АСТРОНОМИЯ

УДК 524.4

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ ЗВЕЗД, СВОБОДНЫЙ ОТ ЭФФЕКТА СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ХОДА ПАРАЛЛАКСОВ ПО НЕБУ

В. В. Витязев, А. С. Цветков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Статья посвящена особенностям кинематического анализа собственных движений звезд для тех случаев, когда информация о параллаксах отсутствует и движение Солнца не может быть исключено из собственных движений звезд. Наш подход основан на аппроксимации параллаксов как функции координат на сфере с помощью сферических функций. Предложен метод получения параметров поля скоростей, свободных от искажений, возникающих от систематического хода параллаксов звезд по небесной сфере. Численные эксперименты показали, что наш метод оказался способным получить точные значения координат апекса движения Солнца, а также оценить кинематические параметры модели Огородникова—Милна с точностью до трех коэффициентов разложения параллаксов по сферическим функциям первого порядка.

Интересной особенностью этого метода является то, что он позволяет построить в галактической системе координат форму фигуры, поверхность которой описывает отличия распределения параллаксов от сферы, соответствующей среднему параллаксу изучаемой выборки звезд. Особо подчеркнем, что все это делается при полном отсутствии сведений о параллаксах звезд. Основным источником информации о параллаксах здесь являются «солнечные члены» собственных движений звезд, которые формируются произведениями параллаксов на компоненты скорости движения Солнца относительно центроида звезд. Библиогр. 14 назв. Табл. 4.

Ключевые слова: астрометрия, звездная кинематика, структура Галактики, собственные движения звезд, сферические функции.

1. Введение. Строгий подход к определению параметров поля скоростей звезд по их собственным движениям требует знания параллаксов звезд. В настоящее время надежные тригонометрические параллаксы для более чем 100 тысяч звезд можно найти только в каталоге HIPPARCOS [1]. В большинстве астрометрических каталогов параллаксы имеют низкую точность, обусловленную косвенными методами их определения — путем сравнения абсолютных и видимых звездных величин. В массовых астрометрических каталогах UCAC4 [2], PPMXL [3] оценки расстояний (параллаксы) совсем отсутствуют.

При использовании линейных моделей, справедливых для звезд, удаленных от Солнца на расстояния до 1–2 кпк, параллаксы входят только в те компоненты собственных движений звезд, которые определяются скоростью движения Солнца относительно звезд. Для таких моделей в предположении о том, что звезды расположены на одинаковых расстояниях от Солнца, можно получить точные оценки кинематических параметров поля скоростей звезд. При этом единственной потерей будет то, что компоненты скорости движения Солнца относительно звезд будут определены с точностью до постоянного множителя, равного параллаксу звезд. Эта идея традиционно используется в реальности, когда информация о параллаксах отсутствует. Разумеется, при этом кинематические параметры определяются приближенно, а вместо компонентов скорости движения Солнца мы получаем их оценки, умноженные на среднее значение параллаксов звезд.

Однако в силу того, что галактический диск имеет конечную толщину, а также из-за наличия пылевой компоненты вблизи основной плоскости Галактики, параллаксы звезд могут иметь систематический ход по небесной сфере. Этот эффект был известен давно, и его учет производился разными авторами разными способами (Вильямс и Высоцкий [4]; Оорт [5]; Фрикке [6]).

Новый подход к этой проблеме был сделан в работе Оллинга и Денена [7]. Здесь было показано, что систематический ход параллаксов звезд по небесной сфере приводит к искажению искомых значений параметров кинематической модели из-за эффекта смешивания гармоник (mode-mixing effects, по терминологии авторов). В указанной работе этот эффект был изучен на примере упрощенной кинематической модели, в которую не были включены эффекты в плоскостях, перпендикулярных основной плоскости Галактики. Кроме того, смешивание гармоник изучалось в одномерном варианте зависимости параллаксов только от долготы. В силу этих упрощений в цитированной работе основным математическим аппаратом стало использование рядов Фурье как для представления собственных движений звезд, так и их параллаксов. Такой подход ограничил возможность учета зависимости параллаксов от долготы узкой зоной широт вблизи галактического экватора.

