УДК 531.36+517.977 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 2

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМЫ А. Ю. ИШЛИНСКОГО*

А. С. Кулешов, В. В. Рыбин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1

В 1965 году А. Ю. Ишлинский привёл пример неголономной механической системы малой размерности, которая не является системой Чаплыгина. Данная система состоит из трёх шероховатых цилиндров, два из которых, одинакового радиуса a, катаются без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Третий цилиндр, радиуса R, катается без проскальзывания по первым двум цилиндрам. В работе рассматриваются вопросы управляемости системы Ишлинского. При помощи теоремы Чжоу—Рашевского доказана управляемость данной системы. Библиогр. 3 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: неголономная система, качение без проскальзывания, управляемость.

1. Введение. Рассматривается задача управления неголономной механической системой, предолженной А. Ю. Ишлинским [1]. При помощи теоремы Чжоу—Рашевского [2] доказана управляемость данной системы. Следует отметить, что ранее вопрос об управляемости системы Ишлинского рассматривался в работе [3]. К сожалению, не все результаты, полученные в [3], оказываются верными. В нашей работе мы уточняем и усиливаем результаты, полученные в работе [3].

Ниже сформулированы некоторые факты из теории управления, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

2. Основные определения. Рассмотрим нелинейную управляемую систему с линейными управлениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M, \quad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где M — связное гладкое многообразие, g_i — аналитические векторные поля на M, а $u_i(\cdot)$ — измеримые локально ограниченные управления.

Для системы (1) можно сформулировать следующую задачу управления. Для заданных точек $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$ и времени $T > 0$ требуется найти управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, переводящее систему (1) из точки $\mathbf{p}$ в точку $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{q}.$$

Система называется вполне управляемой, если для любых $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$ сформулированная задача разрешима для некоторого $T > 0$. Для линейной по управлениям системы (1) критерий полной управляемости даётся в терминах алгебры Ли векторных полей, порождённых полями в правой части системы:

$$\mathrm{Lie}(g_1, \ldots, g_m) = \mathrm{span}(g_1, \ldots, g_m, [g_i, g_j], [g_i, [g_j, g_k]], \ldots).$$

Здесь $\mathrm{span}(\ldots)$ — линейная оболочка векторных полей, а $[g_i, g_j]$ — скобка Ли векторных полей (коммутатор), которая в координатах имеет выражение

$$[g_i, g_j] = \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{x}} g_i - \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{x}} g_j.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00230).

Система (1) имеет полный ранг в точке $\mathbf{x} \in M$, если

$$\mathrm{Lie}\,(g_1, \ldots, g_m)\,(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{x}} M.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема (Чжоу—Рашевский [2]). *Система* (1) *вполне управляема на* M *тогда и только тогда, когда она имеет полный ранг в любой точке* $\mathbf{x} \in M$.

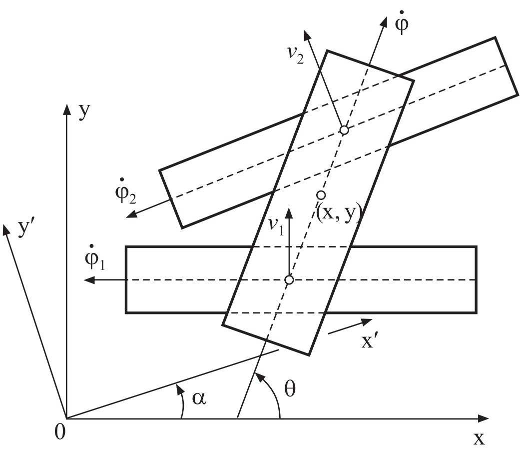
Таким образом, вопрос управляемости для линейных по управлению систем (1) имеет полное решение. Ответ сводится к дифференцированию векторных полей и вычислению размерности их линейной оболочки.

3. Система А. Ю. Ишлинского. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из трёх шероховатых однородных цилиндров: два одинаковых цилиндра радиуса a катаются по горизонтальной плоскости, а третий цилиндр, радиуса R, катается по этим цилиндрам (рисунок).

