

## КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПРИ УДАРЕ АБСОЛЮТНО УПРУГОЙ ЧАСТИЦЫ В ФОРМЕ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ\*

А. С. Зотиков, В. А. Лашков

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

В статье исследуется влияние формы частицы на параметры ее отскока. Приведено сравнение результатов расчетов соударения с плоской поверхностью частицы в форме сферы и эллипсоида вращения. Показано, что форма частицы существенно влияет на параметры отскока. Установлено, что частица в процессе удара может не один раз взаимодействовать с поверхностью, значительная часть энергии отраженной частицы сосредоточена во вращательной степени свободы. Библиогр. 9 назв. Ил. 7.

*Ключевые слова:* эллипсоид вращения, прямой удар, расчет параметров отскока, коэффициент восстановления скорости.

**Введение.** Исследованию взаимодействия твердых частиц газозвеси с поверхностью обтекаемого тела посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ. Как правило, при теоретическом рассмотрении таких вопросов принимается, что твердая частица имеет форму сферы, а поверхность, о которую ударяется частица, — гладкая. Такое упрощение не позволяет объяснить некоторые явления, наблюдаемые в эксперименте.

Для определения характера взаимодействия частицы с поверхностью часто используется коэффициент восстановления скорости. Коэффициенты восстановления нормальной и касательной составляющих скорости определяются отношением соответствующих проекций скоростей частицы после и до удара. Обозначим через  $a_n = V_{y1}/V_{y0}$  коэффициент восстановления нормальной и через  $a_t = V_{x1}/V_{x0}$  коэффициент восстановления тангенциальной составляющих скорости частицы. Принятую систему координат можно видеть на рис. 1.

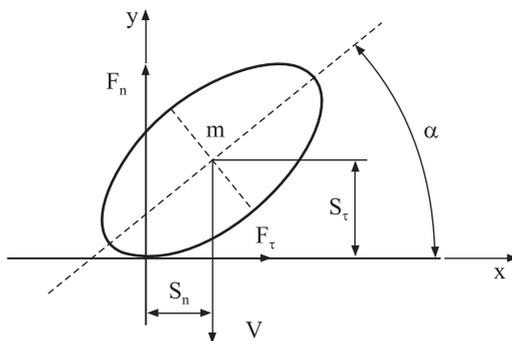


Рис. 1. Схема взаимодействия эллипсоида с поверхностью.

Эксперименты [1, 2] показывают, что в некоторых случаях коэффициенты восстановления нормальной или касательной к поверхности компонент скорости могут быть больше единицы. Очевидно, это связано с тем, что в природе твердые части-

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-08-00826).

цы обычно имеют форму, далекую от сферической, а поверхность обтекаемого тела обладает шероховатостью. Например, по данным работы [3] для частиц неслоистых пород средняя численная характеристика формы — отношение толщины к ширине и отношение длины к ширине частицы — составляет соответственно 0,6–0,7 и 1,4–1,6. Влияние шероховатости поверхности на величину коэффициента восстановления скорости сферической частицы рассмотрено в работах [1, 4], где показано, что шероховатость поверхности может значительно изменить величину среднестатистических коэффициентов восстановления скорости.

Если частица обладает несферической формой, очевидно, что при ударе даже о гладкую поверхность вектор контактной силы, как правило, не проходит через центр масс частицы. Это приводит к появлению момента силы, который заставляет частицу вращаться. Учет вращения частицы важен для построения ее дальнейшей траектории, так как силы Магнуса оказывают существенное влияние на траекторию движения частицы в потоке газа. Влияние формы частиц на их рассеяние при отражении исследовалось в теоретической работе [5], где рассматривались частицы в виде эллипсоида вращения, прямоугольной призмы и призмы со срезанными вершинами. В этой работе методами классической механики установлено, что индикатриса рассеяния частиц существенно зависит от их формы.

