

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА В НЕИЗОТРОПНЫХ ОПОРАХ

*И. А. Пасынкова*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

В работе исследуется влияние анизотропии упругих опор на вынужденные колебания статически и моментно неуравновешенного ротора, укрепленного как на жёстком, так и на гибком валу. Рассматривается ротор с четырьмя степенями свободы. Предполагается, что вал укреплен в линейно упругих неизотропных опорах. Выписаны дифференциальные уравнения вращения ротора в комплексных переменных и найдено точное решение системы, соответствующее эллиптической синхронной прецессии. Точное решение представляет сумму двух векторов, один из которых параметризует прямую прецессию, а другой — обратную. Построены амплитудно-частотные характеристики прямой и обратной прецессий и эллиптические траектории концов оси ротора. Показано, что в случае неизотропных опор могут быть реализованы как прямая, так и обратная прецессии, а также движение оси сложного типа, когда один конец её движется в прямом направлении, а другой — в обратном. Влияние анизотропии упругих опор проявляется также в сдвиге критических частот в сторону уменьшения и появлении дополнительных критических частот в нижней части спектра, что существенно усложняет динамику высокоскоростного ротора в период выхода на рабочую угловую скорость. Библиогр. 7 назв. Ил. 6.

*Ключевые слова:* динамика роторов, прямая прецессия, обратная прецессия, анизотропия опор.

**Введение.** При исследовании вынужденных колебаний ротора, вызванных его неуравновешенностью, часто возникает необходимость учитывать влияние анизотропии упругих опор. В работе [1] были изучены особенности колебательного движения гибкого вала с диском при различии упругих свойств опор в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Были рассмотрены простейшие системы с двумя степенями свободы при симметричном расположении диска относительно одинаковых опор. Была показана возможность существования обратной прецессии вала, что невозможно в случае изотропных опор. В монографии [2] также исследуется влияние ортотропных упругих опор на вращение ротора с двумя степенями свободы, получено точное решение уравнений, представляющее цилиндрическую эллиптическую прецессию.

В настоящей работе изучаются колебания полностью неуравновешенного ротора с четырьмя степенями свободы в двух случаях, именно укрепленного на жёстком и на линейно упругом валу. В обоих случаях с учётом анизотропии опор составлены уравнения движения в комплексных переменных и найдено точное решение этих уравнений. Отметим, что для жёсткого ротора, укрепленного в линейно-упругих неизотропных опорах и вращающегося с постоянной угловой скоростью, уравнения движения в декартовых координатах и без учёта сил трения получены в [3].

**Описание модели жесткого ротора и уравнения движения.** Рассматривается жёсткий ротор, укрепленный в двух неподвижных упругих опорах. Ротор установлен вертикально, что позволяет не учитывать влияние силы тяжести.

Введены следующие обозначения: масса и длина ротора соответственно  $M$  и  $L_r$ , расстояние между опорами —  $L$ . Точка  $C$  — центр масс ротора. Пусть ротор обладает динамической симметрией и его моменты инерции суть  $J_p$  (полярный или осевой) и  $J_t$  (трансверсальный или экваториальный). Ротор статически и моментно неуравновешен. На рис. 1 показана модель ротора. Статический эксцентриситет, т. е. смещение

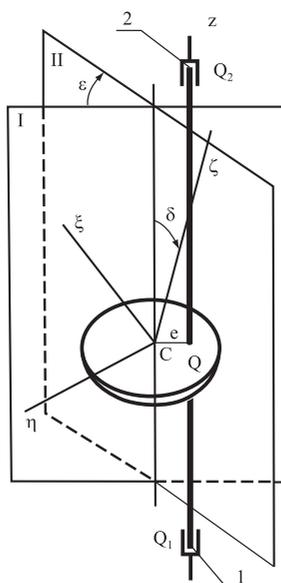


Рис. 1. Модель ротора.

центра масс ротора от его оси вращения, равен  $e$ . Моментный эксцентриситет характеризуется двумя углами,  $\delta$  и  $\varepsilon$ . Угол  $\delta$  — угол между осью динамической симметрии ротора и прямой, параллельной оси вращения, проходящей через центр масс, а угол  $\varepsilon$  — это угол между плоскостью  $I$ , проходящей через ось вращения ротора и его центр масс, и плоскостью  $II$ , в которой лежит угол  $\delta$ . Угол  $\varepsilon$  определяет фазовый сдвиг моментного эксцентриситета по отношению к статическому.

Считаем, что ротор приводится во вращение двигателем, способным поддерживать заданный закон изменения угловой скорости  $\varphi = \varphi(t)$ . Тогда, пренебрегая перемещением ротора вдоль оси вращения, его можно рассматривать как механическую систему с четырьмя степенями свободы.

Обозначим через  $Q$  точку пересечения оси вращения ротора и плоскости, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через центр масс (рис. 1). Пусть ротор расположен не центрально между опорами, так что расстояние от первой (нижней) опоры до точки  $Q$  ( $Q_1Q$ ) равно  $e_1 L$ , а расстояние от второй опоры  $QQ_2$  равно  $e_2 L$ . Если ротор укреплен консольно, то  $e_2 < 0$ , так что всегда выполняется  $e_1 + e_2 = 1$ .