Введём неподвижные системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$, оси Ox и Ox' которых направлены параллельно образующим нижних цилиндров, расположенных относительно друг друга под углом α. В силу того, что нижние цилиндры катаются по плоскости без проскальзывания, угол α является постоянным. Введём обобщённые координаты: x, y — координаты центра масс верхнего цилиндра (координата $z = 2a + R$ остаётся постоянной), θ — угол между образующей верхнего цилиндра и осью Ox, φ — угол поворота верхнего цилиндра относительно своей оси, φ_1 и φ_2 — соответствующие углы поворота нижних цилиндров. Обозначим через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ радиусы-векторы, проведённые из центра масс верхнего цилиндра в точки соприкосновения цилиндров. В проекции на оси системы координат $Oxyz$ эти радиусы-векторы имеют вид

$$\mathbf{r}_1 = (a\varphi_1 - y)\,\mathrm{ctg}\,\theta \mathbf{e}_x + (a\varphi_1 - y)\,\mathbf{e}_y - R\mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\cos\theta}{\sin(\theta-\alpha)}\,(a\varphi_2 + x\sin\alpha - y\cos\alpha)\,\mathbf{e}_x + \frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\alpha)}\,(a\varphi_2 + x\sin\alpha - y\cos\alpha)\,\mathbf{e}_y - R\mathbf{e}_z.$$



Система А. Ю. Ишлинского.

Скорости точек соприкосновения верхнего цилиндра с нижними в проекции на те же оси равны

$$\mathbf{v}_1 = 2a\dot\varphi_1 \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{v}_2 = -2a\dot\varphi_2 \sin\alpha \mathbf{e}_x + 2a\dot\varphi_2 \cos\alpha \mathbf{e}_y.$$

Скорость центра масс верхнего цилиндра и его угловая скорость равны соответственно

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{e}_x + \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_y + \dot{\theta}\mathbf{e}_z.$$

Условия качения без проскальзывания верхнего цилиндра по нижним имеют вид

$$\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1] = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2] = \mathbf{v}_2.$$

В проекциях на оси системы координат $Oxyz$ эти условия имеют вид

$$\dot{x} - R\dot{\varphi}\sin\theta - (a\varphi_1 - y)\,\dot{\theta} = 0,$$

$$\dot{y} + R\dot{\varphi}\cos\theta + (a\varphi_1 - y)\,\dot{\theta}\,\mathrm{ctg}\,\theta - 2a\dot{\varphi}_1 = 0,$$

$$\dot{x}\sin(\theta-\alpha) - R\dot{\varphi}\sin\theta\sin(\theta-\alpha) + 2a\dot{\varphi}_2\sin\alpha\sin(\theta-\alpha) - \\ - (a\varphi_2 + x\sin\alpha - y\cos\alpha)\,\dot{\theta}\sin\theta = 0, \quad (2)$$

$$\dot{y}\sin(\theta-\alpha) + R\dot{\varphi}\cos\theta\sin(\theta-\alpha) - 2a\dot{\varphi}_2\cos\alpha\sin(\theta-\alpha) + \\ + (a\varphi_2 + x\sin\alpha - y\cos\alpha)\,\dot{\theta}\cos\theta = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая система имеет шесть обобщённых координат $(x,\, y,\, \theta,\, \varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi)$ и две степени свободы.

4. Постановка задачи управления. Следуя работе [3], переобозначим обобщённые координаты, характеризующие положение системы, следующим образом:

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad \theta = q_3, \quad \varphi_1 = q_4, \quad \varphi_2 = q_5, \quad \varphi = q_6,$$

и, кроме того, введём обозначения

$$a\varphi_1 - y = aq_4 - q_2 = z,$$

$$a\varphi_2 + x\sin\alpha - a\varphi_1\cos\alpha = aq_5 + q_1\sin\alpha - aq_4\cos\alpha = w.$$

Разрешим уравнения связей (2) относительно обобщённых скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$, $\dot{q}_5$, а в качестве управляющих воздействий выберем две оставшиеся обобщённые скорости: $\dot{q}_4 = u_1$ и $\dot{q}_6 = u_2$. Тогда система уравнений (2) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{2az\sin q_3\sin\alpha}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3}u_1 + Ru_2\sin q_3,\\
\dot{q}_2 &= \frac{2aw\sin q_3}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3}u_1 - Ru_2\cos q_3,\\
\dot{q}_3 &= \frac{2a\sin\alpha\sin q_3}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3}u_1,\\
\dot{q}_4 &= u_1,\\
\dot{q}_5 &= \frac{\sin q_3}{\sin(q_3-\alpha)}u_1,\\
\dot{q}_6 &= u_2,
\end{aligned} \quad (3)$$

