

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ РАЗНОПРОЧНЫХ БАЛОК**Г. В. Павилайнен, А. И. Бембева, М. С. Канин*Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассмотрены результаты исследования упруго-пластического изгиба разнопрочной консольной балки, находящейся под действием сосредоточенной нагрузки. Ранее была решена аналогичная задача для вертикальной опоры из изотропного материала. При применении стандартных гипотез для изгиба балок, предположения о простом нагружении и модели идеального упруго-пластического тела А. А. Ильюшина поставленную задачу удается решить полностью аналитически. Полученное решение позволяет провести анализ влияния разнопрочности на прогиб, несущую способность и процесс развития пластических деформаций. В частности, увеличение разницы между пределами текучести при одноосном растяжении и одноосном сжатии приводит к изменению положения нейтральной оси относительно геометрической, причем искажение может достигать более 9%. Несущая способность консольной балки также существенно зависит от величин пределов текучести. В статье исследованы предельные состояния, а именно, момент перехода от упругого состояния к упруго-пластическому при образовании точки пластичности, момент образования пластического шарнира и исчерпание несущей способности, определены соответствующие нагрузки предельных состояний, рассмотрен пример расчета для стального конструкционного сплава 40Х. Кроме этого проведена оценка влияния собственного веса консоли на развитие напряженно-деформированного состояния. Показано, что упругий прогиб для стали 40Х, которая имеет вес более 300 кг на погонный метр балки, сопоставим с прогибом от собственного веса. С другой стороны, показано, что общий упругий прогиб является величиной одного порядка с общей толщиной балки. Это означает корректность применения линейной теории деформаций. При переходе к упруго-пластической стадии деформирования прогиб консоли от воздействия нагрузки становится в 3–4 раза больше прогиба от собственного веса. Библиогр. 9 назв. Ил. 4. Табл. 3.

Ключевые слова: упруго-пластический изгиб, консольная балка, разнопрочность, эффект SD.

Рассмотрим изгиб опорных и консольных балок, обладающих свойством разнопрочности при растяжении и сжатии за пределом упругого деформирования. Проектирование современных балочных и стержневых конструкций требует определения предельных нагрузок при допустимом развитии пластических деформаций для предотвращения хрупкого разрушения [1, 2]. Отечественные и зарубежные экспериментальные исследования [3, 4] показывают, что абсолютная разница в пределах текучести при растяжении и сжатии может достигать 25–30%. Это свойство часто называют эффектом SD [5]. Для описания этого эффекта введем параметр разнопрочности d как отношение предела текучести при сжатии одномерного образца σ_t^s и предела текучести при растяжении σ_t^r .

Усложнение конструкций приводит к необходимости развития асимптотических, численных методов и ЭВМ-моделирования процессов их нелинейного деформирования [6, 7]. Однако в некоторых случаях при использовании ряда предположений, в том числе гипотезы плоских сечений, допущения об одноосности напряжённого состояния и схемы идеальной пластичности, удается решить задачи поперечного изгиба балок аналитически и при этом удовлетворить уравнения равновесия и совместности деформаций [2, 8].

В предлагаемой работе удалось построить аналитическое решение и провести

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00523).

анализ упруго-пластического изгиба разнопрочной консольной или опорной балки под действием сосредоточенной нагрузки на свободном конце (см. рис. 1).

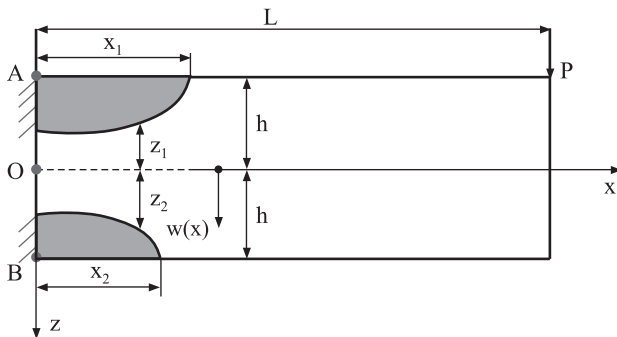


Рис. 1. Схема упруго-пластического изгиба разнопрочной консоли.