Введем следующие системы координат:  $Oxyz$  — инерциальная система координат с осью  $Oz$ , совпадающей с направлением оси вращения ротора в его неподвижном состоянии;  $C\xi\eta\zeta$  — связанная с ротором система главных центральных осей инерции (рис. 2).

В качестве обобщенных координат можно выбрать либо декартовы координаты точки  $Q$ :  $(x_Q, y_Q)$  и углы  $(\alpha, \beta)$ , характеризующие направление оси вращения  $Q_1Q_2$  в пространстве, либо декартовы координаты  $(x_j, y_j)$  ( $j = 1, 2$ )  $j$ -го конца оси ротора (точки  $Q_j$ ) в плоскости, перпендикулярной оси подшипников. Именно эти координаты используются в дальнейшем.

Упругие опоры предполагаются линейными и неизотропными, а неизотропность определяется «эллипсом упругости», т. е. возможно выделить два главных направления с максимальным и минимальным значениями коэффициента упругости. Будем

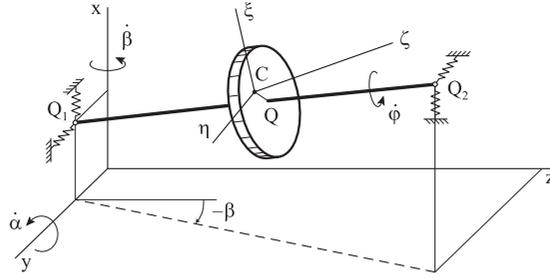


Рис. 2. Системы координат.

считать, что главные направления обоих опор совпадают, и коэффициенты упругости равны соответственно  $c_{xj}, c_{yj}, j = 1, 2$ .

Абсолютные координаты центра масс  $C$  равны

$$x_C = x_Q + e \cos \varphi, \quad y_C = y_Q + e \sin \varphi. \quad (1)$$

Координаты  $(x_Q, y_Q, \alpha, \beta)$  можно выразить через координаты  $(x_j, y_j)$  ( $j = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} x_Q &= e_2 x_1 + e_1 x_2, & y_Q &= e_2 y_1 + e_1 y_2, \\ \alpha &\doteq \frac{x_2 - x_1}{L}, & \beta &\doteq \frac{y_2 - y_1}{L}. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи ведется в геометрически линейной постановке, т. е. справедливы оценки  $x_j/L \ll 1, y_j/L \ll 1$ , и углы  $(\alpha, \beta)$  являются малыми.

Удобно перейти к комплексным переменным  $S_j$  и ввести полусуммы и полуразности коэффициентов упругости:

$$S_j = x_j + i y_j, \quad c_{mj} = \frac{c_{xj} + c_{yj}}{2}, \quad c_{dj} = \frac{c_{xj} - c_{yj}}{2}. \quad (3)$$

Далее предположим, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью  $\tilde{\omega}$  и на него кроме реакций опор дополнительно действуют силы внешнего трения со стороны опор, окружающей среды или специальных демпферов. Пусть равнодействующие сил внешнего трения пропорциональны абсолютной скорости точек  $Q_1, Q_2$ :

$$\tilde{\mathbf{R}}_j^{(e)} = -\tilde{\mu}_j^e \dot{\mathbf{S}}_j \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

Применяя теоремы о движении центра масс и теорему моментов, составим уравнения движения ротора в комплексных переменных:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \left( M e_{3-j} \ddot{S}_j + \tilde{\mu}_j^e \dot{S}_j + c_{mj} S_j + c_{dj} \bar{S}_j \right) &= M e \tilde{\omega}^2 \exp(i \tilde{\omega} t), \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( J_t \ddot{S}_j - i J_p \tilde{\omega} \dot{S}_j + L^2 e_j \tilde{\mu}_j^e \dot{S}_j + L^2 e_j (c_{mj} S_j + c_{dj} \bar{S}_j) \right) &= \\ &= (J_t - J_p) L \delta \tilde{\omega}^2 \exp(i(\tilde{\omega} t - \varepsilon)), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\bar{S}_j$  — комплексно-сопряжённые переменные.

В системе уравнений (5) перейдем к безразмерному времени  $\tau$ :  $\tau = \omega_0 t$ , где  $\omega_0$  — характерная угловая скорость, и к безразмерным переменным  $s_j = S_j/h$ , где

масштабный коэффициент  $h$  может быть равным либо статическому эксцентриситету  $e$ , либо величине  $L\delta$ . Получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} (e_{3-j}\dot{s}_j + \mu_j^e \dot{s}_j + \omega_{mj}^2 s_j + \omega_{dj}^2 \bar{s}_j) &= d_1 \Omega^2 \exp(i\Omega\tau), \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j (\dot{s}_j + k(1-\lambda)e_j \mu_j^e \dot{s}_j + k(1-\lambda)e_j (\omega_{mj}^2 s_j + \omega_{dj}^2 \bar{s}_j)) &= \\ &= (1-\lambda)d_2 \Omega^2 \exp(i(\Omega\tau - \varepsilon)). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь дифференцирование ведется по безразмерному времени  $\tau$ . Остальные параметры, которые можно назвать конструкционными, имеют следующий смысл:

$$\lambda = \frac{J_p}{J_t}, \quad k = \frac{ML^2}{J_t(1-\lambda)}, \quad d_1 = \frac{e}{h}, \quad d_2 = \frac{L\delta}{h}, \quad \mu_j^e = \frac{\tilde{\mu}_j^e}{M\omega_0}, \quad \omega_{mj}^2 = \frac{c_{mj}}{M\omega_0^2}, \quad \omega_{dj}^2 = \frac{c_{dj}}{M\omega_0^2}. \quad (7)$$

Заметим, что всегда справедливо  $k(1-\lambda) > 0$ .