и будет иметь вид нелинейной системы с линейными управлениями (1). Векторные поля g_1 и g_2 имеют в данном случае вид

$$g_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2az\sin q_3 \sin\alpha}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3} \\[2ex] \dfrac{2aw\sin q_3}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3} \\[2ex] \dfrac{2a\sin\alpha\sin q_3}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3} \\[2ex] 1 \\[2ex] \dfrac{\sin q_3}{\sin(q_3-\alpha)} \\[2ex] 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} R\sin q_3 \\ -R\cos q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для системы Ишлинского можно сформулировать описанную в начале работы задачу управления. Докажем теперь, что система Ишлинского является полностью управляемой.

5. Управляемость системы Ишлинского. Для доказательства управляемости системы Ишлинского нам необходимо из векторных полей g_1, g_2 и их скобок Ли,

$$g_3 = [g_1, g_2] \text{ — скобка Ли первого порядка;}$$

$$\left.\begin{aligned} g_4 &= [g_2, [g_1, g_2]] = [g_2, g_3] \\ g_5 &= [[g_1, g_2], g_1] = [g_3, g_1] \end{aligned}\right\} \text{ — скобки Ли второго порядка;}$$

$$\left.\begin{aligned} g_6 &= [g_2, [g_2, [g_1, g_2]]] = [g_2, g_4] \\ g_7 &= [g_2, [[g_1, g_2], g_1]] = [g_2, g_5] \\ g_8 &= [g_1, [g_2, [g_1, g_2]]] = [g_1, g_4] \\ g_9 &= [g_1, [[g_1, g_2], g_1]] = [g_1, g_5] \end{aligned}\right\} \text{ — скобки Ли третьего порядка,}$$

выбрать такие, чтобы матрица, составленная из выбранных векторных полей, имела полный ранг (ранг 6) в каждой точке конфигурационного многообразия. Тогда по теореме Чжоу—Рашевского система Ишлинского будет вполне управляемой всюду на конфигурационном многообразии M.

Впервые вопрос управляемости системы Ишлинского рассматривался в работе [3]. Доказательство управляемости, предложенное в этой работе, также опиралось на теорему Чжоу—Рашевского. При этом отмечалось, что векторные поля, образующие матрицу полного ранга, можно выбрать, рассматривая поля g_1, g_2 и их скобки Ли до третьего порядка включительно.

Однако это утверждение не является справедливым. Непосредственной проверкой можно установить, что скобки Ли g_4, g_6, g_7 и g_8 выражаются через другие скобки Ли по следующим формулам:

$$g_4 = -\frac{2R\sin\alpha}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3}g_3, \qquad g_6 = -\frac{6R^2\sin^2\alpha}{(w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3)^2}g_3,$$

$$g_7 = -\frac{2R\sin\alpha}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3}g_5 + \frac{2aR\left(\sin^2(q_3-\alpha) - \sin^2 q_3\right)\sin\alpha}{(w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3)^2\sin(q_3-\alpha)}g_3, \quad g_8 = -g_7.$$

Следовательно, среди векторных полей g_1, g_2 и их скобок Ли до третьего порядка включительно независимыми являются лишь

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad g_5, \quad g_9.$$

Матрица, составленная из этих векторных полей, будет иметь ранг 5 и не будет матрицей полного ранга. Поэтому для доказательства управляемости системы Ишлинского необходимо рассмотрение скобок Ли четвёртого порядка:

$$g_{10} = [g_2, g_6], \quad g_{11} = [g_2, g_7], \quad g_{12} = [g_2, g_8], \quad g_{13} = [g_2, g_9],$$

$$g_{14} = [g_1, g_6], \quad g_{15} = [g_1, g_7], \quad g_{16} = [g_1, g_8], \quad g_{17} = [g_1, g_9].$$