Исследование проводится до момента образования в консоли пластического шарнира в месте жесткой заделки с определением предельной нагрузки или предельного изгибающего момента. По модели пластического деформирования А. А. Ильюшина [3] в балке образуются области упругой деформации и пластических деформаций; на рис. 1 они заштрихованы. Граница между областями соответствует условиям для напряжения $\sigma_x = \sigma_t^r$ при растяжении и $\sigma_x = \sigma_t^s$ при сжатии.

Решение упругой изотропной задачи изгиба консоли известно [1] и имеет вид

$$w(x) = -\frac{Px^3}{6EJ} + \frac{PLx^2}{2EJ}.$$

Здесь E — модуль Юнга, J — момент инерции прямоугольного сечения шириной b и высотой $2h$, L — длина балки. В изотропном случае введенный нами выше параметр $d = 1$.

Изгибающий момент и предельная нагрузка, до достижения которой консоль деформируется упруго, определяются при $d > 1$ соотношениями

$$M_s = \frac{2bh^2\sigma_t^r}{3}, \quad P_s = \frac{2b\sigma_t^r h^2}{3L}.$$

В случае $d < 1$ в этих формулах надо заменить σ_t^r на σ_t^s . Максимальный прогиб конца консоли при нагрузке $P = P_s$ равен

$$w(L) = \frac{P_s L^3}{3EJ}.$$

Переходим к изучению упруго-пластической стадии деформирования. В дальнейшем будем различать два принципиально разных случая, а именно $d = 1$ и $d > 1$. В первом случае процесс появления и развития пластических областей происходит симметрично, а упругое деформирование происходит, пока $P < P_s$. В случае $d > 1$ при $P = P_s$ образуется точка пластичности A (см. рис. 1), а затем формируется пластическая область в растягивающейся части балки. Потом появляется точка пластичности B в сжимающейся части балки, после чего с ростом нагрузки обе пластические области увеличиваются по ширине и глубине и смыкаются, образуя пластический шарнир при $P = P_*$.

Предельные значения момента M_* и нагрузки P_* в случае $d = 1$ определяются при $z_1 = z_2 = 0$ (см. рис. 1) формулами

$$M_* = bh^2\sigma_t^r, \quad P_* = \frac{M_*}{L}.$$

Эти значения определяют исчерпание несущей способности изотропной балки. Предельный момент и нагрузку в случае разнопрочной балки, т. е. при $d > 1$, определим позже.

Существенной особенностью данной задачи является смещение положения нейтральной оси балки по сравнению с геометрической при упруго-пластическом изгибе. Оценим величину этого искажения, обозначив его как z_0 . Для этого рассмотрим эпюру напряжения σ_x по толщине консоли в сечении $x = 0$. Введем величину отклонения нейтральной оси от геометрической, обозначив через z_0 , и будем отсчитывать от геометрической оси. Условие равновесия означает равенство заштрихованных площадей выше и ниже нейтральной оси (см. рис. 2). Аналитически это записывается соотношением

$$(h + z_0 - z_1)\sigma_t^r + 0.5z_1\sigma_t^r = (h - z_0 - z_2)\sigma_t^s + 0.5z_2\sigma_t^s.$$

Из подобия треугольников на рис. 2 определим соотношение между z_1 и z_2 , а именно, $z_1\sigma_t^s = z_2\sigma_t^r$. Теперь выразим z_0 :

$$z_0 = -\frac{h(1-d)}{1+d} + \frac{z_1(1-d)}{2}.$$

Впервые это соотношение было приведено в работе [9], но в другой форме. Очевидно, что при $d > 1$ имеем смещение нейтральной оси вниз и $z_0 > 0$, а в случае $d = 1$ смещения нет и $z_2/z_1 = 1$.