**Прямые и обратные синхронные прецессии.** При исследовании вращения ротора в изотропных опорах было показано, что при выполнении определённых условий существует прямая синхронная круговая прецессия ротора как в случае линейных упругих опор, так и в случае нелинейных опор. Покажем, что в рассматриваемом случае существуют как прямые, так и обратные эллиптические синхронные прецессии.

Уравнения (6) допускают точные решения вида

$$s_j = a_{dj} \exp(i\Omega\tau) + a_{rj} \exp(-i\Omega\tau), \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь  $a_{dj}$  и  $a_{rj}$  — комплексные амплитуды точки  $Q_j$  ротора в прямой и обратной прецессии.

После подстановки решения в виде (8) в систему (6) получим два равенства вида

$$\begin{aligned} A^+ \exp(i\Omega\tau) + A^- \exp(-i\Omega\tau) &= 0, \\ B^+ \exp(i\Omega\tau) + B^- \exp(-i\Omega\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A^+ &= \sum_{j=1,2} ((\omega_{mj}^2 - e_{3-j}\Omega^2 + i\mu_j^e \Omega) a_{dj} + \omega_{dj}^2 \bar{a}_{rj}) - d_1 \Omega^2, \\ A^- &= \sum_{j=1,2} ((\omega_{mj}^2 - e_{3-j}\Omega^2 - i\mu_j^e \Omega) a_{rj} + \omega_{dj}^2 \bar{a}_{dj}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B^+ &= \sum_{j=1,2} (-1)^j ((ke_j(\omega_{mj}^2 + i\mu_j^e \Omega) - \Omega^2) a_{dj} + ke_j \omega_{dj}^2 \bar{a}_{rj}) - d_2 \Omega^2 \exp(-i\varepsilon), \\ B^- &= \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( ke_j \omega_{dj}^2 \bar{a}_{dj} + \left( ke_j (\omega_{mj}^2 - i\mu_j^e \Omega) - \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \Omega^2 \right) a_{rj} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Равенства (9) должны тождественно удовлетворяться при любом значении  $\tau$ . Функции  $\exp(i\Omega\tau)$  и  $\exp(-i\Omega\tau)$  линейно независимы, следовательно, коэффициенты  $A^+$ ,  $B^+$ ,  $A^-$ ,  $B^-$  должны равняться нулю. Заменим выражения  $A^-$ ,  $B^-$  на комплексно-сопряжённые и приравняем их, а также величины  $A^+$ ,  $B^+$  нулю, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно величин  $a_{dj}$ ,  $\bar{a}_{rj}$ :

$$Pz = Q, \quad (12)$$

где  $z = (a_{d1}, a_{d2}, \bar{a}_{r1}, \bar{a}_{r2})^T$ ,  $Q = (d_1\Omega^2, 0, d_2\Omega^2 \exp(-i\varepsilon), 0)^T$ , а элементы матрицы  $P$  равны ( $j = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} p_{1,j} &= \omega_{mj}^2 - e_{3-j}\Omega^2 + i\mu_j^e\Omega, & p_{1,2+j} &= \omega_{dj}^2, \\ p_{2,j} &= \omega_{dj}^2, & p_{2,2+j} &= \omega_{mj}^2 - e_{3-j}\Omega^2 + i\mu_j^e\Omega, \\ p_{3,j} &= (-1)^j (ke_j(\omega_{mj}^2 + i\mu_j^e\Omega) - \Omega^2), & p_{3,2+j} &= (-1)^j ke_j\omega_{dj}^2, \\ p_{4,j} &= (-1)^j ke_j\omega_{dj}^2, & p_{4,2+j} &= (-1)^j \left( ke_j(\omega_{mj}^2 + i\mu_j^e\Omega) - \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\Omega^2 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Для вычисления критических частот, на которых резонируют прямая или обратная прецессии ротора, приравняем нулю определитель матрицы  $P$  при отсутствии сопротивления. Пусть  $\mu_j^e = 0$ . Для произвольных значений остальных параметров определитель системы (12) имеет громоздкое выражение, и найти критические (резонансные) угловые скорости возможно только численно. Сделаем некоторые упрощающие предположения. Пусть опоры одинаковые, т. е.  $\omega_{m1} = \omega_{m2} = \omega_m$ ,  $\omega_{d1} = \omega_{d2} = \omega_d$ , и ротор укреплен центрально, т. е. его центр масс находится точно посередине между опорами и  $e_1 = e_2 = 1/2$ . Тогда уравнение  $\Delta = 0$ , где  $\Delta$  — определитель матрицы  $P$  в отсутствие сопротивления, распадается на три уравнения:

