

ИЗГИБ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И МОМЕНТОМ

С. А. Кабриц, В. А. Шамина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматривается изгиб оболочки вращения, при котором внутренние усилия и моменты в каждом ее поперечном сечении статически эквивалентны поперечной силе и изгибающему моменту. Такой вид деформации и соответствующего нагружения называют обратносимметричным. Из многочисленных работ, посвященных исследованию возникающего при этом напряженно-деформированного состояния, следует выделить известные монографии В. В. Новожилова и К. Ф. Черныха, в которых использовано комплексное преобразование основных уравнений теории оболочек и асимптотический метод их исследования и решения. При этом материал оболочки предполагался однородным изотропным и подчиняющимся обобщенному закону Гука. В то время, когда не было современных вычислительных средств, такой подход позволил решить многие технические проблемы.

В данной работе рассматриваемая задача сведена к интегрированию системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, два из которых решаются в квадратурах. Известные системы совпадают с величинами, удобными для удовлетворения краевым условиям. Уравнениями равновесия определяется вид статических краевых величин. Соответствующие им обобщенные перемещения приняты в качестве кинематических краевых величин. Определяющие уравнения могут отличаться от обобщенного закона Гука для однородного изотропного материала, лишь бы были выполнены условия существования обратносимметричной деформации. При этом представленные основные уравнения не изменятся. Библиогр. 4 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: изгиб, поперечная сила, краевые величины, уравнения сплошности, напряженно-деформированное состояние.

Введение. Рассматривается изгиб оболочки вращения, при котором внутренние усилия и моменты в каждом ее поперечном сечении статически эквивалентны поперечной силе и изгибающему моменту. Такой вид деформации и соответствующего нагружения называют обратносимметричным. Исследованию возникающего при этом напряженно-деформированного состояния оболочки посвящен ряд работ, из которых следует выделить [1, 2]. В [1, 2] использовано комплексное преобразование основных уравнений теории оболочек и асимптотический метод их исследования и решения. При этом предполагалось, что материал оболочки однородный изотропный и подчиняется закону Гука. В то время, когда не было современных вычислительных средств, такой подход к решению проблемы позволил получить приемлемые результаты и решить многие технические проблемы.

В настоящее время прикладные задачи усложняются и требуют совершенствования расчетных схем. Так, в монографии [3] одной из обсуждаемых тем является определение правомерности использования безмоментного решения и балочной схемы для определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при действии обратносимметричной (ветровой) нагрузки. При этом основой исследования являются общие соотношения теории оболочек, представленные в перемещениях.

Для решения уравнений, соответствующих уточненным расчетным моделям, приходится обращаться к численным методам. В [3] принят метод конечных элементов, который стал доминирующим при определении напряженно-деформированно-

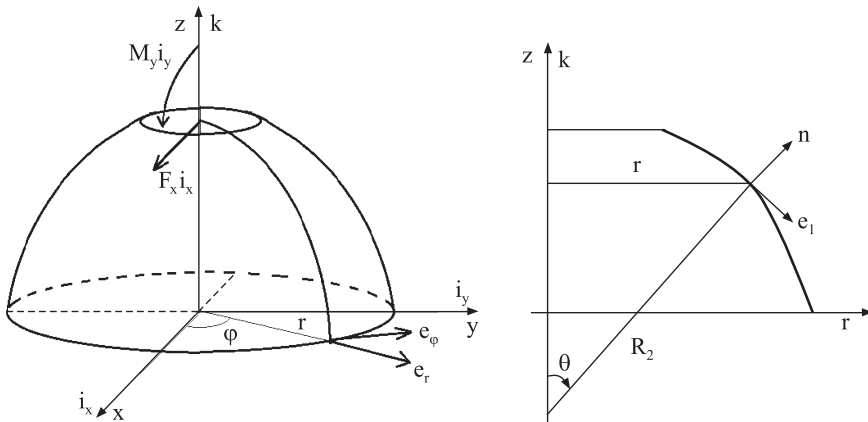
го состояния тонкостенных конструкций. Однако обыкновенные дифференциальные уравнения решаются и иными методами, например [4].

Эффективность использования численных методов зачастую зависит от удачной формулировки задачи. С этой целью основные уравнения, описывающие обратносимметрично напряженно-деформированное состояние, преобразуются в систему вещественных дифференциальных уравнений первого порядка, неизвестные которой совпадают с величинами, в которых формулируются краевые условия. Определяющие уравнения могут отличаться от обобщенного закона Гука для однородного изотропного материала, лишь бы были выполнены условия существования обратносимметричной деформации. При этом представленные основные уравнения не изменятся.