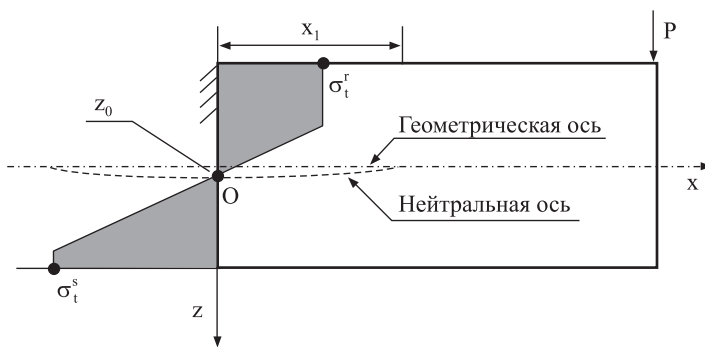


Рис. 2. Эпюра продольного напряжения в сечении консоли.

Результаты расчета приведены в табл. 1, в которой по вертикали помещена безразмерная глубина упругого слоя $z_1/h = \bar{z}_1$ (см. рис. 1), по горизонтали помещены различные значения параметра разнопрочности d , а в пересечении — безразмерные значения $z_0/h = \bar{z}_0$.

Анализ результатов показывает, что с ростом разнопрочности смещение нейтральной оси относительно средней геометрической возрастает и достигает 23% от половины толщины балки при сильно развитой пластичности. Для реальных конструкций это смещение должно учитываться при расположении отверстий для крепежных болтов. Центр каждого отверстия должен находиться на нейтральной оси с

Таблица 1. Влияние разнородности на смещение нейтральной оси

$\bar{z}_1 \setminus d$	1.0	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3
0.9	0	0.003	0.005	0.007	0.01	0.012	0.015
0.7	0	0.006	0.015	0.044	0.032	0.067	0.078
0.5	0	0.013	0.025	0.051	0.066	0.079	0.093
0.3	0	0.018	0.035	0.063	0.091	0.098	0.106
0.1	0	0.022	0.045	0.077	0.121	0.183	0.231

целью избежать срезки болтов при продольной деформации, возникающей от изгиба консоли. Отметим, что расчет смещения нейтральной оси был проведен в самом опасном сечении $x = 0$. При движении вдоль оси x это смещение уменьшается и при $x > x_1$ равно нулю во всей упругой зоне деформирования.

Теперь запишем зависимость изгибающего момента от продольного напряжения в каждом сечении упруго-пластической балки, используя рис. 2, известное правило знаков и определенное выше значение смещения нейтральной оси z_0 . В каждом сечении x выполнено

$$M = -b \left(\int_{-(h+z_0)}^{-z_1} \sigma_t^r z dz + \int_{-z_1}^{z_2} E \varepsilon_x z dz - \int_{z_2}^{h-z_0} \sigma_t^s z dz \right).$$

Здесь b — горизонтальная ширина сечения балки. Используя линейную зависимость между продольной деформацией и кривизной, а также зависимость кривизны и прогиба в виде

$$\varepsilon_x = -z\kappa, \quad \kappa = \frac{d^2 w}{dx^2},$$

получаем зависимость момента от параметров z_0, z_1 и z_2 :

$$M(x) = \frac{b\sigma_t^r((h+z_0)^2 - z_1^2)}{2} + \frac{b\sigma_t^s((h-z_0)^2 - z_2^2)}{2} + \frac{b\kappa E(z_2^3 + z_1^3)}{3}.$$

Из этого соотношения можно найти предельное значение момента M_* , положив $z_1 = z_2 = 0$:

$$M_* = \frac{2b\sigma_t^r h^2 d}{1+d},$$

где $z_0 = -h(1-d)/(1+d)$. Используя зависимости между кривизной и напряжениями на границах упругой и пластических областей при растяжении и сжатии, а именно

$$\sigma_t^r = E z_1 \kappa, \quad \sigma_t^s = E z_2 \kappa,$$

выразим параметры z_1 и z_2 и получим окончательно выражение для момента:

$$M(x) = \frac{2b\sigma_t^r h^2 d}{1+d} - \frac{b(\sigma_t^r)^3 (1+d)^3}{24E^2 \kappa^2}.$$