$$\begin{aligned} X - 2(\omega_m^2 + \omega_d^2) &= 0, & X - 2(\omega_m^2 - \omega_d^2) &= 0, \\ 4(1 + \lambda)X^2 - 4k\omega_m^2X + (1 - \lambda)k^2(\omega_m^4 - \omega_d^4) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Если в этих уравнениях от величин  $\omega_m$ ,  $\omega_d$  вернуться к частотам, связанным с главными направлениями  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , то получим систему

$$\begin{aligned} X - 2\omega_x^2 &= 0, & X - 2\omega_y^2 &= 0, \\ 4(1 + \lambda)X^2 - 2k(\omega_x^2 + \omega_y^2)X + (1 - \lambda)k^2\omega_x^2\omega_y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Как видно из этих уравнений, для динамически вытянутого («длинного») ротора, когда  $\lambda < 1$ , существуют четыре критические угловые скорости, а для динамически сжатого («короткого») ротора при  $\lambda > 1$  — три. Этот результат согласуется со случаем вращения ротора в одинаковых изотропных опорах [4].

Решение системы (12) позволит определить комплексные амплитуды прямой и обратной прецессии точки  $Q_j$ . Абсолютные величины этих амплитуд представляют амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) соответствующих движений. На рис. 3 показаны АЧХ прямой (жирная сплошная линия) и обратной (штриховая линия) прецессий точек  $Q_1$  и  $Q_2$  для следующих значений параметров:  $e_1 = e_2 = 1/2$ ,  $\varepsilon = \pi/3$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $k = 3.8$ ,  $h_1 = 2$ ,  $h_2 = 0.5$ ,  $\omega_x^2 = 1.2$ ,  $\omega_y^2 = 0.4$ ,  $\mu_1^e = \mu_2^e = 0.05$ . Тонкими сплошными линиями показаны линейные резонансы, соответствующие критическим частотам, которые при данных параметрах равны  $X_1 = 0.19$ ,  $X_2 = 0.80$ ,  $X_3 = 1.60$ ,  $X_4 = 2.40$ . Отметим, что при выбранном малом внешнем сопротивлении доминируют резонансы, соответствующие собственным частотам в двух главных направлениях. На тех частотах, где амплитуда прямой прецессии превосходит амплитуду обратной прецессии, соответствующая точка  $Q_j$  движется по эллиптической траектории в направлении вращения ротора, если же больше амплитуда обратной прецессии, то результирующее движение происходит противоположно вращению ротора.

На рис. 4 показаны траектории точки  $Q_1$  (жирная сплошная линия) и точки  $Q_2$  (штриховая линия) для разных значений частот. На частоте  $X = 1.5$  имеет место

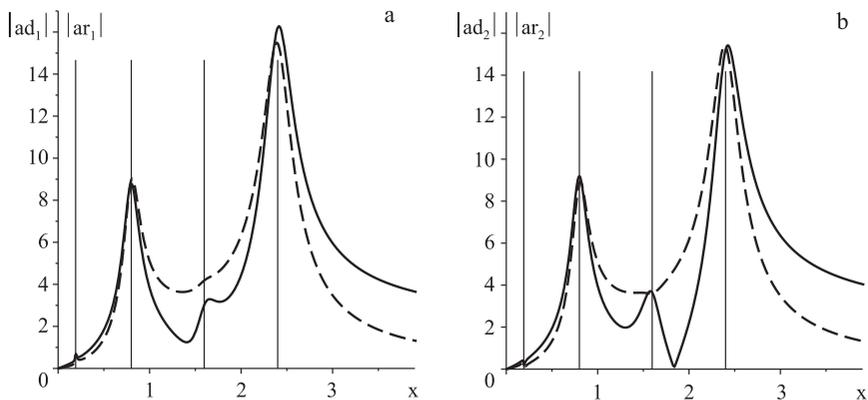


Рис. 3. АЧХ прямой и обратной прецессии: а — точки  $Q_1$ ; б — точки  $Q_2$ .

обратная прецессия, а на частоте  $X = 3.5$  — прямая. Это хорошо видно, если использовать функцию анимации в математическом пакете Maple.