1. Некоторые соотношения теории оболочек вращения. Используем общие соотношения теории оболочек вращения, записанные в линиях кривизны и приведенные в [1, 2]. Ниже представляем те из них, которые необходимы для постановки рассматриваемой задачи. При этом основная часть работы будет избавлена от расшифровки принятых в ней обозначений.

Если r, φ, z — цилиндрические координаты с ортами $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$, \mathbf{k} — орт оси вращения оболочки, θ — угол между нормалью к срединной поверхности и ее осью вращения (рисунок), то θ и φ — гауссовы координаты на срединной поверхности. При этом координатная θ -линия — меридиан оболочки, ее орт касательной \mathbf{e}_1 . Координатная φ -линия — окружность в плоскости $z = \text{const}$ с ортом касательной $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$. Главные радиусы кривизны срединной поверхности $R_1 = R_1(\theta)$ — радиус кривизны меридиана, $R_2 = R_2(\theta)$ — радиус кривизны нормального сечения срединной поверхности. Параметры Ламе введенных гауссовых координат имеют вид

$$A_1 = R_1(\theta), \quad A_2 = r(\theta), \quad r = R_2 \sin \theta.$$



Из рисунка следует, что орт нормали к срединной поверхности \mathbf{n} и орт касательной к меридиану \mathbf{e}_1 определяются формулами

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{k} + \sin \theta \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{k}, \quad \frac{dr}{d\theta} = R_1 \cos \theta, \quad \frac{dz}{d\theta} = -R_1 \sin \theta.$$

Усилия, моменты и перемещения, возникающие в оболочке, представляем компонентами по направлениям $\mathbf{e}_1, \mathbf{n}, \mathbf{e}_2$ или $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$. Так, в сечении $\theta = \text{const}$

действует усилие \mathbf{T}_1 и момент \mathbf{M}_1 :

$$\mathbf{T}_1 = T_1 \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_2 + N_1 \mathbf{n} = -Q_z \mathbf{k} + Q_r \mathbf{e}_r + T_{12} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{n} \times (M_1 \mathbf{e}_1 + M_{12} \mathbf{e}_2).$$

В сечении $\varphi = \text{const}$ имеем усилие \mathbf{T}_2 и момент \mathbf{M}_2 :

$$\mathbf{T}_2 = T_{21} \mathbf{e}_1 + T_2 \mathbf{e}_2 + N_2 \mathbf{n}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{n} \times (M_{21} \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2).$$

В уравнениях равновесия и краевых условиях обычно используются симметричные усилия и моменты:

$$S = T_{12} - \frac{M_{21}}{R_2} = T_{21} - \frac{M_{12}}{R_1}, \quad 2H = M_{12} + M_{21}.$$

Рассмотрим вектор перемещения оболочки:

$$\mathbf{U}(\theta, \varphi, \zeta) = \mathbf{u}(\theta, \varphi) + \zeta \boldsymbol{\Omega}(\theta, \varphi) \times \mathbf{n}(\theta, \varphi), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u}(\theta, \varphi) = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{n} = u_r \mathbf{e}_r + u_z \mathbf{k} + u_2 \mathbf{e}_2, \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} = \vartheta_1 \mathbf{e}_1 + \vartheta_2 \mathbf{e}_2, \quad \vartheta_1 = -\mathbf{n} \cdot \frac{1}{R_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}, \quad \vartheta_2 = -\mathbf{n} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi}. \quad (1.3)$$

Здесь ζ — поперечная координата, $\mathbf{u}(\theta, \varphi)$ — вектор перемещения точек срединной поверхности.

Перемещениям (1.2), (1.3) соответствуют компоненты тангенциальной деформации

$$\epsilon_1 = \frac{1}{R_1} \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi}, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_1 = \frac{1}{R_1} \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}, \quad \omega_2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} \quad (1.4)$$

и компоненты изгибной деформации

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{1}{R_1} \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}}{\partial \theta}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}}{\partial \varphi}, \quad \tau = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} = \tau_2 + \frac{\omega_1 \sin \theta}{r}, \\ \tau_1 &= \frac{1}{R_1} \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}}{\partial \theta}, \quad \tau_2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Компоненты деформации (1.4), (1.5) связаны с усилиями и моментами формулами

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\epsilon_1 + \nu \epsilon_2), \quad T_2 = B(\epsilon_2 + \nu \epsilon_1), \quad S = B \frac{1 - \nu}{2} \omega, \quad B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \\ M_1 &= D(\varkappa_1 + \nu \varkappa_2), \quad M_2 = D(\varkappa_2 + \nu \varkappa_1), \quad H = D(1 - \nu)\tau, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