Используя дифференциальное соотношение между кривизной и прогибом и приравняв полученное соотношение для момента к моменту, создаваемому сосредоточенной силой, получаем дифференциальное уравнение для нахождения прогиба разнородной балки:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \pm \sqrt{\frac{k_1}{k_2 - P(L-x)}}.$$

Отметим, что в данном уравнении из физических соображений надо отбросить знак минус. Здесь введены новые обозначения:

$$k_1 = \frac{b(\sigma_t^r)^3(1+d)^3}{24E^2}, \quad k_2 = \frac{2bdh^2\sigma_t^r}{1+d}.$$

Проинтегрируем дважды и используем граничное условие жесткой заделки для определения постоянных интегрирования. Получим

$$w(x) = \frac{4\sqrt{k_1}}{3P^2}(\sqrt{k_2 - P(L-x)})^3 + m_1x + m_2,$$

где

$$m_1 = -\frac{2}{P}\sqrt{k_1(k_2 - PL)}, \quad m_2 = -\frac{4}{3P^2}\sqrt{k_1(k_2 - PL)^3}.$$

Полученное соотношение справедливо при $x < x_1$. Для завершения решения необходимо использовать классическое выражение [1]

$$w(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4.$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2 определяются соотношениями

$$M(L) = 0, \quad \frac{dM}{dx} = -P,$$

а именно

$$c_1 = -\frac{P}{6EJ}, \quad c_2 = \frac{PL}{2EJ}.$$

Две другие нужно определить из условия непрерывной дифференцируемости функции прогиба при $x = x_1$, а именно

$$c_1x_1^3 + c_2x_1^2 + c_3x_1 + c_4 = \frac{4\sqrt{k_1}}{3P^2}(\sqrt{k_2 - P(L-x_1)})^3 + m_1x_1 + m_2,$$

$$3c_1x_1^2 + 2c_2x_1 + c_3 = \frac{2\sqrt{k_1}}{P}\sqrt{k_2 - P(L-x_1)} + m_1.$$

Диапазон изменения нагрузки от факта появления пластических деформаций до факта образования пластического шарнира определяется неравенством $P_s < P < P_*$. Запишем это неравенство через параметры задачи в виде

$$\frac{2bh^2\sigma_t^r}{3L} < P < \frac{2bdh^2\sigma_t^r}{(1+d)L}.$$

Например, для балки из конструкционной стали марки 40X (ГОСТ 4543-71 пруток) с техническим пределом текучести $\sigma_{0,2}^r = 760$ МПа, модулем Юнга $E = 212$ ГПа, параметром разнородности $d = 1.3$ [4] и размерами $b = 0.2$ м, $h = 0.1$ м, $L = 10$ м имеем диапазон изменения нагрузки $1.013 \cdot 10^5 \text{ Н} < P < 1.734 \cdot 10^5 \text{ Н}$.

Итак, удается построить аналитическое решение поставленной задачи, в котором использован пока неизвестный размер — длина пластической области при растяжении x_1 . Для его определения запишем выражение для кривизны в сечении $x = x_1$:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2 - P(L-x_1)}}.$$

Теперь воспользуемся условием $z_1 = h$, которое означает выход пластической области на верхнюю поверхность балки:

$$E \frac{d^2 w}{dx^2} h = \sigma_t^r.$$

Выразим отсюда кривизну и подставим в уравнение выше. После преобразований получим уравнение для нахождения x_1 . В работе [8], было получено соотношение для нахождения x_1 из условия непрерывности прогиба, что приводит к решению кубического уравнения. В нашем случае получаем

$$x_1 = L + \frac{bh^2 \sigma_t^r (1+d)^3}{24P} - \frac{2bh^2 \sigma_t^r d}{P(1+d)}.$$

