

УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ БЕННЕТА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В РЕЖИМЕ ИОННОЙ ФОКУСИРОВКИ ПРОДОЛЬНО ВНЕШНЕМУ МАГНИТНОМУ ПОЛЮ

Е. К. Колесников, А. С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассмотрена задача о формулировке обобщения условия равновесия Беннета для релятивистского электронного пучка, распространяющегося в режиме ионной фокусировки в случае наличия внешнего продольного однородного магнитного поля. При этом полагается, что электронная компонента фоновой плазмы не полностью удалена из области, занятой пучком. Для вывода указанного беннетовского условия равновесия были использованы уравнения переноса массы и импульса, полученные для параксиального моноэнергетического пучка из соответствующего кинетического уравнения Власова. Библиогр. 9 назв.

Ключевые слова: условие равновесия Беннета, релятивистский электронный пучок, режим ионной фокусировки, ионный плазменный канал, внешнее магнитное поле.

Введение. Известно, что для описания радиальной динамики параксиальных азимутально-симметричных релятивистских электронных пучков (РЭП), распространяющихся в плотных и разреженных газоплазменных средах, необходим численный и качественный анализ соответствующего уравнения огибающей пучка [1–9]. При выводе указанного уравнения требуется определить уравнение для средней кинетической энергии поперечного движения E_{\perp} электронов пучка в тонком фиксированном сегменте РЭП в определенном электромагнитном поле.

В настоящей работе сформулировано уравнение для E_{\perp} и определен средний вириал V частиц пучка в сегменте в ситуации, когда РЭП распространяется в режиме ионной фокусировки (ИФ) параллельно внешнему однородному магнитному полю при частичном выбросе электронной компоненты фоновой плазмы из области, занятой пучком. Режим ИФ возникает в ситуации, когда РЭП распространяется по предварительно созданному плазменному каналу в сильно разреженном газе. При этом под действием радиальной компоненты электрического поля пучка происходит выталкивание из области РЭП электронной компоненты канала. В этом случае основная часть импульса пучка распространяется вдоль ионного «остова» плазменного канала, что приводит к дополнительной радиальной фокусировке РЭП [4, 6].

Кроме того, найдено обобщение известного условия равновесия Беннета на случай транспортировки РЭП в режиме ИФ (при частичном удалении электронов фоновой плазмы из области пучка) в ситуации наличия продольного однородного внешнего магнитного поля.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим азимутально-симметричный параксиальный моноэнергетичный РЭП, распространяющийся вдоль оси z цилиндрической системы координат (r, θ, z) , которая совпадает с осью симметрии предварительно созданного плазменного цилиндрического канала в режиме ИФ продольно внешнему однородному магнитному полю. Предполагается, что электронная составляющая фоновой плазмы еще не полностью покинула область пучка под действием радиальной компоненты электрического поля РЭП. Кроме того, будем считать, что внешнее однородное стационарное магнитное поле также направлено вдоль оси z .

Для решения поставленной задачи будем использовать уравнение переноса импульса для частиц сегмента пучка, которое в рассматриваемом случае имеет следующий вид [5, 9]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}) + \nabla_{\perp} \cdot \left(\chi_b \frac{\widetilde{\mathbf{p}}_{\perp} \mathbf{p}_{\perp}}{\gamma m} \right) + \chi_b e \nabla_{\perp} \Phi + \chi_b \Omega_c (\mathbf{i}_z \times \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}) = 0; \quad (1)$$

здесь $\chi_b(\mathbf{r}_{\perp}, t) = \int f^{\tau} d\mathbf{p}_{\perp}$, $\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp} = \int \mathbf{p}_{\perp} f^{\tau} d\mathbf{p}_{\perp}$, где \mathbf{p}_{\perp} — вектор импульса частицы пучка в поперечной к оси z плоскости, $f^{\tau}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{p}_{\perp}, t)$ — функция распределения частиц пучка по поперечным координатам и импульсам в сегменте РЭП с временем инжекции τ ,

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{\perp} \mathbf{p}_{\perp} = \frac{1}{\chi_b} \int \mathbf{p}_{\perp} \mathbf{p}_{\perp} f_b^{\tau} d\mathbf{p}_{\perp}, \quad (2)$$

