УДК 52-64 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 2

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ СВЕТОВОМ РЕЖИМЕ В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ ВДАЛИ ОТ ОСЕВОГО ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ

А. К. Колесов, Н. Ю. Кропачева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Рассматривается стационарный и нестационарный перенос монохроматического излучения в бесконечной среде с цилиндрической симметрией. Предполагается, что среда освещена стационарным или мгновенным осевым источником энергии. Среда считается однородной. Она характеризуется объемным коэффициентом поглощения α, альбедо однократного рассеяния λ и анизотропной индикатрисой рассеяния, представимой в виде разложения в конечный ряд по полиномам Лежандра. Принимаются во внимание конечность скорости света и определенная продолжительность процесса рассеяния света.

Исследуется поле излучения на больших оптических расстояниях τ от источников ($\tau \gg 1$). Истинное поглощение света в среде считается малым ($1-\lambda \ll 1$).

Интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения в среде, освещеннной стационарным осевым источником энергии, решается методом Кейза. Получаются асимптотические формулы для средней интенсивности и потока излучения.

Переход от стационарного поля излучения к нестационарному осуществляется при помощи методики, предложенной И. Н. Мининым. Таким путем выводятся асимптотические выражения для указанных выше величин в случае мгновенного осевого источника энергии. Библиогр. 22 назв.

Ключевые слова: перенос излучения, осевой источник энергии, мгновенный источник энергии, поле излучения, асимптотические выражения.

1. Введение. Большинство объектов, изучаемых в астрофизике, можно представить в виде плоских или сферических сред. Теория переноса излучения в таких средах подробно разработана и изложена, например, в книгах [1–4]. Однако некоторые астрофизические объекты (солнечные пятна, аккреционные диски, корональные лучи и др.) имеют аксиальную симметрию. Если их длины значительно больше их толщин, то такие объекты можно описать моделью бесконечно протяженного цилиндра. Поэтому задача о распространении света в средах с цилиндрической симметрией имеет определенный астрофизический интерес. Аналогичная задача, возникающая в теории переноса нейтронов (см., например, [5–8]) представляет интерес и для физики ядерных реакторов.

Разработке точных аналитических методов решения задач переноса с цилиндрической симметрией посвящено сравнительно небольшое число работ. Точное решение задачи о линейном источнике в бесконечной среде с изотропным рассеянием было получено в работе [9]. Н. И. Лалетин в работе [10] нашел элементарные решения уравнения переноса, обладающие цилиндрической симметрией, а в работе [11] построил функцию Грина для поглощающей и изотропно рассеивающей бесконечной однородной среды с цилиндрически симметричным распределением источников. Для случая анизотропного рассеяния соответствующую функцию Грина методом интегральных преобразований получил Б. Д. Абрамов [12]. Д. И. Нагирнер [13] на примере задачи о размножающей среде без источников показал, что изотропное рассеяние в плоском слое, шаре и цилиндре можно описать единым образом.

В работе [14] метод Кейза [8] использовался для разработки теории многократного рассеяния света в цилиндрических поглощающих и анизотропно рассеивающих средах. В случае бесконечной однородной среды с цилиндрически симметричными распределениями источников получены точные аналитические выражения для характеристик поля излучения. В случае однородных сред, ограниченных цилиндрическими поверхностями, характеристики полей излучения выражены через соответствующие величины для бесконечной среды при помощи интегральных соотношений.

В работе Т. А. Гермогеновой и Е. Б. Павельевой [15] рассмотрено характеристическое уравнение, получающееся в задачах о переносе излучения в протяженных цилиндрических областях, а в работе [16] изучена асимптотика решения уравнения переноса излучения в диске большого радиуса с источником в окрестности оси симметрии.

