполагается, что на бесконечности напряжения в плоскости отсутствуют, а противоположные берега разрезов загружены самоуравновешенными сосредоточенными силами. Выяснены условия, позволяющие свести первую основную краевую задачу теории трещин к задаче Гильберта—Привалова для функции $\Phi(z)$.

2. Три пары формул Г. В. Колосова, соответствующих введению комплексного переменного. Рассмотрим в плоскости xy сечение S упругого тела, находящегося в условиях плоской деформации или обобщённого плоского напряженного состояния [1]. Предположим, что на его контуре γ заданы внешние самоуравновешенные усилия P_m $(m = 1, 2, \dots, k)$ — рис. 1.

Полагая объёмные силы отсутствующими, запишем для области S дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

и условие неразрывности

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \tag{2.2}$$

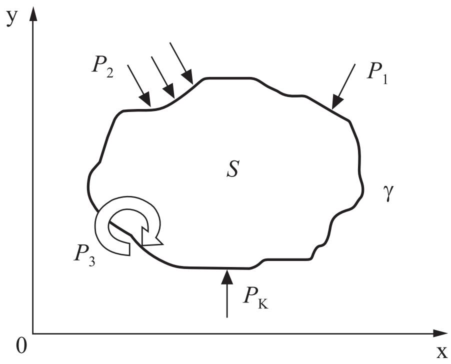

Рис. 1. Область S, загруженная внешними усилиями.

где σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{xy} — компоненты тензора напряжений; $\Delta(\ldots)$ — двумерный оператор Лапласа [2].

Математическое упрощение системы (2.1), (2.2) обычно достигается введением функции напряжений $F(x, y)$:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

посредством которой зависимости (2.1) обращаются в тождества $0 \equiv 0$, а равенство (2.2) преобразуется к виду

$$\Delta\Delta F(x, y) = 0.$$

Таким образом, исходная задача сводится к интегрированию бигармонического уравнения, удовлетворяющего двум граничным условиям на контуре γ.

В терминах вещественных переменных x и y точное аналитическое решение этого уравнения (для произвольной конфигурации области S) удается получить лишь в отдельных случаях [3, 4]. Учитывая это обстоятельство, перейдем в (2.1) и (2.2) к комплексным переменным $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{2.3}$$

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Пусть $f\,(z) = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)$ — произвольная регулярная функция. Тогда в силу условий Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

и выражений (2.3) будем иметь

$$\frac{d\overline{f\,(z)}}{dz} = 0, \quad \frac{df\,(z)}{d\bar{z}} = 0. \tag{2.4}$$

На основании (2.3) представим (2.1) и (2.2) следующим образом:

$$\frac{\partial\left(\sigma_{xx}+i\sigma_{xy}\right)}{\partial z}+\frac{\partial\left(\sigma_{xx}-i\sigma_{xy}\right)}{\partial\bar{z}}=0,\quad \frac{\partial\left(-\sigma_{yy}+i\sigma_{xy}\right)}{\partial z}+\frac{\partial\left(\sigma_{yy}+i\sigma_{xy}\right)}{\partial\bar{z}}=0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)}{\partial z\partial\bar{z}}=0. \tag{2.6}$$

Вещественная часть любой функции $\Phi(z)$, регулярной в S, является гармонической функцией. Поэтому уравнение (2.6) будет выполнено, если положить

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\equiv\Phi\left(z\right)+\overline{\Phi\left(z\right)}, \tag{2.7}$$

где $\Phi(z)$ — некоторая регулярная в S функция.

Вычитая и складывая равенства (2.5), получаем два комплексных уравнения:

$$\frac{\partial\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}\right)}{\partial\bar{z}}=0,\quad \frac{\partial\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)}{\partial\bar{z}}-\frac{\partial\left(\sigma_{yy}-\sigma_{xx}-2i\sigma_{xy}\right)}{\partial z}=0, \tag{2.8}$$

причем любое из них эквивалентно двум вещественным условиям равновесия (2.1).