Рассмотрим взаимодействие частицы в форме эллипсоида вращения с плоской поверхностью преграды (см. рис. 1). Скорость падающей частицы направлена по нормали к поверхности. Кинематические параметры движения отраженной частицы зависят от ее начальной ориентации относительно поверхности, поэтому в этом случае следует исследовать статистическое распределение кинематических параметров. Очевидно, что в случае эллипсоида вращения кинематические параметры отскока будут определяться не только скоростью удара, физико-механическими свойствами материалов частицы и поверхности, но и углом наклона главной оси эллипсоида  $\alpha$ . При падении частицы в месте контакта возникает ударная сила реакции (см. рис. 1), которую можно разложить на две составляющие: нормальную  $F_n$  и касательную  $F_\tau$  к поверхности. Нетрудно видеть, что при увеличении угла  $\alpha$  от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  плечо действия нормальной силы  $s_n$  увеличивается от нуля до некоторого максимального значения, а затем уменьшается до нуля. Анализ показывает, что максимальное  $s_n$  для эллипсоида с соотношением осей 1 : 2 равно половине длины малой оси при угле  $35^\circ$ . Плечо касательной силы  $s_\tau$  с увеличением угла  $\alpha$  растет от величины длины малой до величины длины большой полуоси эллипсоида. При этом при углах  $\alpha = 0^\circ$  и  $90^\circ$  касательная сила реакции равна нулю. Таким образом, момент ударной силы реакции относительно центра масс частицы  $m$  определяется величинами сил  $F_n$  и  $F_\tau$ , а также длинами  $s_n$  и  $s_\tau$ . От момента силы реакции будет зависеть угловая скорость вращения отраженной частицы.

При определении кинематических параметров отскочившей частицы в классической механике используются экспериментально полученные коэффициенты восстановления скорости. Другим путем определения параметров движения отскочившей частицы является расчет импульса контактной силы при ударе с помощью методов механики деформируемого твердого тела. Такой подход позволяет рассчитать с учетом формы частицы и механических свойств материалов соударяемых тел как линейную, так и вращательную скорости частицы после удара, а также коэффициент восстановления скорости.

**Постановка задачи.** Постановка задачи соударения твердых тел, разностная схема и методы моделирования подробно описаны в работе [6]. Основным инструмен-

том для численного исследования является метод конечных элементов, который совместно с явным методом интегрирования по времени и постановкой задачи в лагранжевых координатах дает хорошие результаты при расчете упругопластического взаимодействия тел. Вычислительные методы для решения задачи о соударении тел реализованы в коммерческом программном пакете ANSYS, который использовался в настоящей работе при решении поставленной задачи. Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра «Вычислительный Центр СПбГУ» (<http://cc.spbu.ru>).

Систему основных уравнений, которая описывает механику соударения тел, составляют:

— уравнение неразрывности среды

$$\rho_0 W_0 = \rho W,$$

где  $\rho$  — плотность материала,  $W$  — объем;

— уравнения сохранения импульса

$$\begin{aligned}\rho \ddot{x} &= b_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \ddot{y} &= b_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \ddot{z} &= b_z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z},\end{aligned}$$

где  $\sigma$  — тензор напряжений,  $b$  — вектор массовых сил;

— закон сохранения внутренней энергии

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\rho} (\sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{yy} \dot{\epsilon}_{yy} + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz} + 2\sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + 2\sigma_{yz} \dot{\epsilon}_{yz} + 2\sigma_{zx} \dot{\epsilon}_{zx}),$$

где  $\epsilon_{ij}$  — тензор деформаций.

Для контактной поверхности введены граничные условия: скольжение материалов при наличии кулоновского трения. Если коэффициент трения  $\mu$ , то сила трения определяется выражением

$$T = \mu |N| q,$$

где  $q$  — единичный вектор на касательной плоскости контакта, направленный против вектора относительной скорости. Граничными условиями являются равенство нормальных скоростей на поверхностях, принадлежащих границе, и противоположность сил реакции. Коэффициент трения рассматривался как функция, зависящая от скорости скольжения взаимодействующих поверхностей  $V_t$ :

$$\mu = \mu_d + (\mu_s - \mu_d) e^{-cV_t},$$

где  $\mu_d$  и  $\mu_s$  — динамический и статический коэффициенты трения,  $c$  — заданная константа.

Частице задавалась начальная ориентация в пространстве (угол  $\alpha$ ), а также начальная скорость  $V_0$  ( $0, V_{y0}, 0$ ). Начальная угловая скорость частицы принималась равной нулю.

При разработке математической модели материалов, применявшихся в численном эксперименте, и определении напряжений в области пластических деформаций использовался метод Джонсона—Кука [7]:

$$\sigma = (A + B\epsilon_p^n)(1 + C \log \dot{\epsilon}_p^*)(1 - T_H^m),$$

где  $A$  — предел текучести,  $B$  — константа твердости,  $C$  — константа скорости деформации,  $\epsilon_p^n$  — эффективная пластическая деформация,  $\dot{\epsilon}_p^*$  — безразмерная величина скорости пластической деформации,  $T_H$  — отношение температуры вещества к температуре его плавления,  $n$  — экспонента твердости,  $m$  — константа термического смещения.