∇_{\perp} — оператор «набла» по поперечным к оси z координатам, e , m , γ — заряд, масса и лоренц-фактор электронов пучка соответственно, $\Phi = \varphi^{(i)} + \varphi^{(e)} - \beta \mu_0 A_z^{(b)}$, $\varphi^{(i)}$ и $\varphi^{(e)}$ — скалярные потенциалы электрического поля, созданного соответственно ионным каналом и электронной компонентой фоновой плазмы, $\beta = v_z/c$ (v_z — продольная компонента скорости электронов пучка, которая для моноэнергетичного паракиального РЭП полагается одинаковой для всех частиц пучка, c — скорость света), $\mu_0 = -1/(\beta\gamma)^2$, $A_z^{(b)}$ — аксиальная компонента векторного потенциала электромагнитного поля, созданного пучком, $\Omega_c = |e| B_0/(\gamma m c)$ — циклотронная частота электрона пучка во внешнем продольном магнитном поле с индукцией B_0 , \mathbf{i}_z — орт оси z .

Умножим уравнение переноса импульса (1) скалярно на \mathbf{r}_{\perp} и проинтегрируем полученное выражение по пространству поперечных координат. Тогда получим

$$\int \mathbf{r}_{\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}) d\mathbf{r}_{\perp} + \int \mathbf{r}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \cdot \left(\chi_b \frac{\widetilde{\mathbf{p}}_{\perp} \mathbf{p}_{\perp}}{\gamma m} \right) d\mathbf{r}_{\perp} + e \int \chi_b \mathbf{r}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Phi d\mathbf{r}_{\perp} + \int \chi_b \Omega_c \mathbf{r}_{\perp} \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{p}_{\perp}) d\mathbf{r}_{\perp} = 0. \quad (3)$$

В силу того, что интегрирование ведется по всему поперечному пространству и \mathbf{r}_{\perp} , t — независимые переменные, первое слагаемое в левой части (3) принимает вид

$$\int \mathbf{r}_{\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}) d\mathbf{r}_{\perp} = \frac{d}{dt} \left[\int \mathbf{r}_{\perp} \cdot (\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}) d\mathbf{r}_{\perp} \right]. \quad (4)$$

Нетрудно показать, что второе слагаемое в (3) может быть представлено в виде

$$\int \mathbf{r}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \cdot \left(\chi_b \frac{\widetilde{\mathbf{p}}_{\perp} \mathbf{p}_{\perp}}{\gamma m} \right) d\mathbf{r}_{\perp} = - \int \chi_b \frac{\widetilde{p}_{\perp}^2}{\gamma m} d\mathbf{r}_{\perp}. \quad (5)$$

Далее рассмотрим выражение из (4) в квадратных скобках:

$$K^* \equiv \int \mathbf{r}_{\perp} \cdot (\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}) d\mathbf{r}_{\perp} = \frac{\gamma m}{2} \int \nabla_{\perp} r^2 \cdot \left(\frac{\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}}{\gamma m} \right) d\mathbf{r}_{\perp}. \quad (6)$$

Здесь было учтено, что лоренц-фактор частиц пучка не зависит от \mathbf{r}_{\perp} и выполнено следующее тождество: $1/2 \nabla_{\perp} r^2 \equiv \mathbf{r}_{\perp}$.

Далее интегрируем (6) по частям. С помощью уравнения неразрывности [5, 7, 9]

$$\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + \nabla_{\perp} \cdot \frac{\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}}{m \gamma} = 0 \quad (7)$$

получим

$$\begin{aligned} K^* &\equiv -\frac{\gamma m}{2} \int r^2 \nabla_{\perp} \cdot \left(\frac{\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}}{\gamma m} \right) d\mathbf{r}_{\perp} = \frac{\gamma m}{2} \int r^2 \frac{\partial \chi_b}{\partial t} d\mathbf{r}_{\perp} = \\ &= \frac{\gamma m}{2} \frac{d}{dt} \left(\int r^2 \chi_b d\mathbf{r}_{\perp} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В итоге с учетом (4), (5) и (8) из (3) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\gamma m}{2} \frac{d}{dt} \left(\int r^2 \chi_b d\mathbf{r}_{\perp} \right) \right] - \int \chi_b \frac{\tilde{p}_{\perp}^2}{\gamma m} d\mathbf{r}_{\perp} + e \int \chi_b \mathbf{r}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Phi d\mathbf{r}_{\perp} + \\ + \int \chi_b \Omega_c \mathbf{r}_{\perp} \cdot (\mathbf{i}_z \times \tilde{\mathbf{p}}_{\perp}) d\mathbf{r}_{\perp} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее определим удвоенный среднеквадратичный радиус пучка и среднюю кинетическую энергию поперечного движения частиц пучка соответственно:

$$\mathfrak{R}^2 \equiv 2 \int \chi_b r^2 d\mathbf{r}_{\perp}, \quad (10)$$

$$E_{\perp} = \int \chi_b \frac{p_{\perp}^2}{2m\gamma} d\mathbf{r}_{\perp}. \quad (11)$$