При известных компонентах деформации перемещения в оболочке определяются из следующей системы уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} &= \epsilon_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\omega}{2} \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = \frac{\omega}{2} \mathbf{e}_1 + \epsilon_2 \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2, \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \theta} &= (-\tau + \frac{\omega}{2R_1}) \mathbf{e}_1 + \varkappa_1 \mathbf{e}_2 + \zeta_1 \mathbf{n}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \varphi} = -\varkappa_2 \mathbf{e}_1 + (\tau - \frac{\omega}{2R_2}) \mathbf{e}_2 + \zeta_2 \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{12}\mathbf{n} + \vartheta_1\mathbf{e}_2 - \vartheta_2\mathbf{e}_1, \quad \omega_{12} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}. \quad (1.8)$$

$$\zeta_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{r} \omega, \quad \zeta_2 = \frac{1}{R_1 r} \left(\frac{\partial r \epsilon_2}{\partial \theta} - R_1 \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \frac{1}{2} - \epsilon_1 R_1 \cos \theta \right). \quad (1.9)$$

В рассматриваемой задаче краевые условия формулируются на боковой поверхности $\theta = \theta_0 = \text{const}$. Статическими краевыми величинами являются изгибающий момент M_1 и компоненты вектора

$$\mathbf{Q}_1 = T_1 \mathbf{e}_1 + Q_{12} \mathbf{e}_2 + Q_{1n} \mathbf{n} = -Q_z^\vee \mathbf{k} + Q_r^\vee \mathbf{e}_r + Q_{12} \mathbf{e}_2. \quad (1.10)$$

Здесь

$$Q_{12} = S + 2 \frac{H}{R_2}, \quad Q_{1n} = \frac{1}{R_1 r} \left(\frac{\partial r M_1}{\partial \theta} - R_1 M_2 \cos \theta + 2 R_1 \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right), \quad (1.11)$$

Q_{1n} — обобщенная перерезывающая сила. Кинематическими краевыми величинами являются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(\theta_0, \varphi)$ (1.2) и угол поворота $\vartheta_1(\theta_0, \varphi)$ (1.3). Будем использовать также деформационные краевые величины [1, 2], описывающие деформацию рассматриваемой боковой поверхности.

В силу кинематической гипотезы Кирхгофа поперечные волокна оболочки не меняют своей длины и остаются перпендикулярными волокнам, параллельным контуру срединной поверхности и изменяющим свою длину. Тогда деформацию векторов \mathbf{e}_2 и \mathbf{n} , определяющих направление указанных волокон, можно описать вектором поворота $\boldsymbol{\Omega}_t(\varphi)$. При этом вектор \mathbf{n} преобразуется в $\mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{n}$, а вектор \mathbf{e}_2 — в $(1 + \epsilon_2)(\mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{e}_2)$. Вектор перемещения $\mathbf{u}(\theta_0, \varphi)$ и угол поворота $\vartheta_1(\theta_0, \varphi)$ можно дифференцировать по φ и определить вектор $\boldsymbol{\Omega}_t$:

$$(1 + \epsilon_2)(\mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{e}_2) = \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} \left[r \mathbf{e}_r + z \mathbf{k} + \mathbf{u} \right], \quad \mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{n} = \mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n},$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} = \epsilon_2 \mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\Omega}_t \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} = \vartheta_1 \mathbf{e}_1 + \vartheta_2 \mathbf{e}_2.$$

Отсюда с учетом (1.7), (1.8) находим

$$\boldsymbol{\Omega}_t(\varphi) = \vartheta_1(\theta_0, \varphi) \mathbf{e}_2 - \vartheta_2(\theta_0, \varphi) \mathbf{e}_1 - \omega_2(\theta_0, \varphi) \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} - \frac{\omega}{2} \mathbf{n}. \quad (1.12)$$

Дифференцируя вектор (1.12) по φ , получаем вектор изменения кривизны $\boldsymbol{\kappa}_t$ [1, 2] нормального элемента, связанного с контуром срединной поверхности, компоненты которого можно представить в компонентах деформации оболочки.

Итак, используя (1.8), находим

$$\boldsymbol{\kappa}_t = \frac{1}{r} \frac{d\boldsymbol{\Omega}_t}{d\varphi} = -\varkappa_{tt} \mathbf{e}_1 + \varkappa_{tv} \mathbf{e}_2 - \varkappa_{tn} \mathbf{n}, \quad (1.13)$$

$$\varkappa_{tt} = \varkappa_2, \quad \varkappa_{tv} = \tau - \frac{\sin \theta}{r} \omega, \quad \varkappa_{tn} = -\frac{1}{R_1 r} \left(\frac{\partial r \epsilon_2}{\partial \theta} - R_1 \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \epsilon_1 R_1 \cos \theta \right). \quad (1.14)$$

Деформационными краевыми величинами являются относительное удлинение контура срединной поверхности ϵ_2 и компоненты вектора кривизны (1.14).

