

МОДЕЛИ ГАЛАКТИК СО ШТЕККЕЛЕВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А. О. Громов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Предлагается новое семейство ротационно-симметричных моделей распределения масс в гравитирующих звездных системах. Потенциал этого семейства относится к типу потенциала Штеккеля, допускающего разделение переменных в уравнении Гамильтона—Якоби в эллиптических координатах. Методы построения таких моделей звездных систем были разработаны Г. Г. Кузминым. Потенциал в экваториальной плоскости совпадает со сферическим обобщенно-изотермическим потенциалом, предложенным Г. Г. Кузминым, Ю.-И. К. Велтманном, П. Л. Теньесом. Построены графики распределения плотности в экваториальной плоскости и на оси симметрии, а также эквиденситы. Рассмотрены некоторые предельные случаи модели. Исследована асимптотика плотности на периферии. Библиогр. 11 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: модели галактик, распределение масс, третий интеграл движения, штеккелевский потенциал.

Введение. Численные методы применяются во многих разделах математики и астродинамики. Актуальность данной работы в том, что в ней представлены модели звездных систем, построенные аналитически.

Чаще всего удается определить потенциал лишь в экваториальной плоскости. Задача обобщения его на все пространство является важной и интересной. Неявно способ такого продолжения был получен Г. Г. Кузминым в его работах о третьем квадратичном интеграле. Кроме того, предположение о существовании такого интеграла позволяет объяснить наблюдаемую в окрестности Солнца трехосность эллипсоида скоростей.

В данной работе ставится задача построения модели распределения пространственной плотности в звездных системах. Полученные результаты в последствии можно применить для построения фазовых моделей, но в данной работе такая задача не ставилась.

Следуя Г. Г. Кузмину [1], будем полагать существование в рассматриваемых моделях третьего квадратичного по скоростям интеграла движения в виде

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2v_\theta^2 + z_0^2(v_z^2 - 2\Phi^*),$$

где R, z — цилиндрические координаты, v_R, v_θ, v_z — компоненты скорости в цилиндрической системе координат, z_0 — постоянная с размерностью длины, а функция Φ^* связана с потенциалом Φ следующим образом:

$$\begin{cases} z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} = z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \end{cases} \quad (1)$$

Третий квадратичный интеграл движения, как и любой другой, накладывает ограничения на потенциал. Они являются условием разрешимости системы (1) и представляются в виде

$$3 \left(z \frac{\partial \Phi}{\partial R} - R \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - (R^2 + z_0^2 - z^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} + Rz \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2)$$

Для дальнейших преобразований удобно перейти к эллиптическим координатам $\xi_1 \in [1; \infty)$, $\xi_2 \in [-1; 1]$ по формулам

$$R = z_0 \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = z_0 \xi_1 \xi_2. \quad (3)$$

Тогда условие (2) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} [(\xi_1^2 - \xi_2^2) \Phi] = 0,$$

откуда

$$\Phi = \frac{\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)}{\xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad (4)$$

где функция φ выбирается так, чтобы выполнялись условия неотрицательности плотности и конечности массы.

Г. Г. Кузминым было показано, что такие модели применимы к реальным звездным системам, в частности, к нашей Галактике [1].

Потенциал для рассматриваемых моделей называется штеккелевским, и для него уравнение Гамильтона—Якоби

$$H \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n \right) = h$$

допускает разделение переменных в координатах ξ_1, ξ_2 .

Модели с обобщенно-изотермическим потенциалом. Переходя к построению моделей, о которых упоминалось выше, заметим, что модели с третьим квадратичным интегралом строились ранее Г. Г. Кузминым и Г. А. Маласидзе [2, 3]. Модели, предлагаемые в данной статье представляют собой распространение на несферические системы обобщенно-изотермического потенциала. Некоторые предварительные результаты для предлагаемых ниже моделей были получены в [4–6].