Нами (Витязев, Цветков [8]) была предпринята попытка решить указанную проблему с помощью представления параллаксов звезд с помощью сферических функций вместо рядов Фурье. Это позволило изучить эффект смешивания гармоник не только по долготе, но и по широте. Было показано влияние коэффициентов разложения параллаксов по сферическим функциям (в дальнейшем — параллактических коэффициентов) на численные значения параметров модели Огородникова—Милна. Наша следующая работа (Витязев, Цветков [9]) была посвящена изучению эффекта смешивания гармоник при выполнении кинематического анализа собственных движений звезд с помощью векторных сферических функций (Витязев, Цветков [10]). В указанных работах решалась прямая задача — определение влияния коэффициентов разложения параллаксов звезд по сферическим функциям на получение параметров поля скоростей. Основная цель настоящей работы заключается в решении обратной задачи — получении по собственым движениям звезд коэффициентов разложения параллаксов по сферическим функциям и оценок кинематических параметров, свободных от влияния этих коэффициентов.

2. Кинематические модели собственных движений звезд. Как и в предыдущих наших работах, для анализа собственных движений звезд мы будем использовать уравнения модели Огородникова—Милна (Огородников [12], Дю Монт [13]), которая содержит 12 параметров:

U, V, W — компоненты вектора скорости поступательного движения Солнца $\mathbf{V}_0$ относительно звезд;

ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты вектора твердотельного вращения $\mathbf{\Omega}$;

M^+_{11}, M^+_{22}, M^+_{33} — параметры тензора $\mathbf{M}^+$, описывающие сжатие-растяжение поля скоростей вдоль главных галактических осей осей;

M^{+}_{12}, M^{+}_{13}, M^{+}_{23} — параметры тензора $\mathbf{M}^{+}$, описывающие деформацию поля скоростей в основной и двух перпендикулярных к ней плоскостях.

В галактической системе координат в рамках этой модели собственные движения звезд представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\mu_l \cos b = \quad & U\pi\ \sin l - V\pi\ \cos l - \omega_1 \sin b \cos l - \omega_2 \sin b \sin l + \omega_3 \cos b - \\ - \quad & M^{+}_{13} \sin b \sin l + M^{+}_{23} \sin b \cos l + M^{+}_{12} \cos b \cos 2l - \\ - \quad & \frac{1}{2} M^{*}_{11} \cos b \sin 2l, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\mu_b = \quad & U\pi\ \cos l \sin b + V\pi\ \sin l \sin b - W\pi\ \cos b + \omega_1 \sin l - \omega_2 \cos l - \\ - \quad & \frac{1}{2} M^{+}_{12} \sin 2b \sin 2l + M^{+}_{13} \cos 2b \cos l + M^{+}_{23} \cos 2b \sin l - \\ - \quad & \frac{1}{4} M^{*}_{11} \sin 2b \cos 2l + \frac{1}{2} X \sin 2b, \end{aligned} \tag{2}$$

где множитель $\mathcal{K} = 4.74$ служит для перевода размерности собственных движений звезд мсд/год в км/с/кпк. Кроме того, в этих формулах введены следующие обозначения:

$$M^{*}_{11} = M^{+}_{11} - M^{+}_{22}; \qquad X = M^{+}_{33} - \frac{1}{2}(M^{+}_{11} + M^{+}_{22}). \tag{3}$$

Обычно анализ поля скоростей производится с помощью решения основных кинематических уравнений (1)–(2) относительно параметров модели Огородникова—Милна в локальной системе координат, движущейся вокруг центра Галактики вместе с Солнцем. Переход в галактоцентрическую цилиндрическую систему координат помогает получить информацию, относящуюся к Галактике в целом (Миямото и др., [14]).

3. Анализ собственных движений звезд при учете распределения параллаксов по небесной сфере. Как уже было сказано выше, для проведения кинематического анализа звезд необходимо знать их параллаксы. В тех случаях, когда параллаксы не известны (это скорее правило, чем исключение) приходится в уравнениях (1)–(2) полагать, что все звезды находятся от нас на одинаковом расстоянии. В этом случае мы сможем определить параметры движения Солнца лишь с точностью до среднего параллакса $\hat{\pi}$. Однако параллаксы звезд могут иметь систематический ход по небесной сфере, и это надо учитывать при выполнении кинематического анализа собственных движений звезд. В принципе, возможны различные способы моделирования систематического хода параллаксов, однако эти модели зависят от конкретного набора звезд и могут существенно меняться при переходе от одной выборки звезд к другой. По-видимому, универсальной моделью может служить представление параллаксов с помощью линейной комбинации сферических функций, поскольку в этом случае конкретную зависимость параллаксов от координат можно описать просто различным набором коэффициентов разложения. Этот прием был успешно использован нами в предыдущих статьях (Витязев, Цветков [8, 9]), в которых использовалось следующее представление параллаксов:

$$\pi(l, b) = \sum_{nkp} \pi_{nkp}\, K_{nkp}(l, b), \tag{4}$$

где сферические функции имеют вид

$$K_{nkp}(l,b) = R_{nk} \left\{ \begin{array}{lll} P_{n,0}(b), & k=0, & p=1; \\ P_{nk}(b)\sin kl, & k\neq 0, & p=0; \\ P_{nk}(b)\cos kl, & k\neq 0, & p=1, \end{array} \right. \tag{5}$$

$$R_{nk} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\frac{2(n-k)!}{(n+k)!}}, & k>0; \\ 1, & k=0. \end{array} \right. \tag{6}$$