Тогда (9) можно переписать как

$$E_{\perp} - \frac{d}{dt} \left(\frac{m\gamma}{8} \frac{d\mathfrak{R}^2}{dt} \right) = V, \quad (12)$$

где

$$V = \frac{1}{2} \int \chi_b \mathbf{r}_{\perp} \cdot [e \nabla_{\perp} \Phi + \Omega_b (\mathbf{p}_{\perp} \times \mathbf{i}_z)] d\mathbf{r}_{\perp} \quad (13)$$

есть средний вириал.

Далее рассмотрим выражение для части вириала, определяемой в режиме ИФ в отсутствии внешнего магнитного поля, а именно

$$V_1 = \frac{e}{2} \int \chi_b \mathbf{r}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \Phi d\mathbf{r}_{\perp}. \quad (14)$$

При этом имеем уравнение Ампера для $A_z^{(b)}$ и уравнения Пуассона для потенциалов $\varphi^{(i)}$ и $\varphi^{(e)}$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z^{(b)}}{dr} \right) = -4\pi e \beta N_b \chi_b(r), \quad (15)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi^{(i)}}{dr} \right) = +4\pi e N^{(i)} \chi^{(i)}(r), \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi^{(e)}}{dr} \right) = -4\pi e N^{(e)} \chi^{(e)}(r), \quad (17)$$

где $N_b, N^{(i)}, N^{(e)}$ — характерные линейные концентрации частиц пучка, плазменных ионов и электронов соответственно, $\chi^{(i)}, \chi^{(e)}$ — функции, характеризующие радиальные профили ионов и электронов плазменного канала.

Указанные уравнения решаем с краевыми условиями

$$r \frac{dA_z^{(b)}}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad (18)$$

$$r \frac{d\varphi^{(i)}}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad r \frac{d\varphi^{(e)}}{dr} \Big|_{r=0} = 0. \quad (19)$$

Тогда из (15)–(19) находим

$$\frac{dA_z^{(b)}}{dr} = -2e\beta \frac{N_b(r)}{r}, \quad (20)$$

$$\frac{d\varphi^{(i)}}{dr} = +2e \frac{N^{(i)}(r)}{r}, \quad (21)$$

$$\frac{d\varphi^{(e)}}{dr} = -2e \frac{N^{(e)}(r)}{r}, \quad (22)$$

где

$$N_b(r) = N_b 2\pi \int_0^r r' \chi_b(r') dr', \quad (23)$$

$$N^{(i)}(r) = N^{(i)} 2\pi \int_0^r r' \chi^{(i)}(r') dr', \quad (24)$$

$$N^{(e)}(r) = N^{(e)} 2\pi \int_0^r r' \chi^{(e)}(r') dr' \quad (25)$$

суть линейные концентрации соответственно частиц пучка, ионов и электронов плазменного канала в трубке радиуса r .

Рассмотрим часть вириала (14), обусловленную электромагнитным полем РЭП в режиме ИФ, а именно

$$V_1^{(b)} = -\frac{e}{2} \int \chi_b \mathbf{r}_\perp \cdot \nabla_\perp \left(\beta \mu_0 A_z^{(b)} \right) d\mathbf{r}_\perp. \quad (26)$$

Очевидно, что

$$V_1^{(b)} = -e\beta \mu_0 \pi \int_0^\infty \chi_b r^2 \frac{dA_z^{(b)}}{dr} dr. \quad (27)$$

С учетом (20) и (23) имеем

$$V_1^{(b)} = e^2 \beta^2 \mu_0 \int \chi_b(\mathbf{r}_\perp) N_b(\mathbf{r}_\perp) d\mathbf{r}_\perp = e^2 \beta^2 \mu_0 \langle N_b(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b, \quad (28)$$

где угловые скобки означают оператор следующего вида:

$$\langle G(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b = \int \chi_b(\mathbf{r}_\perp) G(\mathbf{r}_\perp) d\mathbf{r}_\perp; \quad (29)$$

здесь $G(\mathbf{r}_\perp)$ — некоторая интегрируемая функция.