Предположим, что в экваториальной плоскости потенциал предлагаемого в данной статье семейства имеет следующий вид:

$$\Phi = \Phi_0 \ln \left(1 + \frac{\beta}{w(R)} \right), \quad (5)$$

где Φ_0 — масштабный параметр, $\beta \in [0; +\infty)$ — структурный параметр, а функция $w(R)$ определяется как

$$w^2(R) = 1 + \kappa^2 \frac{R^2}{R_0^2}. \quad (6)$$

Здесь κ — структурный, R_0 — масштабный параметры модели. Чтобы ниже рассмотреть случай $\beta \rightarrow \infty$, будем полагать $\kappa^2 = O(\beta^2)$. Для простоты дальнейших вычислений масштабный параметр модели R_0 полагаем равным единице.

Для сферических систем такой потенциал предложили Г. Г. Кузмин, Ю.-И. К. Велтманн и П. Л. Теньес [7] и назвали его обобщенно-изотермическим.

Для определения функции φ воспользуемся соотношениями, предложенными В. И. Родионовым [8]. Для обобщенно-изотермического потенциала имеем

$$\varphi(\xi) = \xi^2 \Phi_0 \ln X, \quad (7)$$

$$X = 1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}}. \quad (8)$$

Зная φ , можно получить выражение для пространственной плотности. Для этого воспользуемся формулами, приведенными в [1], которые получаются подстановкой выражения (4) в уравнение Пуассона. Для обобщенно-изотермического потенциала имеем

$$4\pi G\rho = \Phi_0 \left(\frac{-2\frac{\Phi}{\Phi_0}(2 - \xi_1 - \xi_2) + \mu(\xi_1) + \mu(\xi_2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2} + 2\frac{(\nu(\xi_1) - \nu(\xi_2))(2 - \xi_1 - \xi_2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^3} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \mu(\xi) &= (\xi^2 - 1) [A_1 + A_2 + A_3], \\ A_1 &= 2 \ln X, \\ A_2 &= -\frac{5\xi^2 \beta \kappa^2 z_0^2 (1 - \kappa^2 z_0^2) - 2\xi^4 \beta \kappa^4 z_0^4}{(1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1))^{5/2} \cdot X}, \\ A_3 &= -\frac{\xi^4 \beta^2 \kappa^4 z_0^4}{(1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1))^3 \cdot X^2}, \\ \nu(\xi) &= \frac{\xi^4 \beta \kappa^2 z_0^2}{(1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1))^{3/2} \cdot X}. \end{aligned}$$

В ходе выполнения работы были получены некоторые графики. Полагалось, что $\Phi_0 = 1$ и $\kappa = \beta$.

Пусть ρ_0 — величина центральной плотности при значениях параметров $\beta = 1$ и $z_0 = 1.5$. Представленные на графиках значения плотности будем выражать в единицах ρ_0 .

На рис. 1 показаны эквиденситы для различных значений параметров β и z_0 . Можно видеть, что с увеличением значения β происходит растяжение графика по оси z , а с ростом z_0 — увеличение графика по оси R . Отсюда можно судить о том, как влияют значения параметров на сплюснутость модели.

На рис. 2 представлен ход плотности в экваториальной плоскости.

На рис. 3 приведены графики изменения плотности на оси симметрии. Заметим, что в силу неопределенностей вида $0/0$, которые возникают при построении данных графиков, удобно воспользоваться формулой для плотности на оси симметрии, предложенной В. И. Родионовым [9]. Было проделано сравнение такого хода плотности с экспоненциальным и барометрическим законом. На малых расстояниях ход плотности убывает быстрее, а на больших быстрее убывают уже объявленные выше функции. В целом ход плотности на оси симметрии вполне может аппроксимироваться экспоненциальным законом.