В формуле (5) через l и b обозначены соответственно долгота и широта точки на сфере ($0 \le l \le 2\pi$; $-\pi/2 \le b \le \pi/2$); через $P_{nk}(b)$ — полиномы Лежандра (при $k=0$) и присоединенные функции Лежандра (при $k>0$).

Для удобства часто вводят линейную нумерацию функций $\mathbf{V}_{nkp}$ одним индексом j, где

$$j = n^2 + 2k + p - 1. \tag{7}$$

Введенные функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\iint\limits_{\Omega} (K_i \cdot K_j)\, d\omega = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & i\neq j; \\ 1, & i=j. \end{array} \right. \tag{8}$$

Другими словами, набор функций K_{nkp} образует на сфере ортонормированную систему функций.

Будем в дальнейшем обозначать через МСП метод среднего параллакса, в котором выполняется совместное решении уравнений (1)–(2) при предположении о равенстве параллаксов всех звезд. В результате вместо значений компонентов скорости движения Солнца мы получаем произведения вида $U\hat{\pi}$, $V\hat{\pi}$, $W\hat{\pi}$, где $\hat{\pi}$ — средний параллакс выборки звезд. Очевидно, что в тех случаях, когда параллаксы звезд не являются постоянными, результаты МСП будут отягощены эффектами зависимости параллаксов звезд от координат (Витязев и Цветков [8]).

4. Обобщенный метод среднего параллакса. Нетрудно понять, что метод среднего параллакса соответствует частному случаю представления параллаксов по сферическим функциям (4), когда вместо полного разложения принимается во внимание лишь первый член, то есть гармоника $\pi_{001}\, K_{001}(l,b)$, не зависящая от координат. Распространим метод среднего параллакса и на остальные члены разложения (4). Для этого перепишем уравнения (1)–(2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_l \cos b = & \sum_{nkp} v_{nkp}\phi_{nkp}(l,b) - \omega_1 \sin b \cos l - \omega_2 \sin b \sin l + \omega_3 \cos b - \\ - & M_{13}^{+} \sin b \sin l + M_{23}^{+} \sin b \cos l + M_{12}^{+} \cos b \cos 2l - \\ - & \frac{1}{2} M_{11}^{*} \cos b \sin 2l, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\mu_b = & \sum_{nkp} v_{nkp}\psi_{nkp}(l,b) + \omega_1 \sin l - \omega_2 \cos l - \\ - & \frac{1}{2} M_{12}^{+} \sin 2b \sin 2l + M_{13}^{+} \cos 2b \cos l + M_{23}^{+} \cos 2b \sin l - \\ - & \frac{1}{4} M_{11}^{*} \sin 2b \cos 2l + \frac{1}{2} X \sin 2b, \end{aligned} \tag{10}$$

где введены обозначения

$$\phi_{nkp}(l,b) = \left(\frac{U}{V}\sin(l) - \cos(l)\right) K_{nkp}(l,b), \tag{11}$$

$$\psi_{nkp}(l,b) = \left(\frac{U}{V}\cos(l)\sin(b) + \sin(l)\sin(b) - \frac{W}{V}cos(b)\right) K_{nkp}(l,b). \tag{12}$$

Очевидно, что теперь при решении этих уравнений наряду с кинематическими параметрами ω_1, ω_2, ω_3, M^+_{23}, M^+_{13}, M^+_{12}, M^*_{11}, X мы будем искать значения $v_{nkp} = V\pi_{nkp}$, соответствующие некоторому набору индексов nkp вместо одного индекса (001), когда мы искали значение $v_{001} = V\pi_{001} = 3.545V\hat{\pi}$ в методе среднего параллакса. Заметим, что при отсутствии параллаксов вместо трех компонентов скорости движения Солнца мы можем определить лишь их отношения, входящие в функции (11)–(12). Начальные значения этих отношений берутся из решения уравнений (1)–(2) традиционным методом среднего параллакса, а затем уточняются методом последовательных приближений при решении модификаций уравнений (9)–(10). Такой подход существенно сокращает число неизвестных, то есть, вместо неизвестных $U\pi_{nkp}$, $V\pi_{nkp}$, $W\pi_{nkp}$ мы будем определять только $v_{nkp} = V\pi_{nkp}$. Остальные коэффициенты при этом вычисляются по формулам

$$u_{nkp} = U\pi_{nkp} = \frac{U}{V} v_{nkp}; \quad w_{nkp} = W\pi_{nkp} = \frac{W}{V} v_{nkp}. \tag{13}$$