Принимая во внимание результат (2.7), находим из первого уравнения, с учетом (2.4),

$$\frac{\partial\left(\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}\right)}{\partial\bar{z}}=2\Phi'\left(z\right).$$

Отсюда и из выражений (2.3) и (2.4) следует, что

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2[\bar{z}\Phi'\left(z\right)+\Psi\left(z\right)], \tag{2.9}$$

где $\Psi\left(z\right)$ — произвольная функция, регулярная в S.

Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений (2.1), (2.2), построенное Г. В. Колосовым, таково [5]:

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2\left[\Phi\left(z\right)+\overline{\Phi\left(z\right)}\right],\\&\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2\left[\bar{z}\Phi'\left(z\right)+\Psi\left(z\right)\right].\end{aligned} \tag{2.10}$$

В этих формулах числовой сомножитель 2 связан с тем, что сумма $(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})/2$ является средним нормальным напряжением, а модуль комплексной величины $(\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy})/2$ представляет собой максимальное касательное напряжение.

Г. В. Колосов, наряду с (2.10), получил и две другие пары формул [5]:*

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2\left[\Phi\left(z\right)+\overline{\Phi\left(z\right)}\right],\\&\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2\left[2x\,\Phi'\left(z\right)+\Psi_1\left(z\right)\right]\end{aligned} \tag{2.11}$$

и

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2\left[\Phi\left(z\right)+\overline{\Phi\left(z\right)}\right],\\&\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy}=2\left[-2iy\,\Phi'\left(z\right)+\Psi_2\left(z\right)\right].\end{aligned} \tag{2.12}$$

*К сожалению, данные формулы, выведенные Г. В. Колосовым иным, более сложным, путем оказались незаслуженно забытыми. Впоследствии Н. Н. Поляхов [7] вновь указал на их существование.

Здесь $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ — некоторые регулярные в S функции [6]. Сопоставляя (2.10), (2.11) и (2.12) видим, что

$$\Psi_1(z) = \Psi(z) - z\,\Phi'(z)\,, \quad \Psi_2(z) = \Psi(z) + z\,\Phi'(z)\,. \tag{2.13}$$

Заметим, вторые уравнения в (2.11) и (2.12) являются следствием того, что

$$\frac{d}{d\bar z}\bar z = \frac{d}{d\bar z}2x = \frac{d}{d\bar z}(-2iy) \equiv 1.$$

Переходя к определению перемещений, отметим прежде всего формулу

$$u + iv = \frac{1+\mu}{E}\left[k\int \Phi(z)\,dz - z\,\overline{\Phi(z)} - \int \overline{\Psi(z)}\,\overline{dz}\right], \tag{2.14}$$

выведенную Г. В. Колосовым одновременно с зависимостями (2.10). Здесь и ниже E — модуль Юнга; в случае плоской деформации $k = 3 - 4\mu$ и для обобщенного плоского напряженного состояния $k = (3-\mu)/(1+\mu)$; μ — коэффициент Пуассона.

Задание внешних усилий на границе области S позволяет определить функцию $\Psi(z)$ однозначно, а $\Phi(z)$ — с точностью до произвольного слагаемого $i\alpha$ (где α — вещественная постоянная). Поэтому, выполнив интегрирование в (2.14), получим значения вектора $u + iv$, которые будут содержать слагаемые

$$i\frac{(1+\mu)}{E}(k+1)\,\alpha z + \frac{(1+\mu)}{E}k\beta - \frac{1+\mu}{E}\,\bar\delta,$$

определяющие смещение области S как твердого целого. Здесь β и $\bar\delta$ — произвольные комплексные постоянные интегрирования соответственно функций $\Phi(z)$ и $\overline{\Psi(z)}$.