Расчетная сетка задавалась путем разбиения частицы и преграды на элементарные тетраэдры. Размер элементов сетки был выбран таким образом, чтобы обеспечить погрешность расчетов скорости отскока частицы не хуже 1%. Максимальный линейный размер элемента расчетной сетки частицы составлял 0,1 мм. В области контактной поверхности на преграде (область задавалась сферой диаметром 6 мм) расчетная сетка имела также размер 0,1 мм, в остальных же частях размеры элементов задавались существенно большими — 10 мм. В качестве частицы исследовались шарик диаметром 1,59 мм и эллипсоид вращения с главными полуосями 0,63 мм и 1,26 мм и такой же как шарик массой (16 мг). Преграда представляла собой куб размерами 50 × 50 × 50 мм.

Параметры отскока частицы в форме эллипсоида вращения зависят от ее пространственной ориентации, которая задается углом  $\alpha$  (см. рис. 1). Очевидно, что изменение положения эллипсоида путем вращения вокруг оси  $y$  при постоянном угле  $\alpha$  не будет приводить к изменению величины параметра отскока. Найдем математическое ожидание искомых величин. Представим, что каждой точке верхней полусферы, центр которой расположен на плоскости, соответствуют свои параметры отскока эллипсоида. При этом значения параметра для одной широты, которая определяется углом  $\alpha$  между радиус-вектором точки полусферы и плоскостью, постоянны. В этом случае математическое ожидание искомой величины  $\bar{X}$  определится как

$$\bar{X} = \frac{\int X dS}{S} = \int_0^{\pi/2} X \cos \alpha d\alpha,$$

где  $dS$  — площадь пояса сферы,  $S$  — площадь поверхности полусферы.

**Результаты исследований.** Расчеты соударения частицы с поверхностью производились при следующих условиях и допущениях. Рассматривался прямой удар абсолютно упругой не вращающейся частицы, имеющей форму эллипсоида вращения, в центр грани куба. Отношение главных полуосей эллипсоида 1 : 1 (в этом случае частица имеет форму сферы) и 1 : 2. Преграда испытывает упругопластические деформации. Скорость удара — 100 м/с. Материал частицы — сталь со следующими параметрами: плотность 7460 кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $2 \times 10^8$  кПа, коэффициент Пуассона 0,3. Материал преграды — алюминиевый сплав — Al 2024T351 (дюраль Д16Т). Параметры для формулы Джонсона—Кука [7]:  $A = 265$  кПа,  $B = 426$  кПа,  $C = 0,015$ ,  $T_H = 0,04$ ,  $n = 0,34$ ,  $m = 1$ .

Известно, что на коэффициент трения влияет не только скорость скольжения, но и контактное давление, состояние поверхностей, их твердость и шероховатость [8]. Поэтому данные по коэффициентам трения разных авторов отличаются. При проведении расчетов были приняты следующие параметры для функции коэффициента трения:  $\mu_d = 0,15$ ,  $\mu_s = 0,61$ ,  $c = 0,02$  с/м.

Предполагалось, что частица имеет достаточно малый размер, чтобы не принимать во внимание волновые процессы при ударе. Силами тяжести, адгезии, а также аэродинамическими силами при движении частицы пренебрегалось.

На рис. 2 показаны результаты расчетов коэффициента восстановления скорости сферы в широком диапазоне изменения скорости удара ( $V_0 = 5-200$  м/с). Там же точками нанесены данные, представленные в работе Х. Ф. Кангура и И. Р. Клейса [9]. Расхождение данных опытов и расчетов составляет не более 15%. С увеличением скорости удара коэффициент восстановления скорости монотонно уменьшается от 0,7 при скорости 5 м/с до 0,2 при 200 м/с. Удовлетворительное совпадение данных расчетов и экспериментов позволяет сказать, что использованная методика расчета может быть с успехом применена для исследования характера соударения и определения кинематических параметров отскочившей частицы.