Будем называть в дальнейшем коэффициенты v_{nkp} и функции $\phi_{nkp}(l,b)$, $\psi_{nkp}(l,b)$ четными или нечетными в зависимости от четности индекса n. В этом смысле множество функций (11)–(12) можно разбить на два подмножества. Первое из них, состоящее из четных функций, обладает свойством ортогональности ко всем базисным функциям модели Огородникова—Милна (1)–(2).

В работе Витязева и Цветкова [8] было показано, что при проведении решения МСП четные коэффициенты u_{nkp}, v_{nkp}, w_{nkp} описывают влияние неравномерности распределения параллаксов по небесной сфере на определение величин $U\hat{\pi}$, $V\hat{\pi}$, $W\hat{\pi}$ и, следовательно, на определение координат апекса движения Солнца. В свою очередь, нечетные коэффициенты оказывают влияние только на параметры $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, M^+_{23}, M^+_{13}, M^+_{12}, M^*_{11}, X.

К сожалению, полный набор нечетных коэффициентов разложения параллаксов и полный набор параметров модели Огородникова—Милна (без солнечных членов) получить невозможно по той причине, что функции первого порядка $\phi_{nkp}(l,b)$, $\psi_{nkp}(l,b)$ $(n = 1)$ являются линейными комбинациями базисных функций уравнений (1)–(2). По этой причине уравнения (9)–(10) можно решить только после уменьшения числа определяемых параметров. Это можно сделать несколькими способами. Первый заключается в исключении коэффициентов v_{101}, v_{110}, v_{111}. В этом случае эти уравнения приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\mu_l \cos b = \quad & \sum_{n\neq 1,k,p} v_{nkp}\phi_{nkp}(l,b) - \hat{\omega}_1 \sin b \cos l - \hat{\omega}_2 \sin b \sin l + \hat{\omega}_3 \cos b - \\ - \quad & \hat{M}^+_{13} \sin b \sin l + \hat{M}^+_{23} \sin b \cos l + \hat{M}^+_{12} \cos b \cos 2l - \\ - \quad & \frac{1}{2}\hat{M}^*_{11} \cos b \sin 2l,\end{aligned} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}\mu_b = \quad & \sum_{n\neq 1,k,p} v_{nkp}\psi_{nkp}(l,b) + \hat\omega_1 \sin l - \hat\omega_2 \cos l - \\
- \quad & \frac{1}{2}\hat M^+_{12} \sin 2b \sin 2l + \hat M^+_{13} \cos 2b \cos l + \hat M^+_{23} \cos 2b \sin l - \\
- \quad & \frac{1}{4} M^*_{11} \sin 2b \cos 2l + \frac{1}{2} X \sin 2b.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Определяемые из этих уравнений параметры модели Огородникова—Милна будут отягощены влиянием отброшенных гармоник с коэффициентами v_{101}, v_{110}, v_{111} в соответствии с соотношениями

$$
\begin{bmatrix} \hat\omega_3 \\ \hat M_{12} \\ \hat\omega_2 \\ \hat M_{13} \\ \hat\omega_1 \\ \hat M_{23} \\ \hat M^*_{11} \\ \hat X \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \omega_3 \\ M_{12} \\ \omega_2 \\ M_{13} \\ \omega_1 \\ M_{23} \\ M^*_{11} \\ X \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0.245\frac{U}{V} & -0.245 \\
0 & -0.245\frac{U}{V} & -0.245 \\
-0.245\frac{U}{V} & 0 & 0.245\frac{W}{V} \\
-0.245\frac{U}{V} & 0 & -0.245\frac{W}{V} \\
0.245 & -0.245\frac{W}{V} & 0 \\
-0.245 & -0.245\frac{W}{V} & 0 \\
0 & 0.489 & -0.489\frac{U}{V} \\
-0.486\frac{W}{V} & 0.243 & 0.243\frac{U}{V}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_{101} \\ v_{110} \\ v_{101} \end{bmatrix}. \tag{16}
$$