В свою очередь выражениям (2.11) и (2.12) отвечают следующие значения векторов перемещений:

$$u + iv = \frac{1+\mu}{E}\left[k\int \Phi(z)\,dz - 2x\,\overline{\Phi(z)} + \int \overline{\Phi(z)}\,d\bar z - \int \overline{\Psi_1(z)}\,d\bar z\right]$$

и

$$u + iv = \frac{1+\mu}{E}\left[k\int \Phi(z)\,dz - 2iy\,\overline{\Phi(z)} - \int \overline{\Phi(z)}\,d\bar z - \int \overline{\Psi_2(z)}\,d\bar z\right].$$

3. Анализ формул Г. В. Колосова при бесконечной области. До сих пор область S считалась конечной частью плоскости xy. Пусть теперь, наоборот, S состоит из всей плоскости xy, из которой удалены несколько конечных частей $S_1, S_2, \ldots S_n$ с контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, причем *напряжения остаются ограниченными в S, включая бесконечно удаленную точку.* Тогда, как отмечено в [2, стр. 124], при $|z| \gg 1$ имеем

$$\Phi(z) = \varphi'(z) = \frac{X + i\,Y}{2\pi(1+k)}\frac{1}{z} + \Gamma + \Phi_0(z)\,, \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \frac{k\,(X - i\,Y)}{2\pi(1+k)}\frac{1}{z} + A + \Psi_0(z)\,, \tag{3.1}$$

где $\Phi_0(z) = o\big(1/z^2\big)$, $\Psi_0(z) = o\big(1/z^2\big)$ — регулярные на бесконечности функции; X и Y — компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных к совокупности контуров $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$,

$$\Gamma = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty}{4} = \text{const}, \quad A = \frac{\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty}{2} + i\sigma_{xy}^\infty = \text{const}. \tag{3.2}$$

Если $X = Y = 0$, то формулы (3.1) принимают вид

$$\Phi(z) = \Gamma + \Phi_0(z), \quad \Psi(z) = A + \Psi_0(z),$$

откуда следует

$$\lim_{z\to\infty} \bar{z}\Phi'(z) = \lim_{x\to\infty} x\,\Phi'(z) = \lim_{y\to\infty} y\,\Phi'(z) = 0.$$

На основании этих равенств из (2.10)–(2.12) получаем

$$\lim_{z\to\infty} \Psi(z) = \lim_{x\to\infty} \Psi_1(z) = \lim_{y\to\infty} \Psi_2(z) = A. \tag{3.3}$$

Таким образом, в случае бесконечной области S в формулах (2.10)–(2.12) содержатся регулярные функции $\Psi(z)$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$, связанные между собой условиями (3.3). Последние, естественно, будут удовлетворены, когда

$$\Psi_1(z) = \Psi_2(z) = A = \mathrm{const}.$$

Полагая, к примеру, в (2.12)

$$\Psi_2(z) = \mathrm{Re}A + i\mathrm{Im}A,$$

после элементарных преобразований можем написать

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = 2\mathrm{Re}\Phi(z) - 2y\mathrm{Im}\Phi'(z) - \mathrm{Re}A,\\ \sigma_{yy} = 2\mathrm{Re}\Phi(z) + 2y\mathrm{Im}\Phi'(z) + \mathrm{Re}A,\\ \sigma_{xy} = -2y\mathrm{Re}\Phi'(z) + \mathrm{Im}A,\end{gathered} \tag{3.4}$$

где

$$\mathrm{Re}A = \frac{\sigma_{yy}^{\infty} - \sigma_{xx}^{\infty}}{2}, \quad \mathrm{Im}A = \sigma_{xy}^{\infty}. \tag{3.5}$$

Если $\sigma_{xx}^{\infty} = \sigma_{yy}^{\infty}$, $\sigma_{xy}^{\infty} = 0$, то $A \equiv 0$ и равенства (3.4) упрощаются:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = 2\mathrm{Re}\Phi(z) - 2y\mathrm{Im}\Phi'(z),\\ \sigma_{yy} = 2\mathrm{Re}\Phi(z) + 2y\mathrm{Im}\Phi'(z),\\ \sigma_{xy} = -2y\mathrm{Re}\Phi'(z),\end{gathered} \tag{3.6}$$

причем на вещественной оси $y = 0$ имеем $\sigma_{xx}(x,0) = \sigma_{yy}(x,0)$, $\sigma_{xy}(x,0) = 0$.

В обозначениях $2\Phi(z) = Z(z)$ выражения (3.4) и (3.6) принято называть формулами Вестергарда [8–10], однако на самом деле они являются «простейшим частным случаем» [2, стр. 113] соотношений (2.12).