Д. И. Нагирнер [17–19] исследовал процесс переноса излучения в спектральной линии при изотропном рассеянии с полным перераспределением по частоте и без изменения частоты в однородном бесконечном вдоль оси круговом цилиндре с аксиальным распределением внутренних источников излучения. В этих работах, в частности, были получены справедливые при больших значениях оптического радиуса цилиндра асимптотические выражения для ряда характеристик поля излучения, в том числе для собственных значений и собственных функций основного интегрального уравнения переноса излучения.

В настоящей работе методом Кейза исследуется асимптотический световой режим в однородной бесконечной среде, освещенной стационарным или мгновенным линейным источником, на больших оптических расстояниях от этого источника при малом истинном поглощении. Выводятся асимптотические формулы для средней интенсивности и потока излучения.

2. Основные уравнения. Рассмотрим нестационарный перенос излучения в бесконечной однородной поглощающей и анизотропно рассеивающей среде, освещенной мгновенным линейным источником энергии, вспыхивающим в начальный момент времени $t = 0$. Этот источник можно представить в виде множества точечных источников светимости L, непрерывно и равномерно распределенных по оси симметрии с линейной плотностью l.

Оптические свойства среды будем характеризовать коэффициентом поглощения α, вероятностью λ выживания кванта света при элементарном акте рассеяния, средним временем t_1, затрачиваемым квантом непосредственно на акт рассеяния, и средним временем t_2 пребывания кванта в пути между двумя последовательными актами рассеяния. Будем считать, что эти характеристики не зависят от координат точек среды и от времени. Вместо геометрических расстояний r между точками среды и времени t, отсчитываемого от момента вспышки источника, будет использовать оптические расстояния $\tau = \alpha r$ и безразмерное время

$$u = \frac{t}{t_1 + t_2}, \tag{1}$$

а вместо параметров t_1 и t_2 — безразмерные параметры

$$\beta_1 = \frac{t_1}{t_1 + t_2}, \quad \beta_2 = \frac{t_2}{t_1 + t_2}. \tag{2}$$

Индикатрису рассеяния $x(\gamma)$, где γ — угол рассеяния, представим, как обычно (см., например, [2]) в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\cos\gamma)$, т. е.

$$x(\gamma) = \sum_{n=0}^{N} x_n P_n(\cos\gamma). \tag{3}$$

Поле излучения в цилиндрически симметричной среде, освещенной мгновенным линейным источником энергии, определяется оптическим расстоянием τ от этого источника и промежутком безразмерного времени u, протекшего после вспышки. Направление распространения излучения может описываться в двух различных сферических системах координат. В одной из них полярная ось направлена параллельно оси симметрии (см. [5]), а в другой — перпендикулярно этой оси (см. [6]). Полярные и азимутальные углы в первом случае обозначим через $\arccos\xi$ и ψ, а во втором — через $\arccos\mu$ и φ соответственно. Отметим, что указанные сферические системы координат вводятся локально, т. е. в каждой точке луча распространения света. Полная интенсивность излучения $I(\tau,\xi,\psi,u)$ или $I(\tau,\mu,\varphi,u)$, т. е. сумма интенсивности диффузного излучения и интенсивности прямого излучения, приходящего в данную точку среды непосредственно от источника, определяется интегро-дифференциальным уравнением в частных производных.

В первом случае выбора полярных и азимутальных углов это уравнение имеет вид

$$\beta_2\frac{\partial I(\tau,\xi,\psi,u)}{\partial u}+\sqrt{1-\xi^2}\left[\cos\psi\frac{\partial I(\tau,\xi,\psi,u)}{\partial\tau}-\frac{\sin\psi}{\tau}\frac{\partial I(\tau,\xi,\psi,u)}{\partial\psi}\right]+I\left(\tau,\xi,\psi,u\right)- \\ -\frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\psi'\int_{-1}^{1}x(\cos\gamma')d\xi'\int_0^u I\left(\tau,\xi',\psi',u'\right)e^{-\frac{u-u'}{\beta_1}}du'=0, \quad (4)$$