Существует и другая модификация уравнений (9)–(10). Она основана на исключении из числа неизвестных параметров модели Огородникова—Милна, описывающих кинематику в плоскостях, перпендикулярных основной плоскости Галактики. Уравнения этой модели имеют вид

$$
\mathcal{K}\mu_l \cos b = \sum_{nkp} v_{nkp}\phi_{nkp}(l,b) + \omega_3 \cos b + M^+_{12} \cos b \cos 2l - \frac{1}{2} M^*_{11} \cos b \sin 2l, \tag{17}
$$

$$
\mathcal{K}\mu_b = \sum_{nkp} v_{nkp}\psi_{nkp}(l,b) - \frac{1}{2} M^+_{12} \sin 2b \sin 2l - \frac{1}{4} M^*_{11} \sin 2b \cos 2l + \frac{1}{2} X \sin 2b. \tag{18}
$$

В этом случае все нечетные коэффициенты v_{npk} и параметры модели Огородникова—Милна ω_3, M^+_{12}, M^*_{11}, X окажутся отягощенными значениями отброшенных параметров ω_2, M^+_{13}, ω_1, M^+_{23}.

Таким образом, задача кинематического анализа собственных движений звезд при отсутствии сведений об их параллаксах сводится к решению уравнений (14)–(15) или (17)–(18). В каждом случае алгоритм получения указанных величин состоит из следующей последовательности действий.

1. По взятой выборке звезд проводится МСП-решение уравнений (1)–(2). С помощью полученных значений (U), (V), (W) оцениваются начальные значения отношений
$$\frac{U}{V} = \frac{(U)}{(V)}; \quad \frac{W}{V} = \frac{(W)}{(V)}.$$
Эти значения отягощены ходом параллаксов по небесной сфере. Устранение этих влияний делается итеративно (пп. 2–4).

2. Проводится итерационное решение уравнений (14)–(15) или (17)–(18).

В первой итерации используются значения U/V, W/V, взятые из п. 1; потом, в процессе итераций, они вычисляются в п. 4. По формулам (19) для всех используемых индексов вычислим значения u_{nkp} и w_{nkp}:

$$u_{nkp} = U\pi_{nkp} = \frac{U}{V} v_{nkp}; \qquad w_{nkp} = W\pi_{nkp} = \frac{W}{V} v_{nkp}. \tag{19}$$

3. Теперь, используя полученные в п. 1 значения (U), (V), (W), найдем (Витязев и Цветков [8]):

$$\hat{W} = (W) + (0.109u_{211} + 0.109v_{210} + 0.126w_{201}); \tag{20}$$

$$\hat{V} = (V) + (0.109u_{220} - 0.063v_{201} - 0.109v_{221} + 0.109w_{210}); \tag{21}$$

$$\hat{U} = (U) + (0.109u_{221} - 0.063u_{201} + 0.109v_{220} + 0.109w_{211}). \tag{22}$$

4. С помощью (20)–(22) получим улучшенные значения отношений

$$\frac{U}{V} = \frac{\hat{U}}{\hat{V}}; \quad \frac{W}{V} = \frac{\hat{W}}{\hat{V}}.$$

5. Повторяем пункты 2–4 до тех пор, пока не будет достигнута разумная сходимость значений U/V, W/V.

Мы видим, что решение уравнений (14)–(15) методом итераций позволяет определить:

- свободные от влияния параллактических коэффициентов значения отношений U/V, W/V, через которые определяются координаты апекса Солнца:

$$L = \operatorname{arctg}\left(\frac{V}{U}\right); \quad B = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{W}{V}}{\sqrt{1 + (\frac{U}{V})^2}}\right); \tag{23}$$

- с точностью до множителя V коэффициенты разложения параллаксов по сферическим функциям $v_{nkp} = V\pi_{nkp}$ при $n = 0, 2, 3, 4$;

- линейные комбинации параметров модели Огородникова—Милна (16) и нечетных параллактических коэффициентов $v_{101}, v_{110}, v_{111}$.

Очевидно, что при решении нашим методом итераций уравнений (17)–(18) мы получим те же самые значения отношений U/V, W/V и координат апекса Солнца, что и при решении уравнений (14)–(15). Кроме того, мы получим полный набор параллактических коэффициентов при $n = 0, 1, 2, 3, 4$ и кинематические параметры ω_3, M^+_{12}, M^*_{11}, X. Однако, как уже было сказано выше, все нечетные коэффициенты v_{npk} и параметры модели Огородникова—Милна ω_3, M^+_{12}, M^*_{11}, X окажутся отягощенными значениями отброшенных параметров ω_2, M^+_{13}, ω_1, M^+_{23}.