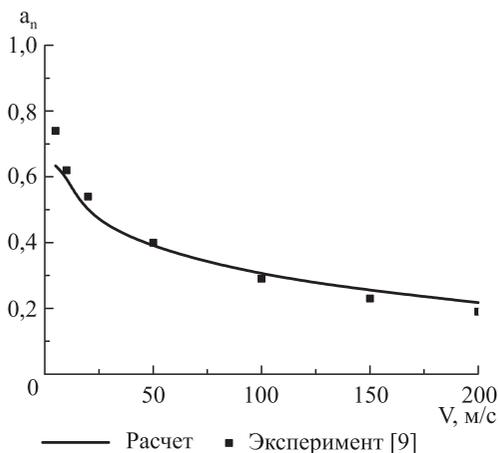


Рис. 2. Коэффициент восстановления скорости сферы в зависимости от скорости удара.

Следующим этапом работы было определение параметров отскока частицы в форме эллипсоида вращения при скорости удара 100 м/с. Кинематические параметры отскока такой частицы существенно зависят от угла наклона главной оси к поверхности преграды  $\alpha$ . На рис. 3 приведены данные расчета коэффициента восстановления нормальной составляющей скорости частицы в зависимости от угла наклона оси  $\alpha$ .

Коэффициент восстановления скорости эллипсоида меняется в довольно широком диапазоне: 0,05–0,33. Коэффициент восстановления скорости для сферической частицы при такой же скорости удара ( $V = 100$  м/с) составляет 0,296. Среднестатистический коэффициент восстановления скорости для эллипсоида равен 0,249, что на 16% меньше, чем коэффициент восстановления для сферы.

Характерные виды кратеров, оставляемых на поверхности эллипсоидом, показаны на рис. 4.

Морфологические исследования лунки, оставшейся на поверхности после удара, показали, что в диапазоне изменения углов наклона  $0-17^\circ$  и  $68-90^\circ$  можно считать, что взаимодействие однократное — внедрение в материал и отскок, края лунки имеют ровные очертания (рис. 4-1, 4-2). При  $\alpha = 17-50^\circ$  форма лунки показывает, что частица при взаимодействии перекатывается по поверхности, лунка имеет вытянутые в одну сторону границы (рис. 4-3). В диапазоне  $50-68^\circ$  наблюдается двукратное

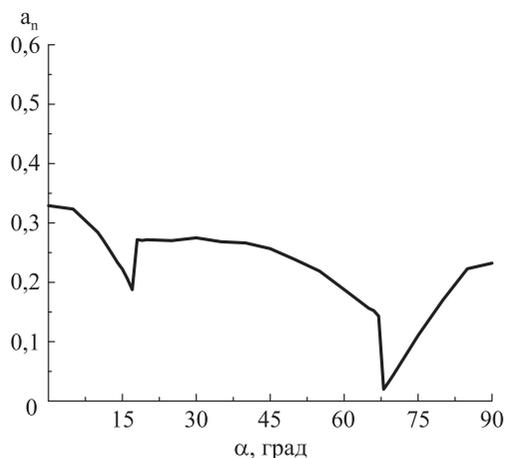


Рис. 3. Влияние угла наклона оси эллипсоида на коэффициент восстановления нормальной составляющей скорости.

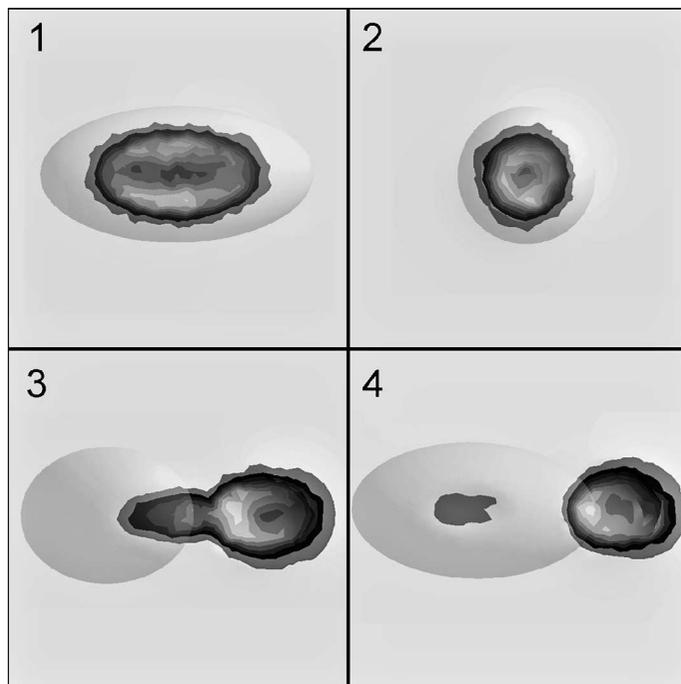


Рис. 4. Форма кратера после удара эллипсоида, последовательно при углах  $\alpha = 0, 90, 30, 55^\circ$ .