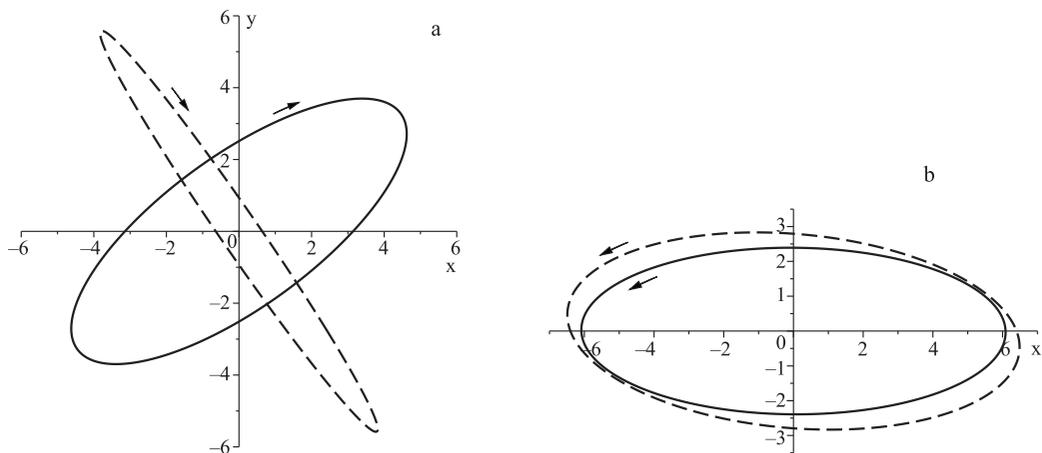


Рис. 4. Траектории точек  $Q_1$  и  $Q_2$ : а —  $X = 1.5$ , обратная прецессия; б —  $X = 3.5$ , прямая прецессия.

Как и в случае изотропных опор, на больших угловых скоростях вращения при отсутствии сопротивления устанавливается режим самоцентрирования. Амплитуды прямой прецессии в режиме самоцентрирования получены в пакете Maple и имеют соответственно значения

$$|S_1| = \frac{1}{2} \sqrt{4h_1^2 + h_2^2 - 4h_1h_2 \cos \varepsilon}, \quad |S_2| = \frac{1}{2} \sqrt{4h_1^2 + h_2^2 + 4h_1h_2 \cos \varepsilon}, \quad (16)$$

а амплитуды обратной прецессии равны нулю.

**Уравнения движения ротора, укрепленного на гибком валу.** Рассмотрим ротор с четырьмя степенями свободы, который представляет собой абсолютно твёрдое динамически симметричное тело, прикрепленное к упругому валу, массой которого

можно пренебречь по сравнению с массой тела. Гибкий вал укреплен в линейно-упругих анизотропных опорах. Модель ротора приведена на рис. 5.

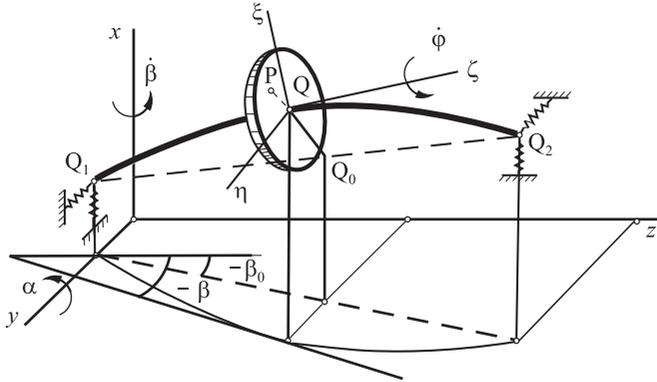


Рис. 5. Модель гибкого ротора с 4 степенями свободы, укрепленного в упругих опорах.

Введем следующие системы координат:  $Oxyz$  — инерциальная система координат с осью  $Oz$ , совпадающей с направлением оси вращения ротора в его неподвижном состоянии; система координат  $Q\xi\eta\zeta$ , жёстко связанная с ротором и с осью  $Q\zeta$ , направленной вдоль касательной к изогнутой оси вала.

Положение ротора можно охарактеризовать с помощью 8 параметров:  $(x, y)$  — декартовы координаты точки  $Q$ ;  $(\alpha, \beta)$  — углы, определяющие направление оси  $Q\zeta$ ;  $(x_j, y_j)$  — декартовы координаты точки  $Q_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Кинетическая энергия ротора с точностью до линейных членов относительно параметров дисбаланса  $e, \delta$  и квадратичных членов относительно малых величин  $\alpha, \beta$  и их производных  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$  может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + e\omega(\dot{y}\cos(\omega t) - \dot{x}\sin(\omega t))) + \frac{1}{2}J_p(\omega^2 - 2\omega\dot{\beta}\alpha) + \frac{1}{2}J_t(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + (J_p - J_t)\delta\omega(\dot{\alpha}\sin(\omega t - \varepsilon) - \dot{\beta}\cos(\omega t - \varepsilon)). \quad (17)$$

Потенциальная энергия изогнутого вала и упругих сил со стороны опор может быть записана в виде

$$\Pi_B = \frac{1}{2}c_{11}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \frac{1}{2}c_{22}((\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2) + c_{12}((x - x_0)(\alpha - \alpha_0) + (y - y_0)(\beta - \beta_0)) + \frac{1}{2}\sum_{j=1,2}(c_{xj}x_j^2 + c_{yj}y_j^2). \quad (18)$$

Здесь введены обозначения  $C = \{c_{lm}\}$  ( $l, m = 1, 2$ ) — матрица жесткости упругого вала, закреплённого в жестких подшипниках;  $(x_0, y_0)$  — декартовы координаты точки  $Q_0$ ; углы  $(\alpha_0, \beta_0)$  определяют направление прямой  $Q_1Q_2$ . Величины  $(x_0, y_0, \alpha_0, \beta_0)$  характеризуют перемещение ротора как твердого тела (рис. 5) и вычисляются по формулам (2).