Приняв в (2.11) $\Psi_1(z) = \mathrm{Re}A + i\mathrm{Im}A$, находим своеобразную модификацию зависимостей (3.4):

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = 2\mathrm{Re}\Phi(z) - 2x\mathrm{Re}\Phi'(z) - \mathrm{Re}A,\\ \sigma_{yy} = 2\mathrm{Re}\Phi(z) + 2x\mathrm{Re}\Phi'(z) + \mathrm{Re}A,\\ \sigma_{xy} = 2x\mathrm{Im}\Phi'(z) + \mathrm{Im}A\end{gathered} \tag{3.7}$$

и, если $A \equiv 0$, выражений (3.6):

$$\sigma_{xx} = 2\mathrm{Re}\Phi(z) - 2x\mathrm{Re}\Phi'(z),$$
$$\sigma_{yy} = 2\mathrm{Re}\Phi(z) + 2x\mathrm{Re}\Phi'(z), \tag{3.8}$$
$$\sigma_{xy} = 2x\mathrm{Re}\Phi'(z),$$

где на мнимой оси $x = 0$ выполняются условия $\sigma_{xx}(0, y) = \sigma_{yy}(0, y)$, $\sigma_{xy}(0, y) = 0$.

4. Применение третьей пары формул Г. В. Колосова к случаю периодической системы нагруженных трещин. Рассмотрим теперь проблему нахождения функций $\Phi(z)$ и $\Psi_2(z)$ в плоскости S, содержащей на оси абсцисс бесконечное число равноудаленных друг от друга трещин $a_k b_k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Обозначим через $2a$ длину этих трещин и через l расстояние между их центрами. Пусть на противоположных берегах трещин в точках $x_k = kl$ приложены сосредоточенные силы P, коллинеарные оси ординат. Напряжения на бесконечности считаем отсутствующими (рис. 2).

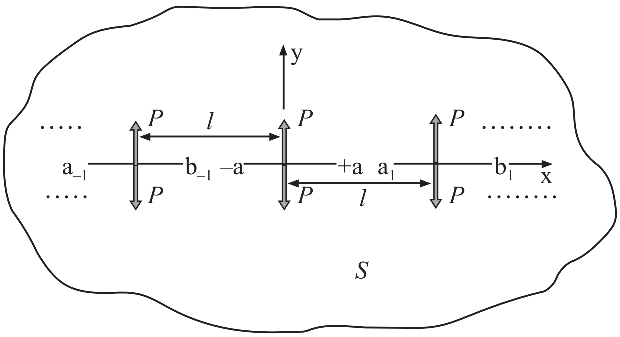

Рис. 2. Плоскость с периодической системой прямолинейных нагруженных трещин.

Симметрия внешних нагрузок и самой бесконечно-связной плоскости S налагает на функции $\Phi(z)$ и $\Psi_2(z)$ следующие требования:

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})} = \overline{\Phi}(z), \quad \Psi_2(z) = \overline{\Psi_2(\bar{z})} = \overline{\Psi}_2(z). \tag{4.1}$$

Из формул (2.12) находим

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - 2iy\,\Phi'(z) + \Psi_2(z),$$

откуда

$$\sigma_{xy} = -2y\mathrm{Re}\Phi'(z) + \mathrm{Im}\Psi_2(z),$$
$$\sigma_{yy} = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) + 2y\mathrm{Im}\Phi'(z) + \mathrm{Re}\Psi_2(z),$$

или на основании равенств (4.1)

$$\sigma_{xy} = -y\left[\Phi'(z) + \Phi'(\bar{z})\right] - \frac{i}{2}\left[\Psi_2(z) - \Psi_2(\bar{z})\right], \tag{4.2}$$

$$\sigma_{yy} = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - iy\left[\Phi'(z) - \Phi'(\bar{z})\right] + \frac{1}{2}\left[\Psi_2(z) + \Psi_2(\bar{z})\right]. \tag{4.3}$$