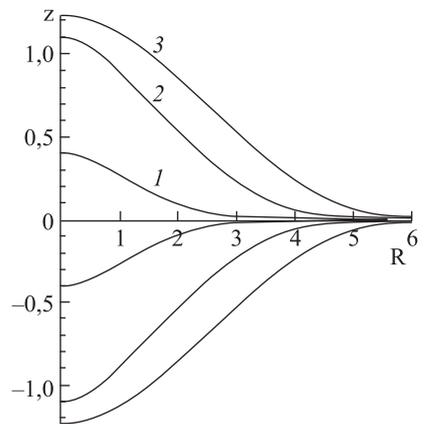
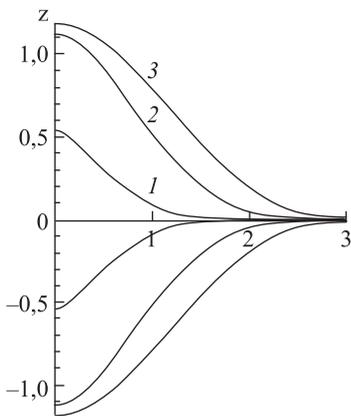


Рис. 1. Эквиденситы; значения параметров $z_0 = 1.5$, $\beta = 2$ (слева) и $z_0 = 3$, $\beta = 1$ (справа); для кривых 1 — $\rho = 0.3\rho_0$, 2 — $\rho = 0.1\rho_0$, 3 — $\rho = 0.05\rho_0$.

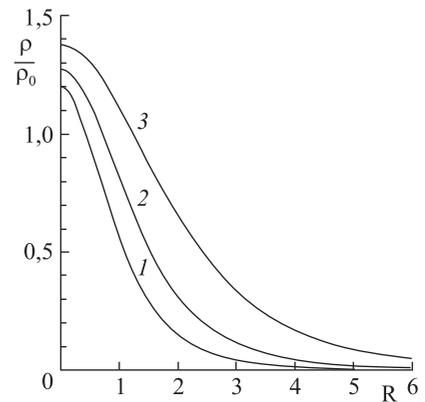
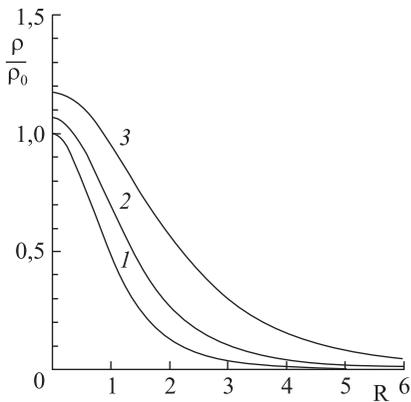


Рис. 2. Ход плотности в экваториальной плоскости; параметр $\beta = 1$ (слева) и $\beta = 2$ (справа); 1 — $z_0 = 1.5$, 2 — $z_0 = 2$, 3 — $z_0 = 3$.

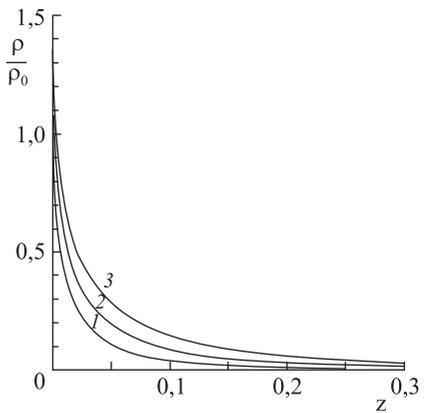
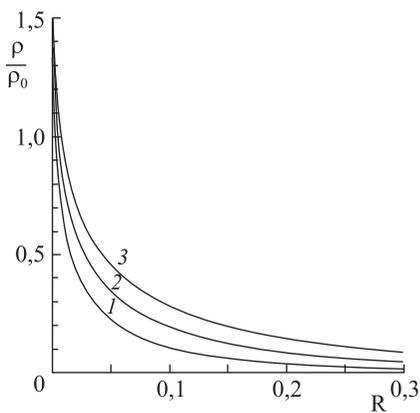


Рис. 3. Ход плотности на оси симметрии; параметр $z_0 = 1.5$ (слева) и $z_0 = 3$ (справа); 1 — $\beta = 1$, 2 — $\beta = 2$, 3 — $\beta = 3$.