Уравнения Лагранжа II рода относительно комплексных переменных (3) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} M\ddot{S} + \tilde{\mu}_e \dot{S} + c_{11}(S - S_0) + c_{12}(\gamma - \gamma_0) &= M e \omega^2 \exp(i\omega t), \\ J_t \ddot{\gamma} - i J_p \omega \dot{\gamma} + \tilde{\mu}_e L^2 \dot{\gamma} + c_{12}(S - S_0) + c_{22}(\gamma - \gamma_0) &= \\ &= (J_t - J_p) \delta \omega^2 \exp(i(\omega t - \varepsilon)), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \left( c_{11} e_2 - \frac{c_{12}}{L} \right) (S - S_0) + \left( c_{12} e_2 - \frac{c_{22}}{L} \right) (\gamma - \gamma_0) &= c_{m1} S_1 + c_{d1} \bar{S}_1, \\ \left( c_{11} e_1 + \frac{c_{12}}{L} \right) (S - S_0) + \left( c_{12} e_1 + \frac{c_{22}}{L} \right) (\gamma - \gamma_0) &= c_{m2} S_2 + c_{d2} \bar{S}_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Алгебраические уравнения (20) отражают баланс упругих сил со стороны изогнутого вала и восстанавливающих сил со стороны деформированных опор. Эти уравнения можно рассматривать также как уравнения связей между координатами  $S$ ,  $\gamma$  и  $S_1$ ,  $S_2$ . Любой набор переменных  $(S, \gamma)$  или  $(S_1, S_2)$  может быть выбран в качестве обобщенных координат. Пусть  $(S_1, S_2)$  будут обобщенными координатами.

Уравнения (20) являются линейными относительно  $(S, \gamma)$ , точное решение системы будет

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1,2} \left( (e_{3-j} + \kappa_{1j} c_{mj}) S_j + \kappa_{1j} c_{dj} \bar{S}_j \right), \\ \gamma &= \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( (1 + \kappa_{2j} c_{mj}) \frac{S_j}{L} + \kappa_{2j} c_{dj} \frac{\bar{S}_j}{L} \right), \\ \kappa_{1j} &= c_{11}^* + (-1)^j c_{12}^* e_j L, \quad \kappa_{2j} = c_{22}^* e_j L + (-1)^j c_{12}^*, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $C^* = \{c_{lm}^*\}$  — матрица податливости. Компоненты этой матрицы  $c_{lm}^*$  зависят от способа крепления вала. Для различных видов опор эти функции можно найти во многих монографиях, например [5].

Подставим решение (21) в уравнения (19), затем перейдем к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$  и безразмерным переменным  $s_j = S_j/h$ . Получим следующие безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} \left( \mathcal{M}_\tau \left( (e_{3-j} + \sigma_{1j} \omega_{mj}^2) s_j + \sigma_{1j} \omega_{dj}^2 \bar{s}_j \right) + \omega_{mj}^2 s_j + \omega_{dj}^2 \bar{s}_j \right) &= d_1 \Omega^2 \exp(i\Omega\tau), \\ \sum_{j=1,2} (-1)^j \left( \mathcal{J}_\tau \left( (1 + \sigma_{2j} \omega_{mj}^2) s_j + \sigma_{2j} \omega_{dj}^2 \bar{s}_j \right) + k l e_j (\omega_{mj}^2 s_j + \omega_{dj}^2 \bar{s}_j) \right) &= \\ &= l d_2 \Omega^2 \exp(i(\Omega\tau - \varepsilon)). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\mathcal{M}_\tau(*) = \frac{d^2}{d\tau^2}(*) + \mu_e \frac{d}{d\tau}(*), \quad \mathcal{J}_\tau(*) = \frac{d^2}{d\tau^2}(*) + (-i\Omega\lambda + k l \mu_e) \frac{d}{d\tau}(*). \quad (23)$$

Основные обозначения соответствуют формулам (7) и

$$\sigma_{1j} = \kappa_{1j} M \omega_0^2, \quad \sigma_{2j} = \kappa_{2j} L M \omega_0^2. \quad (24)$$

**Прямые и обратные синхронные прецессии.** Как и в случае жесткого ротора, уравнения (22) допускают точное решение вида (8). Проведем вычисления, как

для жесткого ротора, получим линейную систему алгебраических уравнений вида (12) для определения критических частот и амплитуд прямой и обратной прецессий. Получим следующие элементы матрицы  $P$  будут ( $j = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} p_{1,j} &= \omega_{m_j}^2 + (e_{3-j} + \sigma_{1j}\omega_{m_j}^2)(-\Omega^2 + i\mu_j^e\Omega), \\ p_{1,2+j} &= \omega_{d_j}^2(1 + \sigma_{1j}(-\Omega^2 + i\mu_j^e\Omega)), \\ p_{2,j} &= \omega_{d_j}^2(1 + \sigma_{1j}(-\Omega^2 + i\mu_j^e\Omega)), \\ p_{2,2+j} &= \omega_{m_j}^2 + (e_{3-j} + \sigma_{11}\omega_{m_j}^2)(-\Omega^2 + i\mu_j^e\Omega), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} p_{3,j} &= (-1)^j(ke_j\omega_{m_j}^2 + (1 + \sigma_{2j}\omega_{m_j}^2)(-\Omega^2 + ike_j\mu_j^e\Omega)), \\ p_{3,2+j} &= (-1)^j\omega_{d_j}^2(ke_j + \sigma_{2j}(-\Omega^2 + ike_j\mu_j^e\Omega)), \\ p_{4,j} &= (-1)^j\omega_{d_j}^2\left(ke_j + \sigma_{2j}\left(-\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\Omega^2 + ike_j\mu_j^e\Omega\right)\right), \end{aligned} \quad (26)$$

$$p_{4,2+j} = (-1)^j\left(ke_j\omega_{m_j}^2 + (1 + \sigma_{2j}\omega_{m_j}^2)\left(-\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\Omega^2 + ike_j\mu_j^e\Omega\right)\right).$$