2. Уравнения равновесия. Рассматриваем изгиб оболочки в плоскости ZX . В этом случае внешняя нагрузка, распределенная по срединной поверхности, имеет вид

$$\mathbf{q} = q_{1,1}(\theta) \cos \varphi \mathbf{e}_1 + q_{2,1}(\theta) \sin \varphi \mathbf{e}_2 + q_{n,1}(\theta) \cos \varphi \mathbf{n}.$$

Величины, описывающие напряженно-деформированное состояние оболочки и приведенные в п. 1, представляем в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от θ , а вторая совпадает с $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$. Если $\Phi(\theta, \varphi)$ — некоторая из таких величин, то для нее возможен один из вариантов: 1) $\Phi(\theta, \varphi) = \Phi_{,1}(\theta) \cos \varphi$; 2) $\Phi(\theta, \varphi) = \Phi_{,1}(\theta) \sin \varphi$. Первый вариант имеем для усилий $T_1, T_2, Q_r^\vee, Q_z^\vee$, моментов M_1, M_2 , компонент деформации $\epsilon_1, \epsilon_2, \varkappa_1, \varkappa_2$, перемещений $u_1, w, u_r, u_z, \vartheta_1$. Второго варианта — для усилий S, Q_{12} , момента H , компонент деформации ω, τ , перемещений u_2, ϑ_2 . Для коэффициентов, зависящих от θ , сохраняем обозначения соответствующих им величин, лишь добавляя нижний индекс (,1). Так, обобщенная перерезывающая сила (1.11) имеет вид $Q_{1n} = Q_{1n,1}(\theta) \cos \varphi$.

Положим

$$Q_{1n,1} = \frac{1}{R_1 r} \left(\frac{dr M_{1,1}}{d\theta} - R_1 M_{2,1} \cos \theta + 2R_1 H_{,1} \right), \quad Q_{z,1}^\vee = T_{1,1} \sin \theta - Q_{1n,1} \cos \theta, \\ Q_{r,1}^\vee = T_{1,1} \cos \theta + Q_{1n,1} \sin \theta, \quad Q_{12,1} = S_{,1} + 2H_{,1} \frac{\sin \theta}{r}. \quad (2.1)$$

Сравнивая (2.1) с (1.10), заключаем, что (2.1) с точностью до множителя $\sin \varphi$ или $\cos \varphi$ совпадают со статическими краевыми величинами.

С учетом (2.1) уравнения равновесия, приведенные в [1,2], принимают вид

$$\frac{dr Q_{z,1}^\vee}{d\theta} \sin \theta + \frac{dr Q_{r,1}^\vee}{d\theta} \cos \theta - T_{2,1} R_1 \cos \theta + R_1 (Q_{12,1} - 2H_{,1} \frac{\sin \theta}{r}) + q_{1,1} R_1 r = 0, \\ R_1 T_{2,1} - \frac{dr Q_{12,1}}{d\theta} - Q_{12,1} R_1 \cos \theta + M_{2,1} \frac{R_1 \sin \theta}{r} - q_{2,1} R_1 r = 0, \\ \frac{dr M_{1,1}}{d\theta} - M_{2,1} R_1 \cos \theta + 2R_1 H_{,1} = R_1 r (Q_{r,1}^\vee \sin \theta - Q_{z,1}^\vee \cos \theta), \\ \frac{dr Q_{r,1}^\vee}{d\theta} \sin \theta - \frac{dr Q_{z,1}^\vee}{d\theta} \cos \theta - T_{2,1} R_1 \sin \theta - \frac{R_1}{r} M_{2,1} + 2H_{,1} \frac{R_1 \cos \theta}{r} + q_{n,1} R_1 r = 0. \quad (2.2)$$

Усилия и моменты, действующие в произвольном сечении $\theta = \text{const}$, статически эквивалентны силе $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i}_x$ и моменту $\mathbf{M} = M_y \mathbf{i}_y$ (рисунок). Действительно,

$$\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} r [(Q_{r,1}^\vee \mathbf{e}_r - Q_{z,1}^\vee \mathbf{k}) \cos \varphi + Q_{12,1} \sin \varphi \mathbf{e}_2] d\varphi = \mathbf{i}_x \pi r (Q_{r,1}^\vee - Q_{12,1}), \\ \mathbf{M} = \int_0^{2\pi} \left[r^2 \mathbf{e}_r \times [(Q_{r,1}^\vee \mathbf{e}_r - Q_{z,1}^\vee \mathbf{k}) \cos \varphi + Q_{12,1} \sin \varphi \mathbf{e}_2] + r M_{1,1} \cos \varphi \mathbf{e}_2 \right] d\varphi = \\ = \mathbf{i}_y \pi (r^2 Q_{z,1}^\vee + r M_{1,1}).$$