а во втором случае оно записывается в форме

$$\beta_2\frac{\partial I\left(\tau,\mu,\varphi,u\right)}{\partial u}+\mu\frac{\partial I\left(\tau,\mu,\varphi,u\right)}{\partial\tau}+\frac{1-\mu^2}{\tau}\cos^2\varphi\frac{\partial I\left(\tau,\mu,\varphi,u\right)}{\partial\mu}+ \\ +\frac{\mu}{2\tau}\sin 2\varphi\frac{\partial I\left(\tau,\mu,\varphi,u\right)}{\partial\varphi}+ \\ +I\left(\tau,\mu,\varphi,u\right)-\frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-1}^{1}x(\cos\gamma')d\mu'\int_0^u I\left(\tau,\mu',\varphi',u'\right)e^{-\frac{u-u'}{\beta_1}}du'=0. \quad (5)$$

Обратим внимание на то, что в формулах (4) и (5) одной и той же буквой I обозначены различные функции указанных угловых переменных, но имеющие одинаковые значения в каждой точке поля излучения.

Косинус угла рассеяния γ', являющийся аргументом индикатрисы $x(\cos\gamma')$, связан с угловыми переменными направлений падающего (ξ',ψ' или μ',φ') и рассеянного (ξ, ψ или μ, φ) излучения очевидными соотношениями

$$\cos\gamma'=\xi\xi'+\sqrt{(1-\xi^2)(1-\xi'^2)}\cos(\psi-\psi'), \quad (6)$$

$$\cos\gamma'=\mu\mu'+\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}\cos(\varphi-\varphi'). \quad (7)$$

Уравнения переноса (4) и (5) эквивалентны, так как они определяют одну и ту же величину, т. е. интенсивность излучения, но записаны в различных системах координат. Структуру поля излучения целесообразно искать, используя более простое уравнение (4). Но для получения асимптотических выражений для характеристик поля излучения при $\tau\gg 1$ удобнее применить уравнение (5), переходящее при этом условии в соответствующее уравнение для плоской среды.

Эффективным способом решения задач теории нестационарного переноса излучения является применение преобразования Лапласа по времени (см., например, [3, 8]). В результате этого преобразования получается уравнение стационарного переноса, но при этом величины коэффициента поглощения α и оптического расстояния τ умножаются на множитель $1+\beta_2 s$, а величина λ делится на $(1+\beta_1 s)\,(1+\beta_2 s)$, где s — параметр преобразования Лапласа. Решение задачи нестационарного переноса получается при помощи обратного преобразования Лапласа, примененного к полученным характеристикам стационарного поля излучения.

Уравнение стационарного переноса часто решается методом Кейза [8]. Интенсивность излучения представляется в виде суперпозиции собственных функций, т. е. нетривиальных решений однородного уравнения переноса, соответствующих положительным собственным значениям ν и ν_k непрерывного и дискретного спектров. В случае цилиндрически симметричной среды интенсивность излучения $I(\tau,\xi,\psi)$ или $I(\tau,\mu,\varphi)$ записывается в виде

$$I(\tau,\xi,\psi)=\frac{lL}{4\pi^2}\left[\int_0^1\frac{F(\tau,\xi,\psi,\nu)}{N(\nu)}d\nu+\sum_{k=1}^{K}\frac{F(\tau,\xi,\psi,\nu_k)}{N(\nu_k)}\right] \tag{8}$$

или

$$I\,(\tau,\mu,\ \varphi)=\frac{lL}{4\pi^2}\left[\int_0^1\frac{f(\tau,\ \mu,\ \varphi,\nu)}{N(\nu)}d\nu+\sum_{k=1}^{K}\frac{f(\tau,\ \mu,\ \varphi,\nu_k)}{N(\nu_k)}\right], \tag{9}$$

где $F(\tau,\xi,\psi,\nu)$ и $f(\tau,\mu,\varphi,\nu)$ — собственные функции уравнений стационарного переноса излучения, соответствующих уравнениям (4) и (5). В формулах (8) и (9) величины $N(\nu)$ и $N(\nu_k)$ — кейзовские нормировочные интегралы [8], обеспечивающие ортонормированность собственных функций. Число K положительных собственных значений дискретного спектра при не очень сильно вытянутых индикатрисах рассеяния равно единице, а с ростом степени их вытянутости возрастает [20].