Отметим, что именно уравнения (17)–(18) использовались в работе [7]. Мы видим, что при исключении из кинематических параметров эффектов распределения параллаксов по сфере уравнения (17)–(18) не имеют явных преимуществ перед уравнениями полной модели (14)–(15).

5. Тестирование алгоритма. Проверка работы нашего алгоритма была сделана с помощью двух искусственных каталогов. Имея в виду то, что при использовании реальных каталогов собственные движения звезд будут осредняться по некоторым площадкам небесной сферы, мы построили искусственные каталоги для координат 428 центров сферических трапеций, полученных делением экватора и меридиана соответственно на 24 и 18 частей. Для первого каталога в этих точках были вычислены модельные собственные движения, соответствующие следующим значениям параметров уравнений (14), (15), (16):

$U = 9, V = 17, W = 7, \;\; \omega_3 = -14, M_{12}^+ = 14,$

$\omega_2 = -4, M_{13}^+ = -1.3, \;\; \omega_1 = -0.7, M_{23}^+ = 1, \; M_{11}^* = -10, X = 10,$

$\pi_{001} = 35, \pi_{201} = 7, \pi_{220} = 5, \pi_{221} = 5, \pi_{320} = 7, \pi_{321} = 7$. Все остальные коэффициенты формулы (4) были положены равными нулю.

Соответственно для второго каталога, при обработке которого использовались уравнения (17), (18), был взят следующий набор значений:

$U = 9, V = 17, W = 7, \;\; \omega_3 = -14, M_{12}^+ = 14,$

$\omega_2 = 0, M_{13}^+ = 0, \;\; \omega_1 = 0, M_{23}^+ = 0, \; M_{11}^* = -10, X = 10,$

$\pi_{001} = 35, \; \pi_{101} = 4, \; \pi_{110} = 4, \; \pi_{111} = 4,$

$\pi_{201} = 7, \; \pi_{220} = 5, \; \pi_{221} = 5, \; \pi_{320} = 7, \; \pi_{321} = 7$. Все остальные коэффициенты формулы (4) были положены равными нулю.

Заданным компонентам скорости движения Солнца соответствуют координаты апекса

$$L = 62^\circ.103; \quad B = 19^\circ.997. \tag{24}$$

Для имитации ошибок к искусственным собственным движениям прибавлялись нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и со среднеквадратичной ошибкой $6\cos(b)$ км $\cdot$ с$^{-1}$ $\cdot$ кпк$^{-1}$ по долготе и $\sigma =$ 6 км $\cdot$ с$^{-1}$ $\cdot$ кпк$^{-1}$ по широте. С учетом осреднения собственных движений по выбранным площадкам (приблизительно 30 звезд на одну площадку) это соответствует точности собственных движений звезд в случайном отношении на уровне 7 мсд в год.

Приведем результаты численных экспериментов. Для наших двух каталогов стандартные МНК-решения уравнений (1)–(2) при $\pi(l, b) = 1$ и результаты, полученные методом итераций, показаны в таблице 1. Начальные значения отношений U/V; W/V, вычисленные по данным таблицы 1, результаты их уточнений методом итераций, а также отвечающие им галактические координаты L и B апекса движения Солнца среди звезд показаны в таблицах 2 и 3. Результаты восстановления параллактических коэффициентов v_{nkp}/V показаны в таблице 4. Эти таблицы показывают, во-первых, степень искажения заданных значений кинематических параметров за счет проникновения коэффициентов разложения параллаксов по сферическим функциям в результаты МСП. Во-вторых, в этих таблицах видны результаты исправления указанных искажений с помощью нашего метода итераций.

Подводя итог численным экспериментам, можно сказать, что совпадение (в пределах среднеквадратичных ошибок) заданных координат апекса Солнца со значениями, полученными методом итераций, свидетельствует о надежности нашего метода. Кроме того, эти результаты надежно фиксируют смещение апекса Солнца на 4.2 градуса по долготе и на 2.2 градуса по широте для обоих искусственных каталогов. Результаты восстановления параллактических коэффициентов v_{nkp}/V, показанные в таблице 4, также говорят о том, что наш метод способен воспроизводить относи-

Таблица 1. **Численные эксперименты.**
Заданные и восстановленные значения параметров уравнений (14)–(15).
Единицы измерения: U, V, W — км/с, остальные параметры — км/с/кпк