взаимодействие частицы с поверхностью, лунка состоит из двух не связанных между собой кратеров (рис. 4-4).

Отраженная частица обладает ненулевой касательной к поверхности тела скоростью, кроме двух случаев:  $\alpha = 0$  и  $90^\circ$  (см. рис. 5). Касательная скорость может составлять значительную величину, до 25 м/с. Очевидно, что это приводит к зна-

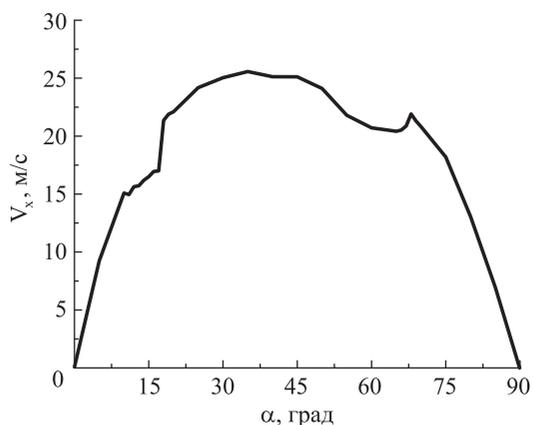


Рис. 5. Зависимость касательной составляющей скорости частицы после удара от угла наклона главной оси.

чительному рассеянию отраженных частиц. На основе данных, представленных на рис. 3 и 5, нетрудно получить угол  $\beta$ , под которым частица отлетает от поверхности (см. рис. 6). Как видно, угол  $\beta$  значительно зависит от угла наклона главной оси эллипсоида к поверхности и меняется в широком диапазоне — от 5 до  $90^0$ . Среднестатистический угол отскока составляет  $51^0$ .

Были проведены расчеты распределения механической энергии отраженной частицы по степеням свободы. Относительная энергия (отнесенная к энергии падающей частицы) поступательной и вращательной степеней свободы эллипсоида в зависимости от угла наклона  $\alpha$  представлены на рис. 7. В основном энергия вращения отраженной частицы меньше энергии ее поступательного движения, однако при углах наклона оси эллипсоида  $15-17^0$  энергия вращения становится выше энергии поступательного движения. Среднестатистические величины для энергии поступательного движения — 0,108, энергии вращательного движения — 0,034.

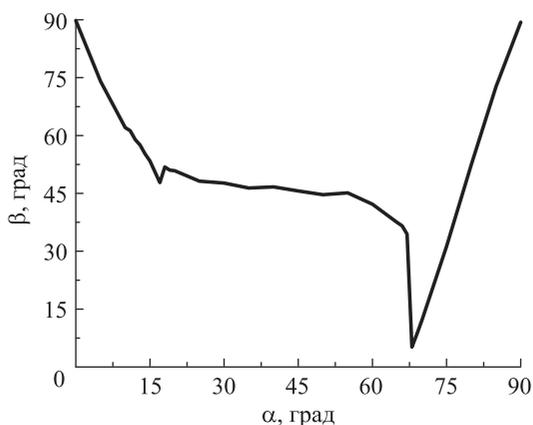


Рис. 6. Угол отскока частицы формы эллипсоида в зависимости от угла наклона его оси.

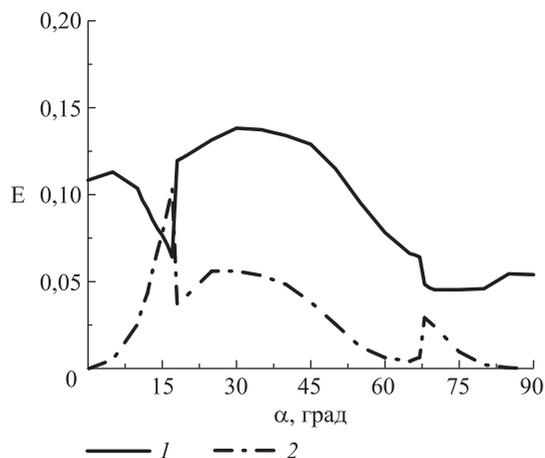


Рис. 7. Относительная энергия поступательной (1) и вращательной (2) степеней свободы эллипсоида в зависимости от угла  $\alpha$ .