Для этих скобок непосредственной проверкой можно установить следующие соотношения:

$$g_{10} = -\frac{24R^3\sin^3\alpha}{(w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3)^3}g_3,$$

$$g_{11} = \frac{6R^2\sin^2\alpha}{(w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3)^2}g_5 - \frac{12aR^2\left(\sin^2(q_3-\alpha) - \sin^2 q_3\right)\sin\alpha}{(w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3)^3\sin(q_3-\alpha)}g_3,$$

$$g_{13} = \frac{6Ra^2\left(\sin^3 q_3\cos(q_3-\alpha) - \cos q_3\sin^3(q_3-\alpha) + \sin\alpha\sin^2 q_3\right)\sin^2\alpha}{(w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3)^3\sin^2(q_3-\alpha)}g_3 - $$
$$- \frac{3R\sin\alpha}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3}g_9,$$

$$g_{15} = \frac{4Ra^2\left(\sin^3 q_3\cos(q_3-\alpha) - \cos q_3\sin^3(q_3-\alpha) + \sin\alpha\sin^2 q_3\right)\sin^2\alpha}{(w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3)^3\sin^2(q_3-\alpha)}g_3 - $$
$$- \frac{4aR\left(\sin^2(q_3-\alpha) - \sin^2 q_3\right)\sin\alpha}{(w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3)^2\sin(q_3-\alpha)}g_5 - \frac{2R\sin\alpha}{w\sin q_3 + z\sin\alpha\cos q_3}g_9.$$

$$g_{12} = -g_{11}, \qquad g_{14} = -g_{11}, \qquad g_{16} = -g_{15}.$$

Таким образом, среди скобок Ли четвёртого порядка независимой с векторными полями g_1, g_2, g_3, g_5, g_9 является только скобка

$$g_{17} = [g_1, g_9] = [g_1, [g_1, [[g_1, g_2], g_1]]].$$

Окончательно можно сделать вывод, что система Ишлинского является управляемой на всём конфигурационном многообразии. Векторные поля

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3 = [g_1, g_2], \quad g_5 = [[g_1, g_2], g_1],$$

$$g_9 = [g_1, [[g_1, g_2], g_1]], \quad g_{17} = [g_1, [g_1, [[g_1, g_2], g_1]]]$$

являются независимыми и составляют матрицу полного ранга — ранга 6. Тем самым, система Ишлинского является вполне управляемой по теореме Чжоу—Рашевского.

6. Обсуждение результатов. После того, как управляемость системы Ишлинского установлена, возникает вопрос о построении управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, переводящего систему (3) за время $T > 0$ из начального состояния $\mathbf{p}$ в терминальное состояние $\mathbf{q}$ с любой наперёд заданой точностью. Однако задача построения управления для такого типа систем является весьма нетривиальной в силу анизотропии пространства состояний. Иными словами, для таких систем возможность перемещения неодинакова по различным направлениям. Величина смещения в направлении полей g_1, g_2 за малое время t есть $O(t)$, в направлении коммутатора $g_3 = [g_1, g_2]$ есть $O(t^2)$, в направлении $g_4 = [g_2, g_3]$ и $g_5 = [g_3, g_1]$ есть $O(t^3)$ и т. д. В дальнейшем мы надеемся полностью изучить задачу построения явного вида управления для системы Ишлинского.

Литература

1. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
2. *Аграчёв А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
3. *Jarzebowska E., McClamroch N. H.* On nonlinear control of the Ishlinsky system as an example of a nonholonomic non-Chaplygin system // Proceedings of the American Control Conference. Chicago, Illinois, USA. June 2000. Vol. 5. P. 3249–3253.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

Кулешов Александр Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент; kuleshov@mech.math.msu.su

Рыбин Вадим Владимирович — аспирант; RybinVV@gmail.com

CONTROLLABILITY OF THE ISHLINSKY SYSTEM

Alexander S. Kuleshov, Vadim V. Rybin

Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russian Federation; kuleshov@mech.math.msu.su, RybinVV@gmail.com

In 1965 A. Yu. Ishlinsky proposed the example of a low dimensional nonholonomic non-Chaplygin mechanical system. The Ishlinsky system consists of three cylinders. One of them with the radius R rolls without sliding on top of two other identical cylinders of a radius a, which each roll whithout sliding on a fixed horizontal plane. In this paper we analyze controllability conditions for the system of cylinders. We prove that the Ishlinsky system is completely controllable by the Chow – Rashevsky theorem. This example of a non-Chaplygin nonholonomic system clearly illustrates the analytic and control coplexity of such systems. Refs 3. Figs 1.

Keywords: nonholonomic system, rolling without sliding, controllability.