Нетрудно проверить, что

$$\langle N_b(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b = \frac{1}{2}. \quad (30)$$

Тогда

$$V_1^{(b)} = \frac{e^2 \beta^2 \mu_0}{2}. \quad (31)$$

Аналогично части вириала (14), связанные с электрическим полем ионной и электронной компонент плазменного канала, соответственно имеют вид

$$V_1^{(i)} = \frac{e}{2} \int \chi_b \mathbf{r}_\perp \cdot \nabla_\perp \varphi^{(i)} d\mathbf{r}_\perp, \quad (32)$$

$$V_1^{(e)} = \frac{e}{2} \int \chi_b \mathbf{r}_\perp \cdot \nabla_\perp \varphi^{(e)} d\mathbf{r}_\perp. \quad (33)$$

Тогда с учетом (21) и (22) имеем

$$V_1^{(i)} = e^2 \langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b, \quad (34)$$

$$V_1^{(e)} = -e^2 \langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b. \quad (35)$$

Подставляя (31), (34) и (35) в (14), получим значение вириала в случае режима ИФ при отсутствии продольного внешнего магнитного поля:

$$V_1 = e^2 \left(\frac{\beta^2 \mu_0 N_b}{2} + \langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b - \langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b \right). \quad (36)$$

Далее рассмотрим последнее слагаемое в левой части (13). Можно записать

$$\int \chi_b \Omega_c \mathbf{r}_\perp \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{p}_\perp) d\mathbf{r}_\perp = -\Omega_c \int \chi_b (\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}_\perp) \cdot \mathbf{i}_z d\mathbf{r}_\perp = -\Omega_c L, \quad (37)$$

где

$$L = \Omega_c \int \chi_b (\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}_\perp) \cdot \mathbf{i}_z d\mathbf{r}_\perp = \int \chi_b r \tilde{p}_\theta d\mathbf{r}_\perp = \langle r p_\theta \rangle \quad (38)$$

есть величина среднего углового момента частицы рассматриваемого сегмента пучка. Подставляя (37), (36) в (13), находим полный вириал:

$$V = e^2 \left(\frac{\beta^2 \mu_0 N_b}{2} + \langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b - \langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b \right) - \frac{\Omega_c L}{2}. \quad (39)$$

Рассмотрим эффективную температуру Беннета

$$T_B = \frac{I_b e \beta}{2c}. \quad (40)$$

Нетрудно показать, что имеет место соотношение

$$e^2 N_b = \frac{2T_B}{\beta^2}. \quad (41)$$

Тогда (39) можно записать в виде

$$V = \mu_0 T_B + \frac{2T_B}{\beta^2} \frac{\langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b}{N_b} - \frac{2T_B}{\beta^2} \frac{\langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b}{N_b} - \frac{\Omega_c L}{2}. \quad (42)$$

Из уравнения (12) при квазиравновесии, когда выполнено условие $d\mathfrak{R}^2/dt \approx 0$, следует уравнение

$$E_\perp = \mu_0 T_B + \frac{2T_B}{\beta^2} \frac{\langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b}{N_b} - \frac{2T_B}{\beta^2} \frac{\langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp) \rangle_b}{N_b} - \frac{\Omega_c L}{2}, \quad (43)$$

которое является обобщением условия равновесия Беннета [5] на случай распространения РЭП в режиме ионной фокусировки при наличии внешнего продольного магнитного поля. Заметим, что в отличие результата работы [9], уравнение включает вклад электромагнитного поля пучка (первое слагаемое в правой части (43)), которым можно пренебрегать только для ультрарелятивистских пучков. Кроме того, в (43) включен член, описывающий влияние электронной компоненты фоновой плазмы. Можно показать, что для среднего углового момента частицы рассматриваемого сегмента пучка имеет место соотношение

$$L = L_0 + \frac{m\gamma\Omega_c}{4} (\mathfrak{R}_0^2 - \mathfrak{R}^2), \quad (44)$$

где L_0 и \mathfrak{R}_0 — начальные значения соответствующих величин.