Расчет роста длины пластической области в зоне растяжения с увеличением нагрузки приведен в табл. 2. Выпишем дополнительно соотношение для расчета x_2 , которое можно получить из соотношения для кривизны в упруго-пластической области при $x = x_2$ и $z_2 = h - z_0$:

$$x_2 = L - \frac{k_2}{P} + \frac{16E^2 h^2 k_1 (\sigma_t^r)^2}{(1+d)^2 (2-d+d^2) d^2 P}.$$

Для расчета использована сталь марки А40Х с характерным значением $d = 1.1$. Интересно отметить, что для этой марки стали пластический шарнир образуется в заделке раньше, чем пластическая область выходит на край консоли, т.е. $x_1 < L$ при $P = P_*$. Результаты расчета прогиба для разных значений параметра d свидетельствуют о незначительном уменьшении прогиба на конце консоли при росте параметра разнопрочности; в целом это уменьшение составляет 3,3–4,0% общей длины балки, и справедливо предположение о малости прогиба, поскольку $w \sim 2h$.

Таблица 2. Рост длины пластической области в зоне растяжения при увеличении нагрузки

$P * 10^5$	1.013	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
x_1	0	0.08	0.16	0.22	0.28	0.32	0.37	0.40	0.61
x_2	0	0	0	0.001	0.059	0.121	0.177	0.225	0.273

Интересно рассмотреть зависимость предельной нагрузки P_* от параметра разнопрочности d , которая рассчитывается по формуле

$$P_* = \frac{2bh^2 d \sigma_t^r}{(1+d)L}$$

и изображена на рис. 3.

Рассмотрим также зависимость роста пластических областей при изменении нагрузки для разных параметров d . Результаты схематично представлены на рис. 4, где показаны пластические области в консоли для трех значений нагрузки ($P = 1.3; 1.5; 1.7 * 10^5 H$) и для значения параметра разнопрочности ($d = 1.3$). Очевидно видна несимметрия развития пластичности при растяжении и сжатии. Следует сказать, что на рис. 4 не показан прогиб консоли и масштабы горизонтальной и вертикальной осей различны.

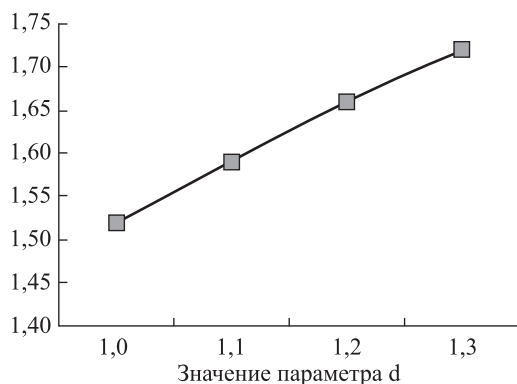


Рис. 3. Зависимость предельной нагрузки от величины d .

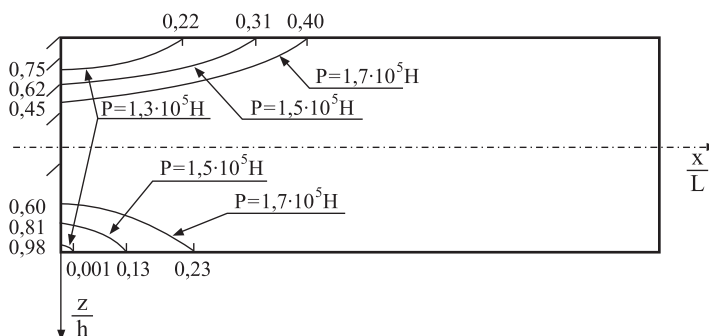


Рис. 4. Влияние роста нагрузки на рост пластических областей.