Заметим, что в экваториальной плоскости и на оси симметрии функция плотности монотонно убывает и нигде не принимает отрицательных значений, что физически правдоподобно.

Перейдем далее к исследованию поведения функции плотности на бесконечном удалении от центра. Все дальнейшие рассуждения будем проводить в экваториальной плоскости, поэтому эллиптическая координата $\xi_2 = 0$. Тогда из формулы, приведенной в [1], получаем выражение для плотности в экваториальной плоскости в виде

$$4\pi G\rho = 2 \frac{(\varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi))(2 - \xi^2)}{\xi^6} - \frac{(\xi^2 - 1)\varphi''(\xi)}{\xi^4}. \quad (9)$$

Будем опускать нижний индекс у координаты ξ_1 . Кроме того, в приведенной формуле учитывалось, что $\varphi(0) = 0$. Это непосредственно видно из выражения (7).

В [8] в правой части выражения, аналогичного соотношению (9), стоит еще член $-\varphi''(0)/\xi^4$. Для рассматриваемой модели $\varphi''(0)$ не существует. Повторяя выкладки [8] и не забывая, что исследуется поведение плотности при бесконечно больших ξ , вместо него получаем $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^4 \varphi''(\xi)$. Учитывая равенство $\varphi(0) = 0$ и проводя соответствующие выкладки, можно убедиться, что для данной модели этот предел обращается в нуль.

Из (3), полагая $\xi_2 = 0$, получаем, что

$$R^2 = z_0^2 (\xi^2 - 1), \quad (10)$$

откуда видно, что $\xi = O(R)$. Это соотношение пригодится в дальнейшем.

Теперь переходим к исследованию выражения для плотности рассматриваемого обобщенно-изотермического потенциала в экваториальной плоскости. Для этого подставляем (7) в (9) и устремляем R , а по (10) и ξ , к бесконечности. Получаем следующее равенство:

$$\frac{4\pi G}{\Phi_0} \cdot \rho = \frac{2 \cdot (2 - \xi^2)}{\xi^6} \cdot [B_1 + B_2] - \frac{(\xi^2 - 1)}{\xi^4} \cdot [C_1 - C_2 - C_3],$$

где

$$B_1 = -\xi^2 \ln \left(1 + \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}} \right),$$

$$B_2 = \frac{\xi^4 \beta \kappa^2 z_0^2}{(1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1))^{3/2} \left(1 + \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}} \right)},$$

$$C_1 = 2 \ln \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}} \right),$$

$$C_2 = \frac{2\xi^4 \beta \kappa^4 z_0^4}{(1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1))^{5/2} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}} \right)},$$

$$C_3 = \frac{\xi^4 \beta^2 \kappa^4 z_0^4}{(1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1))^3 \left(1 + \frac{\beta}{1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)} \right)^2}.$$

Используя разложение в ряд Тейлора

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{4\pi G}{\Phi_0} \cdot \rho \sim \frac{2}{\xi^6} \cdot \left(-\xi \cdot \frac{\beta}{\kappa z_0} + \frac{\beta^2}{2\kappa^2 z_0^2} + \xi^2 \cdot o\left(\frac{1}{\xi^2}\right) + \frac{\xi^4}{\xi^3} \cdot \frac{\beta}{\kappa z_0} \right) (2 - \xi^2) - \\ - \frac{(\xi^2 - 1)}{\xi^4} \cdot \left(\frac{2}{\xi} \cdot \frac{\beta}{\kappa z_0} - \frac{\beta^2}{\kappa^2 z_0^2 \xi^2} + o\left(\frac{1}{\xi^2}\right) - \frac{2\xi^4}{\xi^5} \cdot \frac{\beta}{\kappa z_0} - \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{\beta^2}{\kappa^2 z_0^2} \right). \end{aligned}$$

Это эквивалентно $\frac{1}{\xi^4} \cdot \frac{\beta^2}{\kappa^2 z_0^2} + \frac{1}{\xi^2} \cdot o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$. Таким образом, на бесконечности плотность убывает как ξ^{-4} , следовательно по (10) и как R^{-4} . Такой порядок убывания дает в модели конечную массу.