Из соотношений между локальными системами координат, в которых используются угловые перемены ξ,ψ и μ,φ, получается связь между собственными функциями $F(\tau,\xi,\psi,\nu)$ и $f(\tau,\mu,\varphi,\nu)$:

$$f\,(\tau,\mu,\varphi,\nu)=F\left(\tau,\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi}{\mu},\nu\right). \tag{10}$$

Отметим, что эти функции нужно подобрать так, чтобы с их помощью можно было построить решение уравнения переноса, стремящееся к нулю при $\tau\to\infty$.

3. Асимптотика стационарного поля излучения в бесконечной среде с цилиндрической симметрией. Как известно [8], в выражения для собственных функций при $\nu>0$ входят быстро убывающие с ростом τ экспоненциальные функции $e^{-\tau/\nu}$. Поэтому при $\frac{\tau}{\nu}\gg 1$ основной вклад в величину интенсивности излучения вносит слагаемое, содержащее собственную функцию, соответствующую наименьшему дискретному собственному значению $\nu_1=\frac{1}{k}$, т. е. $F(\tau,\xi,\psi,\frac{1}{k})$ или $f(\tau,\mu,\varphi,\frac{1}{k})$.

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\sqrt{1-\xi^2}\left[\cos\psi\frac{\partial F(\tau,\xi,\psi,\frac{1}{k})}{\partial\tau}-\frac{\sin\psi}{\tau}\frac{\partial F(\tau,\xi,\psi,\frac{1}{k})}{\partial\psi}\right]+F(\tau,\xi,\psi,\tfrac{1}{k})-$$
$$-\frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\psi'\int_{-1}^{1}x(\cos\gamma')F\left(\tau,\xi',\psi',\tfrac{1}{k}\right)d\xi'=0, \tag{11}$$

$$\mu\frac{\partial f(\tau,\mu,\varphi,\frac{1}{k})}{\partial\tau}+\frac{1-\mu^2}{\tau}\cos^2\varphi\frac{\partial f(\tau,\mu,\varphi,\frac{1}{k})}{\partial\mu}+\frac{\mu}{2\tau}\sin 2\varphi\frac{\partial f(\tau,\mu,\varphi,\frac{1}{k})}{\partial\varphi}+$$
$$+f(\tau,\mu,\varphi,\tfrac{1}{k})-\frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-1}^{1}x(\cos\gamma')f(\tau,\mu',\varphi',\tfrac{1}{k})d\mu'=0. \quad (12)$$

Функцию $F(\tau,\xi,\psi,\frac{1}{k})$ можно представить в виде разложения в ряд Фурье:

$$F\left(\tau,\xi,\psi,\frac{1}{k}\right)=F^0\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)+2\sum_{m=0}^{\infty}F^m\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)\cos m\psi, \quad (13)$$

в котором вследствие цилиндрической симметрии отсутствуют слагаемые, содержащие $\sin m\psi$.

Коэффициенты этого разложения, т. е. функции

$$F^m\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F\left(\tau,\xi,\psi,\frac{1}{k}\right)\cos m\psi\,d\psi \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (14)$$

связаны рекуррентными соотношениями. Действительно, умножая уравнение (11) почленно на $\cos l\psi$ и интегрируя по ψ от 0 до 2π, получаем

$$\sqrt{1-\xi^2}\left[\frac{\partial F^1\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)}{\partial\tau}+\frac{1}{\tau}F^1\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)\right]+$$
$$+F^0\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)-\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}p^0(\xi,\xi')F^0\left(\tau,\xi',\frac{1}{k}\right)d\xi'=0, \quad (15)$$