Заключение. Таким образом, рассмотрена задача о формулировке обобщения условия равновесия Беннета для релятивистского электронного пучка, распространяющегося в режиме ионной фокусировки в случае наличия внешнего продольного однородного магнитного поля. При этом полагается, что электронная компонента фоновой плазмы не полностью удалена из области, занятой пучком. Для вывода указанного условия равновесия были использованы уравнения переноса массы и импульса, полученные для параксиального моноэнергетического РЭП из соответствующего кинетического уравнения.

Литература

1. Рухадзе А. А., Богданкевич Л. С., Росинский С. Е., Рухлин В. Г. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1980. 167 с.
2. Диденко А. Н., Григорьев В. П., Усов Ю. П. Мощные электронные пучки и их применение. М., 1977. 277 с.
3. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М., 1984. 432 с.
4. Колесников Е. К., Мануйлов А. С., Филиппов Б. В. Динамика пучков заряженных частиц в газоплазменных средах. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2002. 100 с.
5. Lee E. P. Kinetic theory of a relativistic beam // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19, N 1. P. 60–69.
6. Buchanan H. L. Electron beam propagation in the ion-focused regime // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30, N 1. P. 221–231.
7. Manuilov A. S. Kinetic approach to the envelope equation for a relativistic electron beam propagating through a scattering gas-plasma medium in the presence of the reverse plasma current with an arbitrary radial profile // Technical Physics. 2005. Vol. 50, N 4. P. 491–497.
8. Kolesnikov E. K., Manuilov A. S. Kinetic equation for a relativistic electron beam propagating along an external magnetic field in dense and tenuous gas — plasma media // Technical Physics. 2004. Vol. 49, N 9. P. 1208–1212.

9. *Kolesnikov E. K., Manuilov A. S.* Moment equations and the dynamics equilibrium condition for a relativistic electron beam propagating along an external magnetic field in dense and rarefied gas-plasma media // *Technical Physics*. 2005. Vol. 50, N 7. P. 937–943.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

Колесников Евгений Константинович — доктор физико-математических наук, профессор; kolesnikov_evg@mail.ru

Мануйлов Александр Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент; man06@mail.ru

BENNETT CONDITION FOR THE EQUILIBRIUM OF THE RELATIVISTIC ELECTRON BEAM PROPAGATING IN A ION FOCUSED REGIME ALONG THE EXTERNAL MAGNETIC FIELD

Evgeniy K. Kolesnikov, Alexander S. Manuilov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; kolesnikov_evg@mail.ru, man06@mail.ru

The problem of the generalized formulation of the Bennett equilibrium condition for a relativistic electron beam propagating in the ion focused regime along the external magnetic field are investigated. It is assumed that the electron fraction of the background plasma not fully removed from a beam's volume. The mass and impulse moment's equations derived for a paraxial monoenergetic electron beam from the Vlasov kinetic equation are used for an investigation of this Bennett equilibrium condition. Refs 9.

Keywords: Bennett equilibrium condition, relativistic electron beam, ion focused regime, ion plasma channel, external magnetic field.

ХРОНИКА

27 марта 2014 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступили кандидат физ.-мат. наук, доцент Г. А. Кутеева и доктор физ.-мат. наук, профессор Б. А. Ершов (Санкт-Петербургский государственный университет) с докладом на тему «Демонстрационные модели механизмов кабинета практической механики СПбГУ».

Краткое содержание доклада:

По материалам, хранящимся в научной библиотеке им. М. Горького и в музее истории СПбГУ, кабинет практической механики Санкт-Петербургского университета был организован в 1865 г. М. Ф. Окатовым. Часть коллекции механизмов этого кабинета сохранилась на кафедре теоретической и прикладной механики математикомеханического факультета СПбГУ. 1) Модели, созданные собственноручно и по чертежам академика П. Л. Чебышёва, 1889–1895 гг. 2) Деревянные модели простейших механизмов, созданные в 1833 г. 3) Модели Рэло, купленные в мастерской Фойгта в Берлине, 1882–1911 гг. 4) Модели, купленные в мастерской в Женеве 1890-е гг. 5) Другие модели того же времени создания. В период расцвета коллекция содержала несколько сот предметов, в настоящее время на кафедре в СПбГУ сохранилось меньше ста механизмов. Некоторые из этих моделей реализуются в виде студенческих компьютерных анимаций.