Тогда

$$F_x = \pi r (Q_{r,1}^\vee - Q_{12,1}), \quad M_y = \pi (r^2 Q_{z,1}^\vee + r M_{1,1}).$$

Отсюда

$$Q_{r,1}^{\vee} = \frac{1}{\pi r} F_x + Q_{12,1}, \quad Q_{z,1}^{\vee} = \frac{1}{\pi r^2} M_y - \frac{1}{r} M_{1,1}. \quad (2.3)$$

Используя выражения (2.3), преобразуем уравнения равновесия (2.2) к виду

$$\frac{1}{\pi} \frac{dF_x}{d\theta} = R_1 r (q_{2,1} - q_{n,1} \sin \theta - q_{1,1} \cos \theta),$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{dM_y}{d\theta} = \frac{1}{\pi} F_x R_1 \sin \theta + R_1 r^2 (q_{n,1} \cos \theta - q_{1,1} \sin \theta), \quad (2.4)$$

$$\frac{dr Q_{12,1}}{d\theta} + Q_{12,1} R_1 \cos \theta - R_1 T_{2,1} - M_{2,1} \frac{R_1 \sin \theta}{r} + q_{2,1} R_1 r = 0,$$

$$\frac{dM_{1,1}}{d\theta} - \frac{R_1 \cos \theta}{r} M_{2,1} + 2H_{1,1} \frac{R_1}{r} - Q_{12,1} R_1 \sin \theta = \frac{R_1}{\pi r} \left(F_x \sin \theta - M_y \frac{\cos \theta}{r} \right). \quad (2.5)$$

Уравнения (2.4), (2.5) эквивалентны уравнениям равновесия (2.2). Их преимущество в том, что интегрирование уравнений (2.4) сводится к вычислению квадратур.

3. Определение перемещений. Уравнения сплошности. Для определения перемещений используем равенства (1.7), (1.8), которые записываем в координатной форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{du_{r,1}}{d\theta} &= \epsilon_{1,1} \cos \theta - \vartheta_{1,1} \sin \theta, & \frac{1}{R_1} \frac{du_{z,1}}{d\theta} &= -\epsilon_{1,1} \sin \theta - \vartheta_{1,1} \cos \theta, \\ \frac{1}{R_1} \frac{du_{2,1}}{d\theta} &= \frac{\omega_{1,1}}{2} + \omega_{12,1}, & \frac{u_{r,1} + u_{2,1}}{r} &= \epsilon_{2,1}, \\ \frac{u_{r,1} + u_{2,1}}{r} &= -\left(\frac{\omega_{1,1}}{2} - \omega_{12,1} \right) \cos \theta + \vartheta_{2,1} \sin \theta, & \frac{u_{z,1}}{r} &= \left(\frac{\omega_{1,1}}{2} - \omega_{12,1} \right) \sin \theta + \vartheta_{2,1} \cos \theta; \\ \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\omega_{12,1}}{d\theta} + \vartheta_{2,1} \right) &= \zeta_{1,1}, & \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\vartheta_{2,1}}{d\theta} - \omega_{12,1} \right) &= \tau_{1,1} - \frac{\omega_{1,1}}{2R_1}, \\ \frac{1}{r} (\omega_{12,1} - \vartheta_{1,1} \sin \theta) &= \zeta_{2,1}, & \frac{1}{r} (\vartheta_{2,1} + \vartheta_{1,1} \cos \theta) &= \varkappa_{2,1}, \\ \frac{1}{r} (\omega_{12,1} \sin \theta - \vartheta_{1,1} - \vartheta_{2,1} \cos \theta) &= \tau_{1,1} - \frac{\omega_{1,1} \sin \theta}{2r}, & \frac{1}{R_1} \frac{d\vartheta_{1,1}}{d\theta} &= \varkappa_{1,1}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\zeta_{1,1} = \frac{1}{r} \epsilon_{1,1} + \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\theta} \frac{\omega_{1,1}}{2} + \frac{\cos \theta}{r} \omega_{1,1}, \quad (3.2)$$

$$\zeta_{2,1} = \frac{1}{R_1 r} \left(\frac{dr \epsilon_{2,1}}{d\theta} - R_1 \frac{\omega_{1,1}}{2} - \epsilon_{1,1} R_1 \cos \theta \right).$$