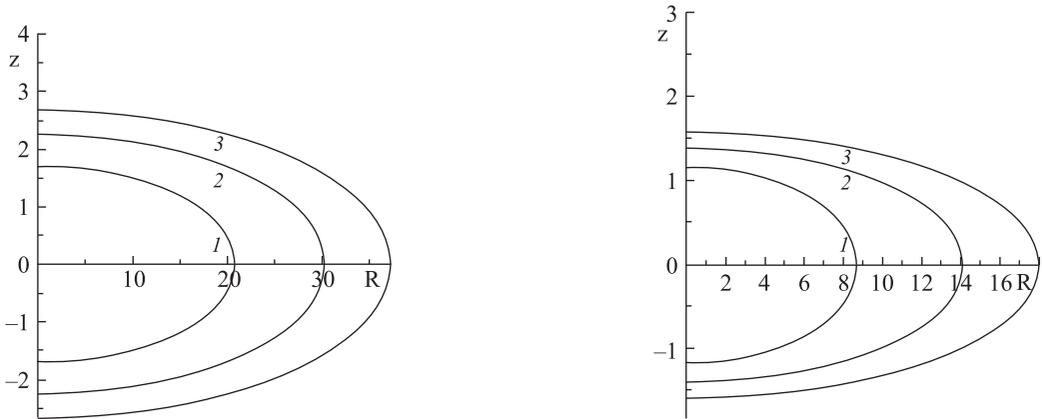


Рис. 4. Эквилиберы для модели Шустера–Пламмера (слева) и модели Яффе (справа); для модели Шустера–Пламмера: 1 – $\rho = 0.3\rho_0$, 2 – $\rho = 0.1\rho_0$, 3 – $\rho = 0.05\rho_0$; для модели Яффе: 1 – $\rho = 0.3\rho_0$, 2 – $\rho = 0.1\rho_0$, 3 – $\rho = 0.05\rho_0$.

Предельные случаи. Перейдем теперь к предельным по значениям параметра β случаям. Для нахождения пространственной плотности будем пользоваться эллиптическими координатами, задаваемыми формулами (3).

При $\beta \rightarrow 0$ получаем несферическое обобщение модели Шустера–Пламмера, потенциал для которой в экваториальной плоскости задается выражением

$$\Phi = \Phi_0 w^{-1}(R),$$

где Φ_0 — значение потенциала в центре модели, и, по-прежнему, $w(R) = (1 + \kappa^2 R^2)^{\frac{1}{2}}$.

По формулам, приведенным в [8], функция $\varphi(\xi)$ определяется следующим образом:

$$\varphi(\xi) = \xi^2 \Phi_0 [1 + \kappa^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Плотность в эллиптических координатах задается как

$$4\pi G \rho = \psi(\xi_2) \cdot \xi_1^{-4},$$

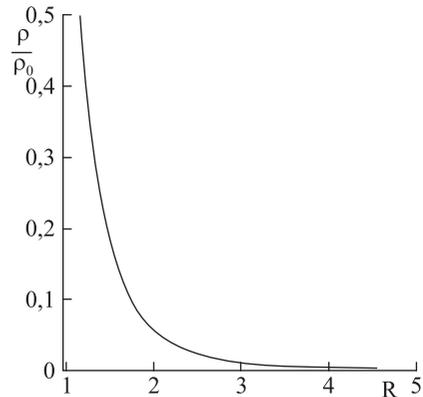
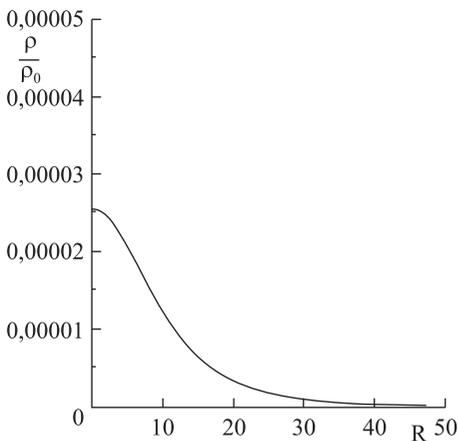