В заключение обсудим еще вопрос о влиянии собственного веса консоли на развитие упруго-пластического изгиба. Сравним момент начала пластического течения в консоли от воздействия сосредоточенной нагрузки на свободном конце консоли и момент, который создается собственным весом. Задача изгиба консоли под действием собственного веса (равномерно распределенной нагрузки p_0) решена в [1]. Приведем это решение:

$$w(x) = \frac{p_0}{24EJ}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2).$$

Максимальный прогиб при этом равен

$$w(L) = \frac{L^4 p_0}{8EJ}.$$

Очевидно, что в этом случае мы можем применить метод наложения решений [1], тогда окончательно получим выражение для прогиба на конце консоли:

$$w(L) = \frac{L^4 p_0}{8EJ} + \frac{PL^3}{3EJ}.$$

Проведем расчет для стали 40X. Удельный вес равен 7820 кг/м^3 . Возьмем размеры балки, которые были указаны выше, тогда $p_0 = 3.128 \cdot 10^3 \text{ н/м}$, т.е. чуть больше 300 кг на погонный метр. Итак, прогиб от веса $w_0 = 0.138 \text{ м}$, а от нагрузки начала

пластического течения $P_s w_s = 0.119$ м. Значит, вклад в общий прогиб при упругом деформировании будет примерно одинаков, а при развитой пластичности прогиб от нагрузки будет существенно больше, чем от собственного веса. В заключение следует сказать, что приведенное решение упруго-пластического изгиба разнопрочной консоли можно применить практически без изменений к исследованию вертикальной опорной балки, жестко вмонтированной в основание, находящейся под действием горизонтальной поперечной силы, приложенной на верхнем конце.

Литература

1. *Доннел Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
2. *Павилайнен Г. В.* К вопросу упруго-пластического деформирования конструкций // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 1. С. 67–73.
3. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 505 с.
4. *Троценко А. В., Кульчицкий Н. М.* Экспериментальное исследование начальной и последующих поверхностей текучести стали 40X // Проблемы прочности. 1983, № 11. С. 65–70.
5. *Рыбакина О. Г.* Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. Исследования по упругости и пластичности // Вестн. Ленингр. ун-та. 1982, № 14. С. 132–142.
6. *Бауэр С. М., Филиппов С. Б., Смирнов А. Л., Товстик П. Е.* Асимптотические методы в примерах и задачах. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1996. 140 с.
7. *Ефимов И. В., Павилайнен Г. В.* Статистический анализ и математическое моделирование при обработке экспериментов // Моделирование и анализ массовых событий в экономике и социуме. 2010. С. 76–80.
8. *Pavilaynen G. V.* Elasto-Plastic Deformations of Ribbed Plates // CRM Proceedings and Lecture Notes. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1993. P. 227–233.
9. *Канин М. С., Павилайнен Г. В.* Упруго-пластический изгиб вертикальной балки с учетом эффекта SD материала // Шестые Поляховские чтения, 2012, Сборник тезисов. С. 229–230.

Статья поступила в редакцию 2013 г.

Сведения об авторах

Павилайнен Галина Вольдемаровна — кандидат физико-математических наук, доцент;
g_v_pavilaynen@mail.ru

Бембеева Анна И. — студент; anyut0chka@mail.ru

Канин Максим С. — аспирант; maxkanin@mail.ru

ELASTO-PLASTIC BENDING OF SD EFFECTS BEAMS

Galina V. Pavilaynen, Anna I. Bembeeva, Maxim S. Kanin

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
g_v_pavilaynen@mail.ru, anyut0chka@mail.ru, maxkanin@mail.ru

The results of the bending of the cantilever beam with SD-effect under a concentrated load was considered. A comparison with isotropic case was explored. With standard hypotheses for long bending beams and the assumption of simple loading problem was solved analytically. Analysis of influence on the deflection SD-effect, critical load and the development of plastic deformation limit states studied education point plasticity and plastic hinge defined corresponding load for structural steel alloy 40X. Refs 9. Figs 4. Tables 3.

Keywords: elastoplastic bending, consols, strength-different effect (SD-effect).