Последние шесть из равенств (3.1) рассматриваем как систему уравнений для определения компонент вектора ω и записываем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\omega_{12,1}}{d\theta} + \vartheta_{2,1} \right) &= \zeta_{1,1}, & \frac{1}{R_1} \left(\frac{d\vartheta_{2,1}}{d\theta} - \omega_{12,1} \right) &= \tau_{1,1} - \frac{\omega_{1,1}}{2R_1}, & \frac{1}{R_1} \frac{d\vartheta_{1,1}}{d\theta} &= \varkappa_{1,1} \\ \omega_{12,1} &= r \zeta_{2,1} + \vartheta_{1,1} \sin \theta, & \vartheta_{2,1} &= r \varkappa_{2,1} - \vartheta_{1,1} \cos \theta, \\ r \varkappa_{2,1} \cos \theta + r \left(\tau_{1,1} - \frac{\omega_{1,1} \sin \theta}{2r} \right) - r \zeta_{2,1} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Эта система совместна, если

$$\frac{1}{R_1} \frac{dr\zeta_{2,1}}{d\theta} + \varkappa_{1,1} \sin \theta + \frac{r}{R_1} \varkappa_{2,1} = \zeta_{1,1}, \quad \frac{1}{R_1} \frac{dr\varkappa_{2,1}}{d\theta} - \varkappa_{1,1} \cos \theta - \frac{r\zeta_{2,1}}{R_1} = \tau_{,1} - \frac{\omega_{,1}}{2R_1}. \quad (3.4)$$

Первые шесть уравнений из (3.1) используем для определения перемещений $u_{r,1}$, $u_{2,1}$, $u_{z,1}$. Учитывая (3.3), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} \frac{du_{r,1}}{d\theta} &= \epsilon_{1,1} \cos \theta - \vartheta_{1,1} \sin \theta, \quad u_{2,1} = r\epsilon_{2,1} - u_{r,1}, \quad u_{z,1} = -r^2 \left(\tau_{,1} - \frac{\omega_{,1} \sin \theta}{r} \right) - r\vartheta_{1,1}, \\ \frac{1}{R_1} \frac{du_{z,1}}{d\theta} &= -\epsilon_{1,1} \sin \theta - \vartheta_{1,1} \cos \theta, \quad \frac{1}{R_1} \frac{du_{2,1}}{d\theta} = \frac{\omega_{,1}}{2} + r\zeta_{2,1} + \vartheta_{1,1} \sin \theta, \\ \epsilon_{2,1} &= \left(r\zeta_{2,1} - \frac{\omega_{,1}}{2} \right) \cos \theta + r\varkappa_{2,1} \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.5) совместна, если

$$\frac{d}{d\theta} \left[r \left(\tau_{,1} - \frac{\omega_{,1} \sin \theta}{r} \right) \right] + R_1 \cos \theta \left(\tau_{,1} - \frac{\omega_{,1} \sin \theta}{r} \right) + R_1 \varkappa_{1,1} - \frac{R_1 \sin \theta}{r} \epsilon_{1,1} = 0. \quad (3.6)$$

Соотношения (3.4), (3.6) можно получить из уравнений сплошности, приведенных в [1, 2], если компоненты деформации соответствуют обратносимметричной нагрузке.

Пусть

$$\begin{aligned} \varkappa_{t\nu,1} &= \tau_{,1} - \omega_{,1} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \varkappa_{tn,1} = -\frac{1}{R_1 r} \left(\frac{dr\epsilon_{2,1}}{d\theta} - \epsilon_{1,1} R_1 \cos \theta - R_1 \omega_{,1} \right), \\ \varkappa_{tz,1} &= \varkappa_{2,1} \sin \theta - \varkappa_{tn,1} \cos \theta, \quad \varkappa_{tr,1} = -\varkappa_{2,1} \cos \theta - \varkappa_{tn,1} \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Величины (3.7) являются деформационными краевыми величинами, так как с точностью до множителей $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$ совпадают с компонентами вектора (1.13) в базе цилиндрических координат. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить (1.13) и (1.10), (2.1) и (3.7).