Рис. 5. Ход плотности в экваториальной плоскости для модели Шустера—Пламмера (слева) и модели Яффе (справа).

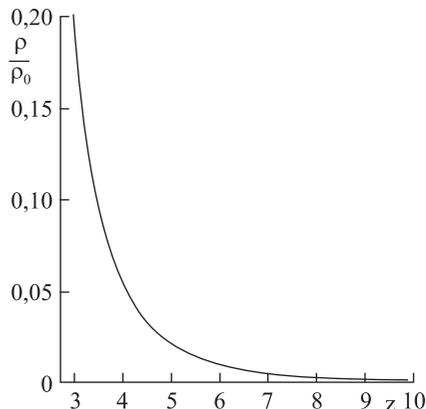
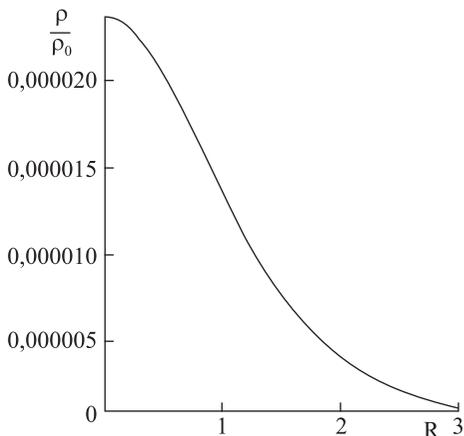


Рис. 6. Ход плотности на оси симметрии для модели Шустера—Пламмера (слева) и модели Яффе (справа).

где

$$\psi = \Phi_0 \frac{2(1 + \kappa)^2 - \xi^2(2 + 3\kappa + \kappa^2) + \xi^4(\kappa - 5\kappa^2) + \xi^6\kappa^2}{(\xi^2 - 1)^2(1 + \kappa(1 - \xi^2))^{\frac{5}{2}}}.$$

При $\beta \rightarrow \infty$ получаем несферическое обобщение модели Яффе с потенциалом в экваториальной плоскости в виде

$$\Phi = \Phi_0 \ln(1 + \lambda^{-1}R^{-1}).$$

Здесь $\lambda = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\kappa}{\beta}$, а Φ_0 — значение потенциала в центре модели.

Функция $\varphi(\xi)$ задается в этом случае выражением

$$\varphi(\xi) = \xi^2 \Phi_0 \ln \left[1 + \lambda^{-1} z_0^{-1} (\xi^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Для плотности такой модели находим

$$4\pi G\rho = \psi(\xi_2) \cdot \xi_1^{-4},$$

где

$$\psi(\xi) = \frac{5\xi^2}{a_1} - \frac{\xi^2}{a_2},$$

$$a_1 = \lambda(1 - \xi^2)^{\frac{7}{2}} \left(1 + \frac{1}{\lambda(1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

$$a_2 = \lambda^2(1 - \xi^2)^4 \left(1 + \frac{1}{\lambda(1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2.$$

Для этих моделей получены графики, позволяющие сравнить их. В обеих моделях приняли $z_0 = 1.5$. В модели Шустера—Пламмера $\Phi_0 = 1$, $\kappa = 1$, а в модели Яффе $\Phi_0 = 1$, $\lambda = 1$.

Заметим, что на рис. 5 и 6 приведены графики только для одних значений параметров β и z_0 . Их влияние на ход плотности такое же, как и в случае обобщенно-изотермического потенциала (рис. 2 и рис. 3).