		Первый каталог		Второй каталог	
Параметры	Заданные значения	МСП	Метод итераций	МСП	Метод итераций
U	9	$78,8 \pm 2,7$	–	79.0 ± 2.7	–
V	17	$179,5 \pm 2,7$	–	180.3 ± 2.7	–
W	7	$62,3 \pm 2,7$	–	63.1 ± 2.7	–
ω_3	-14	$-13,8 \pm 2,7$	$-14,0 \pm 0,3$	-21.5 ± 2.7	-13.9 ± 0.8
M_{12}^{+}	14	$19,5 \pm 3,5$	$13,0 \pm 0,5$	-5.2 ± 3.5	13.8 ± 1.0
ω_2	-4	$-4,3 \pm 2,7$	$-4,0 \pm 0,3$	-2.1 ± 2.7	–
M_{13}^{+}	-1.3	$24,3 \pm 3,5$	$-0,6 \pm 0,5$	10.0 ± 3.4	–
ω_1	-0.7	$-0,4 \pm 2,7$	$-0,4 \pm 0,3$	10.0 ± 2.7	–
M_{23}^{+}	1,	$-6,8 \pm 3,5$	$0,9 \pm 0,5$	-31.3 ± 3.4	–
M_{11}^{*}	-10	$3,07 \pm 6,9$	$-10,1 \pm 1,0$	19.3 ± 6.9	-9.8 ± 1.9
X	10	$1,44 \pm 6,0$	$11,6 \pm 0,8$	22.6 ± 6.0	10.5 ± 1.2

Таблица 2. **Численные эксперименты (первый каталог).**
Значения отношений U/V, W/V и галактические координаты L, B
апекса движения Солнца (градусы)

Метод	U/V	W/V	Долгота L	Широта B
МСП	0.439 ± 0.016	0.347 ± 0.016	66.299 ± 0.769	17.627 ± 0.769
Метод итераций	0.530 ± 0.018	0.408 ± 0.017	62.076 ± 0.805	19.824 ± 0.774
Точные значения	0.529 ± 0	0.412 ± 0	62.103 ± 0	19.997 ± 0

Таблица 3. **Численные эксперименты (второй каталог).**
Значения отношений U/V, W/V и галактические координаты L, B
апекса движения Солнца (градусы)

Метод	U/V	W/V	Долгота L	Широта B
МСП	0.438 ± 0.016	0.350 ± 0.016	66.347 ± 0.769	17.776 ± 0.768
Метод итераций	0.529 ± 0.018	0.408 ± 0.017	62.121 ± 0.806	19.832 ± 0.774
Точные значения	0.529 ± 0	0.412 ± 0	62.103 ± 0	19.997 ± 0

Таблица 4. **Численные эксперименты (первый и второй каталоги).**
Заданные и статистически значимые (по критерию «3 сигма»)
восстановленные значения коэффициентов разложения параллаксов
по сферическим функциям. Единицы измерения: км/с/кпк

π_{nkp}	Заданные значения	v_{nkp}/V	Заданные значения	v_{nkp}/V
	Первый каталог		Второй каталог	
π_{001}	35	$34,850 \pm 0,071$	35	35.142 ± 0.075
π_{201}	7	$7,078 \pm 0,063$	7	6.852 ± 0.065
π_{220}	5	$4,933 \pm 0,079$	5	5.079 ± 0.083
π_{221}	5	$5,035 \pm 0,072$	5	4.949 ± 0.075
π_{101}	0	–	4	3.992 ± 0.065
π_{110}	0	–	4	3.994 ± 0.180
π_{111}	0	–	4	3.983 ± 0.169
π_{320}	7	$7,011 \pm 0,065$	7	7.065 ± 0.068
π_{321}	7	$6,985 \pm 0,063$	7	7.050 ± 0.065

тельные изменения параллаксов в различных участках небесной сферы при полном отсутствии информации о самих параллаксах.

Следует особо подчеркнуть, что в этих примерах мы сознательно положили равными нулю значения нечетных коэффициентов первого порядка $v_{101}, v_{110}, v_{111}$ (первый каталог) и значения кинематических параметров в плоскостях, перпендикулярных основной плоскости Галактики, ω_1, ω_2, M_{23}^+, M_{13}^+ (второй каталог). Это позволило не только исправить значения координат апекса Солнца, но и полностью восстановить заданные величины параметров модели Огородникова—Милна. Вполне понятно, что в реальных случаях, когда мы не можем гарантировать равенство нулю указанных параметров, наш метод ограничивает свои возможности только исправлением координат апекса Солнца и получением с точностью до значения компоненты скорости V коэффициентов представления параллаксов по сферическим функциям при $n = 0, 2, 3, 4$.