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2}\left\{\left[\frac{\partial F^{m-1}\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)}{\partial\tau}-\frac{m-1}{\tau}F^{m-1}\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial F^{m+1}\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)}{\partial\tau}+\frac{m+1}{\tau}F^{m+1}\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)\right]\right\}+$$
$$+F^m\left(\tau,\xi,\frac{1}{k}\right)-\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}p^m(\xi,\xi')F^m\left(\tau,\xi',\frac{1}{k}\right)d\xi'=0 \quad (m=1,2,\dots), \quad (16)$$

где $p^m(\xi,\xi')$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье индикатрисы рассеяния

$$x\left(\cos\gamma'\right)=p^0(\xi,\xi')+2\sum_{m=1}^{\infty}p^m\left(\xi,\xi'\right)\cos m(\psi-\psi'). \quad (17)$$

Принимая во внимание, что модифицированные функции Бесселя 1-го рода $K_m(z)$ целого индекса m связаны известными соотношениями [21]

$$\frac{dK_m(z)}{dz}+\frac{m}{z}K_m(z)=-K_{m-1}(z), \quad (18)$$
$$\frac{dK_m(z)}{dz}-\frac{m}{z}K_m(z)=-K_{m+1}\left(z\right), \quad (19)$$

находим, что рекуррентным соотношениям (15) и (16) удовлетворяют функции вида

$$F^m\left(\tau, \xi, \frac{1}{k}\right) = r_m\left(\xi, \frac{1}{k}\right) K_m\left(k\tau\right). \tag{20}$$

При $k\tau \gg 1$ для функций $K_m(k\tau)$ справедлива асимптотическая формула (см. [21])

$$K_m\left(k\tau\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2k\tau}} e^{-k\tau}, \tag{21}$$

т. е. при указанном условии функции $K_m\left(\frac{\tau}{\nu}\right)$ не зависят от индекса m, следовательно, в выражении (13) для $F(\tau, \xi, \psi, \frac{1}{k})$ пространственная переменная τ и угловые переменные ξ и ψ разделяются. Поэтому, согласно формуле (10), функция $f(\tau, \mu, \varphi, \frac{1}{k})$ при $k\tau \gg 1$ представляется в виде

$$f\left(\tau, \mu, \varphi, \frac{1}{k}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2k\tau}} R\left(\mu, \varphi, \frac{1}{k}\right) e^{-k\tau}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в уравнение (12) при $k\tau \gg 1$ и пренебрегая величинами, содержащими $\frac{1}{\tau}$, находим, что функция $R(\mu, \varphi, \frac{1}{k})$ угловых переменных совпадает с соответствующей функцией, получающейся из уравнения переноса излучения в плоской среде с учетом зависимости от азимута, т. е.

$$R\left(\mu, \varphi, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2\pi}\left[R^0\left(\mu\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty} R^m\left(\mu\right)\cos m\varphi\right], \tag{23}$$

где

$$R^m\left(\mu\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=m}^{\infty}\left(2n+1\right)\frac{(n-m)!}{(n+m)!} R_n^m\left(\frac{1}{k}\right) P_n^m\left(\mu\right). \tag{24}$$

Здесь $P_n^m(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, а величины $R_n^m\left(\frac{1}{k}\right)$ — известные в теории переноса излучения [2] полиномы, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$\begin{gathered} (n-m+1)R_{n+1}^m\left(\frac{1}{k}\right) + (n+m)R_{n-1}^m\left(\frac{1}{k}\right) = (2n+1-\lambda x_n)\frac{R_n^m\left(\frac{1}{k}\right)}{k}, \\ R_m^m\left(\frac{1}{k}\right) = P_m^m\left(\frac{1}{k}\right). \end{gathered} \tag{25}$$