Рассмотрим в качестве примера модель турбомолекулярного насоса, которая представляет собой твёрдое тело, консольно укрепленное на гибком валу. В работе [6] предполагалось, что вал установлен в жёстких опорах, и были найдены две критические частоты:  $\tilde{\omega}_1 = 10496$  об/мин,  $\tilde{\omega}_2 = 67080$  об/мин. В работе [7] было показано, что учёт упругости опор в случае их изотропности приводит к значительному сдвигу критических частот в сторону уменьшения. Так, для той же модели при коэффициенте упругости для стального подшипника соответствующие частоты равнялись  $\tilde{\omega}_1 = 7832$  об/мин,  $\tilde{\omega}_2 = 17926$  об/мин. В этой работе предположим, что вал укреплен в анизотропных одинаковых опорах, в которых жёсткости в двух главных направлениях различаются в два раза. Возьмём в качестве наибольшей жёсткости её значение из [7]:  $c_{\max} = 1.08 \cdot 10^7$  н/м. Наименьшая жёсткость будет  $c_{\min} = 0.54 \cdot 10^7$  н/м. Безразмерные параметры этой модели примут значения  $e_1 = 1.2$ ,  $e_2 = -0.2$ ,  $\varepsilon = \pi/3$ ,  $\lambda = 0.64$ ,  $k = 12.0$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 0.25$ ,  $\omega_m^2 = 1$ ,  $\omega_d^2 = 0.33$ ,  $\mu_1^e = \mu_2^e = 0.05$ . Для этих параметров найдены четыре критических значения:  $X_1 = 0.173$ ,  $X_2 = 0.299$ ,  $X_3 = 1.126$ ,  $X_4 = 2.360$ . Этим значениям соответствуют угловые скорости ротора  $\tilde{\omega}_1 = 4616$  об/мин,  $\tilde{\omega}_2 = 7010$  об/мин,  $\tilde{\omega}_3 = 11779$  об/мин,  $\tilde{\omega}_4 = 17052$  об/мин. Для выбранных значений параметров на рис. 6, а и б показаны АЧХ прямой (жирная сплошная линия) и обратной (штриховая линия) прецессий для точек  $Q_1$  и  $Q_2$ . Тонкими сплошными линиями показаны линейные резонансы, соответствующие критическим частотам. Отметим, что прямая прецессия резонирует на частотах, близких к частотам в случае изотропных опор. На тех частотах, где амплитуда прямой прецессии превосходит амплитуду обратной прецессии, соответствующий шип движется по эллиптической траектории в направлении вращения ротора, если же больше амплитуда обратной прецессии, то результирующее движение шипа происходит противоположно вращению ротора.

На рис. 6, с показаны траектории точки  $Q_1$  (жирная сплошная линия) и точки  $Q_2$  (штриховая линия) для значения частоты  $X = 1.2$ . При этом наблюдается интересная ситуация, когда точка  $Q_1$  движется по эллипсу в направлении вращения ротора, а точка  $Q_2$  — в противоположном.

**Заключение.** На основании полученных результатов можно сделать вывод о значительном влиянии анизотропии опор на динамику неуравновешенных роторов,