Вид функций $\Phi(z)$ и $\Psi_2(z)$ можно установить из краевых условий на трещинах $a_k b_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$:

$$\sigma_{xy}^{\pm}(x) = 0, \quad \sigma_{yy}^{\pm}(x) = -f[P\delta(x)].$$

Отсюда, согласно (4.2) и (4.3), следует

$$\Psi_2^{+}(x) - \Psi_2^{-}(x) = 0 \tag{4.4}$$

и

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) + \frac{1}{2}\left[\Psi_2^{+}(x) + \Psi_2^{-}(x)\right] = -P\delta(x), \tag{4.5}$$

где

$$f[\delta(x)] = \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x \pm kl).$$

Здесь и ниже $\delta(x)$ — функция Дирака; индексами $^{+}$ и $^{-}$ обозначены соответственно верхний и нижний берег трещины.

Имея в виду оговорённые ранее условия на бесконечности ($\sigma_{xx}^{\infty} = \sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_{xy}^{\infty} = 0$), из равенства (4.4) и формулы (3.5) заключаем, что

$$\Psi_2(z) = 0. \tag{4.6}$$

Полученный результат позволяет представить соотношение (4.5) в виде краевого условия задачи Гильберта—Привалова [10] для функции $\Phi(z)$, т. е.

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) = -Pf[\delta(x)].$$

Решение этой задачи записывается следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{-P}{2\pi i\, X(z)} \int\limits_{L^{\infty}} \frac{X^{+}(x)\, f[\delta(x)]}{x - z}\, dx, \tag{4.7}$$

где

$$\begin{aligned} X(z) &= \sqrt{(z-a)(z+a)(z-a_1)(z-b_1)(z-a_{-1})(z-b_{-1})\ldots} = \\ &= \sqrt{z^2 - a^2} \prod_{=1}^{\infty} \sqrt{(z+lk-a)(z+lk+a)(z-lk-a)(z-lk+a)} = \\ &= \sqrt{(z+a)\prod_{1}^{\infty}\left[(z+a)^2 - k^2l^2\right](z-a)\prod_{1}^{\infty}\left[(z-a)^2 - k^2l^2\right]}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Символ L^{∞} означает интегрирование по всей совокупности прямолинейных трещин.

Подставив выражения (4.8) в формулу (4.7), после соответствующих выкладок и преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -P\frac{\sqrt{-\sin^2\frac{\pi a}{l}}}{2\pi i\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{l} - \sin^2\frac{\pi a}{l}}}\left[-\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{kl - z} + \frac{1}{-kl - z}\right)\right] = \\ &= P\frac{\sin\frac{\pi a}{l}}{2\pi\sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{l} - \sin^2\frac{\pi a}{l}}}\left[\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2 - k^2l^2}\right]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Используя разложение $\mathrm{ctg}\,(\pi z)$ на простейшие дроби [11, с. 246],

$$\pi \mathrm{ctg}\,(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2},$$

получаем

$$\Phi\,(z) = \frac{P}{2l} \frac{\sin \frac{\pi a}{l}}{\mathrm{tg} \frac{\pi z}{l} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{l} - \sin^2 \frac{\pi a}{l}}}. \qquad (4.10)$$

В случае одной трещины ($y = 0,\ -a \le x \le +a$) можно считать $l \to \infty$. Поэтому, разлагая в (4.10) тригонометрические функции в степенные ряды (с точностью до малых первого порядка), выводим

$$\Phi\,(z) = \frac{Pa}{2\pi z \sqrt{z^2 - a^2}}. \qquad (4.11)$$

Если $|z| \ll a$, то (4.11) преобразуется в формулу

$$\Phi\,(z) = \frac{P}{2\pi i z},$$

которая, вкупе с равенством (4.6)*, является решением задачи Фламана [1, с. 361] об упругой полуплоскости, загруженной на границе сосредоточенной силой.