Вдали от источника излучения, как уже отмечалось выше, в выражении (9) для $I(\tau, \mu, \varphi)$ можно учитывать только слагаемые, соответствующие собственному значению $\nu_1 = \frac{1}{k}$, поэтому в соответствии с формулами (9) и (22) асимптотическую формулу для $I(\tau, \mu, \varphi)$ можно записать в виде

$$I\left(\tau, \mu, \varphi\right) = \frac{lL}{4\pi^2}\frac{f(\tau, \mu, \varphi, \frac{1}{k})}{N(\frac{1}{k})} = \frac{lL}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2k\tau}}\frac{R(\mu, \varphi, \frac{1}{k})}{N(\frac{1}{k})} e^{-k\tau}. \tag{26}$$

Отметим, что кейзовский интеграл $N(\frac{1}{k})$, фигурирующий в этой формуле, связан с используемыми в книге В. В. Соболева [2] функцией $i(\eta)$ и постоянной величиной M соотношением

$$N\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\lambda^2}{4}\int_{-1}^{1} i^2(\eta)\eta d\eta = \frac{\lambda^2}{8}M. \tag{27}$$

Функция $I(\tau,\mu,\varphi)$ в формуле (26) описывает интенсивность диффузного излучения, так как вдали от источника энергии прямым излучением, поступающим в данную точку среды, можно пренебречь.

Из формул (22)–(24) вытекают следующие асимптотические выражения для средней интенсивности $J(\tau)$ и потока $H(\tau)$ излучения:

$$J(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} I\left(\tau,\ \mu,\ \varphi\right) d\mu = \frac{lL}{16\pi^3}\sqrt{\frac{\pi}{2k\tau}}\frac{e^{-k\tau}}{N(\frac{1}{k})}, \tag{28}$$

$$H(\tau) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} I\left(\tau,\ \mu,\ \varphi\right) \mu d\mu = \frac{lL}{4\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2k\tau}}\frac{1-\lambda}{kN(\frac{1}{k})}e^{-k\tau}. \tag{29}$$

При малом истинном поглощении, когда $1-\lambda \ll 1$, используя известные разложения постоянных k и M по степеням $\sqrt{1-\lambda}$ (см. [2, 3]) и пренебрегая в них малыми членами более высокого порядка, чем $\sqrt{1-\lambda}$, получаем асимптотические формулы

$$J(\tau) = \frac{lL}{16\pi^3}\sqrt{\frac{3-x_1}{1-\lambda}} K_0\left(\tau\sqrt{\left(3-x_1\right)\left(1-\lambda\right)}\right), \tag{30}$$

$$H(\tau) = \frac{lL}{4\pi^2} K_0\left(\tau\sqrt{\left(3-x_1\right)\left(1-\lambda\right)}\right), \tag{31}$$

справедливые при $1-\lambda \ll 1$, $k\tau \gg 1$.

4. Асимптотические формулы для средней интенсивности и потока нестационарного излучения. Методика вывода асимптотических формул для характеристик нестационарного поля излучения изложена в книге И. Н. Минина [3]. В асимптотических выражениях для соответствующих характеристик стационарного поля излучения, справедливых при малом истинном поглощении ($1-\lambda \ll 1$), величина $1-\lambda$ заменяется параметром s преобразования Лапласа. Применение к полученным выражениям обратного преобразования Лапласа приводит к асимптотическим формулам для соответствующих характеристик нестационарного поля излучения.