В силу (3.2), (3.3), (3.5)

$$\varkappa_{tr,1} = \varkappa_{t\nu,1}, \quad \varkappa_{tz,1} = \frac{\epsilon_{2,1}}{r}. \quad (3.8)$$

В обозначениях (3.7) и с учетом (3.2), (3.8) уравнения сплошности (3.4), (3.6) эквивалентны следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \frac{dr\varkappa_{t\nu,1}}{d\theta} + R_1 \cos \theta \varkappa_{t\nu,1} + R_1 \varkappa_{1,1} - \frac{R_1 \sin \theta}{r} \epsilon_{1,1} &= 0, \\ \frac{d\epsilon_{2,1}}{d\theta} - \frac{R_1 \cos \theta}{r} \epsilon_{1,1} - R_1 \sin \theta \varkappa_{t\nu,1} - \frac{R_1}{r} \omega_{,1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Основными неизвестными задачи считаем F_x , M_y , $Q_{12,1}$, $M_{1,1}$, $\epsilon_{2,1}$, $\varkappa_{t\nu,1}$, $\vartheta_{1,1}$, $u_{r,1}$. Для их определения имеем следующие соотношения: четыре уравнения равновесия (2.4), (2.5), два уравнения сплошности (3.9), первое из уравнений (3.5) и третье

из уравнений (3.3). В указанные равенства, кроме перечисленных неизвестных, входят неизвестные $T_{2,1}$, $M_{2,1}$, $H_{,1}$, $\varkappa_{1,1}$, $\epsilon_{1,1}$, $\omega_{,1}$. Их можно исключить при помощи определяющих уравнений. Так, для обобщенного закона Гука (1.6)

$$\begin{aligned} T_{2,1} &= \nu T_{1,1} + B(1 - \nu^2)\epsilon_{2,1}, \quad \epsilon_{1,1} = \frac{1}{B}T_{1,1} - \nu\epsilon_{2,1}, \quad S_{,1} = B\frac{1 - \nu}{2}\omega_{,1}, \\ M_{2,1} &= \nu M_{1,1} + D(1 - \nu^2)\varkappa_{2,1}, \quad \varkappa_{1,1} = \frac{1}{D}M_{1,1} - \nu\varkappa_{2,1}, \quad H_{,1} = D(1 - \nu)\tau_{,1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя (2.1), (2.3), (3.7), (3.8), находим

$$\begin{aligned} T_{1,1} &= \sin\theta \left(\frac{1}{\pi r^2} M_y - \frac{1}{r} M_{1,1} \right) + \cos\theta \left(\frac{1}{\pi r} F_x + Q_{12,1} \right), \\ \varkappa_{2,1} &= \epsilon_{2,1} \frac{\sin\theta}{r} - \varkappa_{tv,1} \cos\theta. \end{aligned}$$

Согласно (2.1), (3.7), (3.10)

$$Q_{12,1} = B\frac{1 - \nu}{2}\omega_{,1} + 2(1 - \nu)D\frac{\sin\theta}{r}\tau_{,1}, \quad \varkappa_{tv,1} = \tau_{,1} - \omega_{,1}\frac{\sin\theta}{r}.$$

Отсюда

$$\omega_{,1} \simeq Q_{12,1} \frac{2}{B(1 - \nu)} - \varkappa_{tv,1} \frac{4D \sin\theta}{Br}, \quad \tau_{,1} \simeq Q_{12,1} \frac{2 \sin\theta}{B(1 - \nu)r} + \varkappa_{tv,1}. \quad (3.11)$$

4. Краевые величины и краевые условия. Основными неизвестными уравнений равновесия (2.4), (2.5) считаем F_x , M_y , $Q_{12,1}$, $M_{1,1}$ и в этих величинах формулируем статические краевые условия. В качестве кинематических краевых величин принимаем обобщенные перемещения, соответствующие обобщенным силам, которыми являются указанные статические краевые величины. Для их определения вычисляем работу напряжений, действующих на боковой поверхности оболочки $\theta = \text{const}$, на перемещении (1.1), учитывая при этом формулы (1.2), (1.3), (1.10):

$$A = \int_0^{2\pi} (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{u} + M_1 \vartheta_1) r d\varphi = \int_0^{2\pi} (Q_r^\vee u_r + Q_{12}^\vee u_2 - Q_z^\vee u_z + M_1 \vartheta_1) r d\varphi.$$

В обратносимметричном случае

$$\begin{aligned} A &= \pi r (Q_{r,1}^\vee u_{r,1} + Q_{12,1}^\vee u_{2,1} - Q_{z,1}^\vee u_{z,1} + M_{1,1} \vartheta_{1,1}), \\ u_{z,1} &= -r(r\varkappa_{tv,1} + \vartheta_{1,1}), \quad u_{2,1} = r\epsilon_{2,1} - u_{r,1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Используя формулы (2.3), приводим (4.1) к виду

$$A = F_x u_{r,1} - M_y \frac{u_{z,1}}{r} + \pi r^2 (Q_{12,1}^\vee \epsilon_{2,1} - M_{1,1} \varkappa_{tv,1}). \quad (4.2)$$