6. Заключение. Как уже было сказано, предлагаемый нами метод кинематического анализа собственных движений звезд был разработан для получения параметров поля скоростей, свободных от искажений, возникающих от систематического хода параллаксов звезд по небесной сфере. Действительно, при моделировании хода параллаксов по координатам с помощью сферических функций наш метод позволил получить точные значения координат апекса движения Солнца, а также оценить кинематические параметры модели Огородникова—Милна с точностью до трех параллактических коэффициентов первого порядка.

Интересной особенностью этого метода является то, что он позволяет построить в галактической системе координат форму фигуры, поверхность которой описывает отличия распределения параллаксов от сферы, соответствующей среднему параллаксу изучаемой выборки звезд. Особо подчеркнем, что все это делается при полном отсутствии сведений о параллаксах звезд. Основным источником информации о параллаксах здесь являются «солнечные члены» собственных движений звезд, которые формируются произведениями параллаксов на компоненты скорости движения Солнца относительно центроида звезд.

Литература

1. *ESA*. The Hipparcos and Tycho Catalogues 1997 // ESA SP-1200.
2. *Zacharias N., Finch C. T., Girard T. M. et al.* The Fourth US Naval Observatory Astrograph Catalog (UCAC4) // Astronomical Journal. 2013. Vol. 145. Issue 2, 44. doi:10.1088/0004-6256/145/2/44
3. *Roeser S. et al.* // The Astronomical Journal. 2010. Vol. 139. Issue 6. P. 2440–2447,
4. *Williams E., Vyssotsky A. N.* // The Astronomical Journal. 1947. Vol. 53. P. 58.
5. *Oort J. H.* // Colloq. Intern. Centre Natl., Rech. Sci. (Paris), 1950. Vol. XXV. P. 55.
6. *Fricke, (W. Fricke)* // The Astronomical Journal. 1967. Vol. 72, Issue 10. P. 1355.
7. *Olling R. P., Dehnen W.* // The Astrophysical Journal. 2003. Vol. 599. Issue 1. P. 275–296.
8. *Витязев В. В., Цветков А. С.* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 2. С. 138–146.
9. *Vityazev V., Tsvetkov A.* // Astron. Let. 2014. Vol. 40, N 1. P. 46–58.
10. *Vityazev V., Tsvetkov A.* // Astron. Let. 2009. Vol. 35, N 2. P. 100–113.
11. *Vityazev V., Tsvetkov A.* // Astron. Let. 2012. Vol. 38, N 7. P. 411–427.
12. *Огородников К. Ф.* Динамика звездных систем. М.: Физматгиз, 1965.
13. *du Mont B. A.* // Astron. Astrophys. 1977. Vol. 61, N 1. P. 127–132.
14. *Miyamoto M., Soma M., Yokoshima M.* // The Astronomical Journal. 1993. Vol. 105. P. 2138.

Статья поступила в редакцию 24 октября 2013 г.

Сведения об авторах

Витязев Вениамин Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; vityazev@list.ru

Цветков Александр Станиславович — кандидат физико-математических наук, доцент; A.S.Tsvetkov@inbox.ru

KINEMATICAL ANALYSIS OF PROPER MOTIONS INDEPENDENT OF THE SYSTEMATIC DRIFT OF PARALLAXES ON THE SKY

Veniamin V. Vityazev, Alexander S. Tsvetkov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; vityazev@list.ru, A.S.Tsvetkov@inbox.ru

The paper deals with the particular features of the kinematical analysis of proper motions when the parallaxes are unavailable and the Solar motion can not be removed from proper motions. Our approach is based on representation of parallaxes on the set of spherical harmonics. We propose a method of calculating the kinematic parameters of the stellar velocity field which ignores the systematic drift of parallaxes on the sky. The numerical simulations gave evidence that our method is able to get precise values of the Solar apex coordinates and to evaluate the kinematical parameters of the 3-D Ogorodnikov—Milne model up to the three first order coefficients of the parallaxes expansion on a set of the spherical functions.

A remarkable feature of the proposed method is the possibility to construct the shape of the figure which is formed by deviations of parallaxes from the sphere corresponding to the average parallaxes of the stars under consideration. It is worthwhile to underline that all this is done when the values of parallaxes are completely unavailable. Here, the information comes from the "Solar terms" of proper motions which are generated by the products of the parallaxes and the Solar motion components with respect to the centroid of the stars. Refs 14. Tables 4.

Keywords: astrometry, stellar kinematics, proper motions, spherical harmonics.