Заключение. В предложенной работе представлена модель распределения масс в несферических звездных системах.

К достоинствам такой модели можно отнести следующее. За счет предположения о существовании третьего квадратичного интеграла движения эллипсоид скоростей может быть трехосным. Кроме того, тот факт, что потенциал является штеккелевским, позволяет проинтегрировать путем разделения переменных уравнение Гамильтона—Якоби и свести задачу определения звездных орбит к квадратурам.

В зависимости от выбора значения z_0 построенную модель можно применять к системам различной сплюснутости. Кроме того, некоторые структурные характеристики можно менять, задавая параметр β .

К недостаткам отнесем тот факт, что выражения для плотности получаются громоздкими. Возможно, это будет представлять некоторые затруднения в дальнейших исследованиях, например при нахождении спроектированной плотности.

Литература

1. Кузмин Г. Г. Третий интеграл движения звезд и динамика стационарной Галактики // Публикации Тартуской астрономической обсерватории. 1952. Т. 32. С. 332–368.
2. Кузмин Г. Г. Модель стационарной Галактики, допускающая трехосное распределение скоростей // Астрономический журнал. 1956. Т. 33. С. 27–45.
3. Кузмин Г. Г., Маласидзе Г. А. О некоторых моделях распределения массы звездной системы в теории третьего квадратичного интеграла движения // Публикации Тартуской астрофизической обсерватории имени В. Струве. 1987. Т. 52. С. 48–63.
4. Громов А. О. Штеккелевские изотермические модели галактик // Труды XLIII международной конференции аспирантов и студентов факультета ПМ-ПУ СПбГУ «Процессы управления и устойчивость». СПбГУ. Санкт-Петербург, 2012. С. 125–129.
5. Gromov A. O. New quasi-isothermal models of galaxies // Astron. Tsirkulyar. 2012. N 1579.
6. Громов А. О. Новые штеккелевские модели галактик // Известия главной астрономической обсерватории в Пулково. 2013. № 221. С. 129–134.

7. Кузмин Г. Г., Велтманн Ю.-И. К., Теньес П. Л. Квази-изотермические модели сферических звездных систем // Публикации Тартуской астрофизической обсерватории имени В. Струве. 1986. Т. 51. С. 232–242.

8. Родионов В. И. О потенциале в теории третьего квадратичного интеграла движения // Астрофизика. 1975. Т. 11. Вып. 1. С. 145–151.

9. Родионов В. И. О построении моделей звездных систем, допускающих третий квадратичный интеграл движения звезд // Вестн. Ленингр. ун-та. 1974. № 13. С. 142–148.

10. Распопова Н. В. Распределение масс в балдже Галактики // Труды XXXIV научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость». СПбГУ. Санкт-Петербург, 2003. С. 237–239.

11. Rasopova N. V. // The Galactic Bulge Modelling, in Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems. Astron. Society Pacific Conf. Series. Vol. 316. 2004. P. 334–336.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

Громов Анатолий Олегович — студент; granat08@yandex.ru

MODELS OF GALAXIES WITH STÄCKEL'S POTENTIAL

Anatoliy O. Gromov

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; granat08@yandex.ru

In this paper a new family of rotationally symmetric models of mass distribution in a stellar system is proposed. The potential of this family is of Stäckel's type. For this potential a quadratic in the velocity integral of motion exist, hence the velocity distribution in such models can be triaxial. In this paper the generalized isothermal potential is considered and a self-gravitating model has been constructed by Kuzmin G. G. (1956). Equidensities and the density distribution in the equatorial plane and on the axis of symmetry are presented. The limiting cases (when the potential in the equatorial plane corresponds to the models of Schuster—Plummer and Jaffe) are considered. Equidensities and the density run in the equatorial plane and on axis of symmetry are presented. The asymptotes of the density periphery of the model was studied. Refs 11. Figs 6.

Keywords: models of galaxies, mass distribution, third integral of motion, Stäckel's potential.