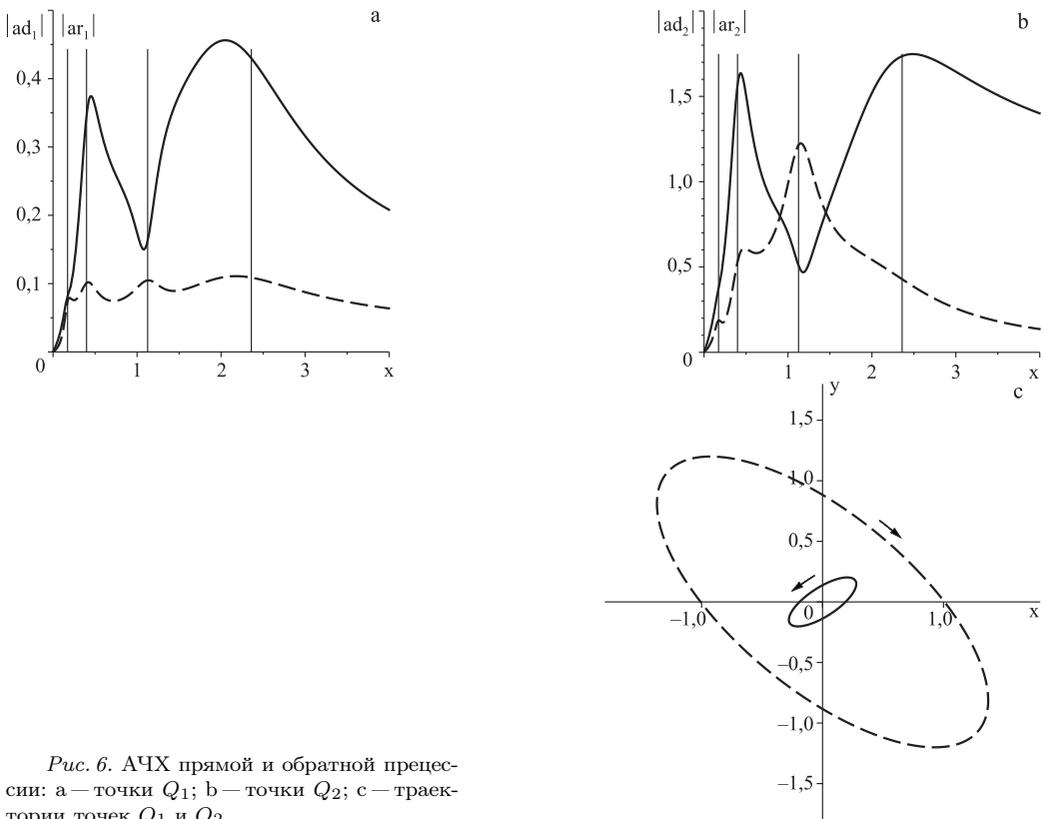


Рис. 6. АЧХ прямой и обратной прецессии: а — точки  $Q_1$ ; б — точки  $Q_2$ ; в — траектории точек  $Q_1$  и  $Q_2$ .

укрепленных как на жёстком, так и на гибком валу. Происходит сдвиг критических частот в сторону уменьшения и появляются дополнительные критические частоты, причём в нижней части спектра. Это будет существенно влиять на выход роторной машины на рабочую угловую скорость. Кроме того, могут быть реализованы прямая и обратная прецессии, а также движение оси сложного типа, когда один конец её движется в прямом направлении, а другой — в обратном. Все это подтверждает высокую практическую значимость учёта даже незначительной анизотропии опор.

## Литература

1. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 248 с. (*Dimentberg F. Flexural Vibrations of Rotating Shafts. Butterworth, London, 1961.*)
2. Genta G. Dynamics of Rotating Systems. Springer-Verlag, New York, 2005. 658 p.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 440 с. (*Timoshenko S. P. Vibration Problems in Engineering. Van Nostrand, Toronto, 1928.*)
4. Пасынкова И. А. Бифуркации прецессионного движения неуравновешенного ротора // Прикладная математика и механика. Т. 70. Вып. 4. 2006. С. 605–616. (*Pasynkova I. A. Bifurcations of the precessional motion of an unbalanced rotor // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2006. Vol. 70. Issue 4. P. 549–559.*)
5. Грбов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. М.: Изд-во АН СССР. 1961. 166 с.
6. Genta G. Vibration of structure and machines: practical aspects. Springer-Verlag, Berlin, 1999. 599 p.

7. *Pasynkova I. A.* Whirling motion of an Unbalanced Rotor in Linear and Nonlinear Elastic Bearings // Den 7. Magdeburger Maschinenbau-Tage. 11–12. Oktober 2005. Tagungsband, 2005, 143–148.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

*Пасынкова Инна Анатольевна* — доктор физико-математических наук, профессор;  
iapasynkova@gmail.com

## **FORCED OSCILLATION OF AN UNBALANCED ROTOR IN NONISOTROPIC BEARINGS**

*Inna A. Pasynkova*

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;  
iapasynkova@gmail.com

An influence of bearings anisotropy on forced oscillation of an unbalanced rotor with four degrees of freedom was considered. Two cases of the rotor mounting on the rigid shaft and on the flexible one were thoroughly examined. The differential equations of the rotor rotation were obtained in complex variables. The exact solution of the system was found. Appearance of the additional critical frequencies especially in the bottom part of the spectrum was shown. The dynamic responses and the elliptical trajectories of the shaft's ends were obtained. It was also shown that the direct and reverse whirling motion could be realized. Refs 7. Figs 6.

*Keywords:* rotor dynamics, direct whirling, reverse whirling, anisotropy of bearings.

## **ХРОНИКА**

24 апреля 2013 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступил кандидат физ.-мат. наук, доцент А. Б. Бячков (Пермский государственный национальный исследовательский университет) с докладом на тему «Дифференциально-алгебраические модели динамики несвободного движения».

Краткое содержание доклада:

Рассматриваются частицы общего вида, обладающие дополнительными инерционными характеристиками по сравнению с твердыми телами. Динамические свойства этих частиц существенно отличаются от динамических свойств обычных твердых тел. В частности, при свободном движении такой частицы ее траектория не является прямой линией, а при движении вблизи притягивающего центра ее траектория — это не плоская кривая, а пространственная. Предлагается использовать эти частицы в качестве механических моделей элементарных частиц и квазичастиц — электронов, фотонов, фононов и т. д. Предлагается также использовать их при построении моделей сплошных сред, обладающих не только механическими, но и тепловыми или электромагнитными свойствами.