Результаты исследований показывают, что механическая энергия вращения частицы составляет существенную величину от энергии поступательного движения (около 30%). Таким образом, при расчете прямого удара с поверхностью не вращающихся несферических частиц необходимо учитывать то, что они при соударении приобретают вращение. Следует также отметить, что если для потока частиц в форме эллипсоида средняя угловая скорость вращения и касательная к поверхности обтекаемого тела скорость отраженных частиц, очевидно, равны нулю, то для каждой конкретной частицы эти параметры весьма значительны.

**Выводы.** Результаты исследований ударного взаимодействия с поверхностью частиц, имеющих форму сферы и эллипсоида вращения, позволяют сделать следующие выводы:

- средний коэффициент восстановления нормальной составляющей скорости отраженной частицы формы эллипсоида существенно меньше, чем коэффициент восстановления скорости для сферы;
- эллипсоид в процессе удара приобретает вращение, что может приводить к многократному взаимодействию его с поверхностью тела;
- существенная часть механической энергии отраженного эллипсоида накапливается во вращательной степени свободы.

## Литература

1. Sommerfeld M., Huber N. Experimental analysis and modeling of particle-wall collisions // International journal of multiphase flow. 1999. Vol. 25. P. 1457–1489.
2. Табаков В., Мейлэк М. Ф., Хамед А. Измерение лазером характеристик отскакивания твердых частиц при соударении их с поверхностью из алюминиевого (2024) и титанового (6Al-4V) сплавов // Аэрокосмическая техника. 1987. №12. С. 58–64. (Tabakoff W., Malak M. F., Hamed A. Laser measurements of solid-particle rebound parameters impacting on 2024 aluminum and 6Al-4V titanium alloys // AIAA Journal. 1987. 0001-1452. Vol. 25. No 5 (721–726)).
3. Латжин А. С. Перспективные процессы переработки дисперсного сырья. Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2004. 126 с.
4. Деревич И. В. Вероятностная модель столкновения частиц с шероховатой поверхностью // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. №5. С. 239–244.

5. *Панфилов С. В., Циркунов Ю. М.* Рассеяние несферических частиц примеси при отскоке от гладкой и шероховатой поверхностей в высокоскоростном потоке газозвеси // Прикладная механика и теоретическая физика. 2008. Т. 49. № 2. С. 79–88.

6. *Фолмин В. М., Гулидов А. И., Сапожников Г. А. и др.* Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. 600 с.

7. *Johnson G. R., Cook W. H.* A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures // Proc. of 7th Symposium on Ballistics, Hague, Netherlands, 1983. P. 541–547.

8. Машиностроение. Энциклопедический справочник под ред. Акад. Е. А. Чудакова // ГНТИ машиностроительной литературы. М., 1948. Т. 2. 891 с.

9. *Кангур Х. Ф., Клейс И. Р.* Экспериментальное и расчетное определение коэффициента восстановления при ударе // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 182–185.

Статья поступила в редакцию 2013 г.

Сведения об авторах

*Зотиков Александр Сергеевич* — аспирант; a\_zotikov@gmail.com

*Лашков Валерий Александрович* — доктор физико-математических наук; valerial180150@gmail.com

#### **RESTITUTION COEFFICIENT OF VELOCITY AT IMPACT OF ABSOLUTELY ELASTIC PARTICLE WITH SHAPE OF AN ELLIPSOID OF REVOLUTION**

*Alexander S. Zotikov, Valeriy A. Lashkov*

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; a\_zotikov@gmail.com, valerial180150@gmail.com

The article is devoted to an investigation of influence of particle shape on the parameters of its rebound. The comparison of the results of calculations of collision of the flat surface with the particle with shape both a sphere and an ellipsoid of revolution has been done. It is shown that the shape of particles significantly affects the parameters of rebound. It was found that particle can interact with the surface several times during collision, a significant portion of the reflected energy is concentrated in the rotational degree of freedom of the particle. Refs 9. Figs 7.

*Keywords:* ellipsoid of revolution, normal impact, rebound parameters calculation, restitution coefficient of velocity.