Литература

1. *Новожилов В. В.* Теория упругости. 1958. Л.: Судпромгиз, 370 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. 1966. М.: Наука, 707 с.
3. *Timpe A.* Probleme der Spannungverteilung in ebenen Systemen, einfach gelost mit Hilfe der Airychen Function // Zeitschrift fur Mathematik und Physik. 1905. B.52. H.1. S. 348–383.
4. *Mesnager A.* Sur l' application de la theorie de l' elasticite au calcul des pieces rectangulaires flechies // Comptes Rendus des seances de l' Academie des sciences. 1901. T. 132, N 24. h 1475–1478.
5. *Колосов Г. В.* Применение комплексной переменной к теории упругости. Л.; М., 1935. 215 с.
6. *Даль Ю. М.* О соотношениях Г. В. Колосова в плоской задаче теории упругости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2007. Сер. 1. Вып. 3. (К 75-летию академика Н. Ф. Морозова). С. 11–14.
7. *Поляхов Н. Н. (мл.), Поляхов Н. Н.* Растяжение плоскости с решеткой разрезов без выноса // Вестник ЛГУ. 1981. Сер 1. №7. С. 85-90.
8. *Westergaard Y. M.* Bearing pressures and cracks. Journal Applied Mechanics, 1939. Vol. 6, N 2. P. 49–53.
9. *Sih G. C.* On the Westergaard Method of Crack Analysis. International Journal of Fracture Mechanics. 1966. Vol. 2. N 4. P. 628–631.
10. *Eftis J., Liebowitz H.* On the Modified Westergaard Equations for Certain Plane Problems. International Journal of Fracture Mechanics. 1972. Vol. 8, N 4. P. 383–392.
11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного / изд. 4-е. 1973. М.: Наука, 736 с.
12. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.

Статья поступила в редакцию 2013 г.

Сведения об авторах

Даль Юрий Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; ymdahl@yandex.ru

*Уравнение (4.6) равносильно соотношению $\Psi\,(z) = -z\,\Phi'\,(z)$.

ABOUT KOLOSOV'S FORMULAS IN PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN THE PRESENCE OF PERIODICAL CUTS

Yuriy M. Dahl

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; ymdahl@yandex.ru

The solutions of the plane theory of elasticity in terms of the complex functions $\Phi(z)$ and $\Psi(z)$ (two Kolosov's formulas) are analyzed. The right side of the first of these formulas is the integral of the equation of indissolubility, and the right side of the second formula is the integral of two equations of equilibrium.

Besides the classical form, two different versions of Kolosov's relations are found. It is also shown that Westergaard's formulas are the special case of Kolosov's relations. The formulas for displacements are derived. The exact solution of the periodic problem for a plane with infinite number of rectilinear cracks on the horizontal line OX is obtained.

It is assumed, that stresses vanish at infinity and the opposite crack edges are loaded with normal concentrated forces. The analytical solution of crack theory exists, if the following conditions are fulfilled: 1) the region with a straight crack is the boundless plane; 2) the main vector of external stresses applied to all cracks equals zero; 3) the stress and strain conditions are symmetrical regarding the axis OX.

It should be noted, that solutions in functions $\Phi(z)$ and $\Psi(z)$ (these functions are simple in the multiply-connected domain) are more preferable in comparison with solutions in terms of the multivalued function $\varphi(z)$ and $\psi(z)$. Refs 11. Figs 2.

Keywords: theory of elasticity, complex variable, Kolosov's formulas, mathematical theory of cracks.

ХРОНИКА

27 ноября 2013 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступил кандидат физ.-мат. наук, доцент Ф. Ф. Родюков (Санкт-Петербургский государственный университет) с докладом на тему «Новый формализм в электромеханике, основанный на уравнениях Лагранжа в форме Ньютона».

Краткое содержание доклада:

Возврат к формулировке второго закона механики, предложенной самим Ньютоном, позволил заменить уравнения Лагранжа—Максвелла на уравнения Лагранжа—Ньютона. Это привело к необходимости введения двух новых законов электромагнитной индукции для трансформаторов. Разъяснена сущность и дано название зарядов смещения — магнитонов — в проводниках. Порядок симметризированных с их помощью уравнений Максвелла сведен к двум. Применение уравнений Лагранжа—Ньютона к описанию динамических процессов в трансформаторах и электрических машинах переменного тока сняло все существующие до настоящего времени здесь парадоксы. На примерах показано, что решения этих уравнений адекватно описывают физические процессы в исследуемых объектах.