Согласно (4.2) кинематическими краевыми величинами являются

$$u_{r,1}, \quad \frac{u_{z,1}}{r}, \quad \epsilon_{2,1}, \quad \varkappa_{tv,1}. \quad (4.3)$$

Если край оболочки заделан, то $u_{r,1} = u_{z,1} = u_{2,1} = \vartheta_{1,1} = 0$. В обозначениях (4.3) то же условие будет иметь следующий вид: $u_{r,1} = u_{z,1} = \epsilon_{2,1} = \varkappa_{tv,1} = 0$. При шарнирном опирании края $u_{r,1} = u_{z,1} = u_{2,1} = M_{1,1} = 0$, или $u_{r,1} = u_{z,1} = \epsilon_{2,1} = M_{1,1} = 0$. Очевидно, что на краю из двух сомножителей в каждом слагаемом выражения (4.2) можно задавать только один.

Заключение. Решение задачи об обратносимметричной деформации оболочки вращения сведено к интегрированию восьми вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Существенно, что неизвестные уравнений совпадают с краевыми величинами.

Выведенные дифференциальные уравнения не меняются, если определяющие уравнения отличны от обобщенного закона Гука, изменятся лишь равенства (3.10), (3.11).

Вид статических краевых величин определен уравнениями равновесия. Кинематические краевые величины представлены как обобщенные перемещения, соответствующие обобщенным силам, которыми являются статические краевые величины. Указан переход от принятых краевых величин к традиционным для теории оболочек.

Предложенная постановка обратносимметричной задачи удобна, когда, например, оболочка нагружена по параллельным кругам внешними поперечными силами и изгибающими моментами, либо известны жесткие поперечные смещения и повороты таких сечений. Именно последний случай реализуется при проведении ревизии напряженно-деформированного состояния газопровода по измеренным смещениям в некоторых сечениях трубы. Необходимость подобного расчета побудила авторов сделать представленную в статье постановку обратносимметричной задачи.

Литература

1. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2010. 380 с.
2. Черных К. Ф. Линейная теория ободочек. Ч. 1, 2. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. Ч. 1. 1962. 274 с. Ч. 2. 1964. 395 с.
3. Blaauwendraad J., Hoefakker J. H. Structural Sell Analysis. Understanding and Application. Springer, 2013. 250 p.
4. Куреев И. В., Немировский Ю. В. Консервативный метод решения линейных краевых задач статики упругих оболочек вращения // Вычислительная механика сплошных сред, 2012. Т. 5, № 1. С. 85–99.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

Кабриц Сергей Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент;
skabricts@yandex.ru

Шамина Валентина Алексеевна — доктор физико-математических наук, профессор;
shamina-valentina@yandex.ru

BENDING SHELL OF REVOLUTION BY TRANSVERSE FORCE AND MOMENT

Sergei A. Kabrits, Valentina A. Shamina

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
skabricts@yandex.ru, shamina-valentina@yandex.ru

It is considered the bending of shell of revolution when the membrane resultants and stress couples of any cross section of shell are statically equivalent to title transverse force and title bending moment. Such kind of deformation and loading are called back-symmetric. Of the numerous works devoted to the study the stress-

strain state of this kind should separate known monographs V. V. Novozhilov and K. F. Chernih, which make use of a complex transformation of the basic equations of the theory of shells and asymptotic method of their research and decisions. The material of the shell was assumed to be homogeneous isotropic and subjected to the Hook law. At that time, when there were no modern computing facilities, this approach has helped to solve many technical problems.

In what follows the problem under consideration is reduced to the integration of the system of real ordinary differential equations of the first order, two of which are solved in quadratures. Unknown quantities of system coincide with boundary values. View of static boundary values is determined by the equations of equilibrium. The kinematic boundary values taken as generalized displacements corresponding to the generalized forces which are static boundary values. The basic system of differential equations will not change if we substitute the above given relations of the Hooke law other constitutive equations. Refs 4. Figs 1.

Keywords: bending, transverse force, boundary values, compatibility conditions, stress-strain state.

ХРОНИКА

27 февраля 2014 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступили аспирант С. М. Зуев и доктор физ.-мат. наук, профессор М. П. Юшков (Санкт-Петербургский государственный университет) с докладом на тему «Стабилизация положений равновесия платформ Стюарта».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассматриваются различные виды конструкций платформы Стюарта. Как известно, их положения равновесия оказываются неустойчивыми. Строятся матрицы обратных связей, обеспечивающих стабилизацию этих положений равновесия. Приводятся результаты расчетов.