Следуя этой методике, из формул (30) и (31) находим выражения для зависящих от времени u величин $J(\tau,u)$ и $H(\tau,u)$, преобразованных по Лапласу:

$$L[J\left(\tau,u\right)] = \frac{lL}{16\pi^3}\sqrt{\frac{3-x_1}{s}} K_0\left(\tau\sqrt{\left(3-x_1\right)s}\right), \tag{32}$$

$$L\left[H\left(\tau,u\right)\right] = \frac{lL}{4\pi^2} K_0\left(\tau\sqrt{\left(3-x_1\right)s}\right). \tag{33}$$

Обратное преобразование дает для этих характеристик нестационарного излучения асимптотические формулы

$$J\left(\tau,u\right) = \frac{lL}{16\pi^3\tau} e^{-\frac{(3-x_1)\tau^2}{4u}}, \tag{34}$$

$$H\left(\tau,u\right) = \frac{lL}{8\pi^2 u} e^{-\frac{(3-x_1)\tau^2}{4u}}, \tag{35}$$

выполняющиеся при условиях $1-\lambda \ll 1$, $k\tau \gg 1$, $u > \beta_2\tau$. Последнее неравенство учитывает конечность скорости распространения световой волны, излучаемой рассматриваемым мгновенным осевым источником энергии.

5. Заключение. В настоящей работе рассматривается поле излучения в бесконечной среде на больших оптических расстояниях от источника ($\tau \gg 1$). Как известно (см., например, [22]), в случаях стационарных полей излучения, освещенных плоскими или сферически симметричными источниками, в выражениях для интенсивности излучения и связанных с ней величин при $\tau \gg 1$ происходит разделение пространственных и угловых переменных. Но в рассматриваемом случае аксиально симметричного поля излучения в разложении интенсивности в ряд Фурье существенную роль играют азимутальные члены, и такое разделение переменных при $\tau \gg 1$ происходит не при любых значениях параметра k, а при условии $k\tau \gg 1$. В настоящей работе при этом условии получены асимметрические выражения для средней интенсивности и для потока излучения в случае стационарного источника. Из этих выражений при помощи предложенной И. Н. Мининым [3] методики получены соответствующие асимптотики для указанных величин в случае мгновенного источника.

Имея эти выражения, легко получить соответствующие формулы и при условии, когда светимость $L(u)$ нестационарного источника зависит от безразмерного времени u произвольным образом. Для этого получающиеся для случая мгновенного источника формулы для характеристик поля излучения, например для средней интенсивности и для потока излучения, следует умножить на функцию $L(u)$ и проинтегрировать по всему промежутку времени u, в течение которого действует источник.

Литература

1. *Соболев В. В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: Гостехиздат, 1956. 391 с.
2. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972. 336 с.
3. *Минин И. Н.* Теория переноса излучения в атмосферах планет. М.: Наука, 1988. 264 с.
4. *Смоктий О. И., Аниконов А. С.* Рассеяние света в средах большой оптической толщины. СПб: Наука, 2008. 440 с.
5. *Вейнберг А., Вигнер Е.* Физическая теория ядерных реакторов. М.: ИЛ, 1961. 732 с.
6. *Лалетин Н. И.* Элементарные решения односкоростного уравнения переноса нейтронов // Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов / под ред. В. Я. Шевелева. М.: Атомиздат, 1974. С. 155–186.
7. *Дэвисон Б.* Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960. 520 с.
8. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
9. *Hund G. E.* Radiative transfer in a homogeneous cylindrical atmosphere // SIAM J. Math. 1968. Vol. 16. Nr. 6. P. 1255–1265.
10. *Лалетин Н. И.* Элементарные решения уравнения переноса нейтронов для задач с цилиндрической и сферической симметрией // Атомная энергия. 1966. Т. 20. Вып. 6. С. 509.
11. *Лалетин Н. И.* Функция Грина уравнения переноса нейтронов для задач с цилиндрической симметрией // Атомная энергия. 1969. Т. 26. Вып. 4. Р. 370–371.
12. *Абрамов В. Д.* Фундаментальное решение интегро-дифференциального уравнения переноса. Препринт ФЭИ. Обнинск, № 1135. 1980. 18 с.
13. *Нагирнер Д. И.* О переносе излучения в слое, шаре и цилиндре // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289. № 3. С. 606–609.
14. *Колесов А. К.* О переносе излучения в средах с цилиндрической симметрией // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 1. С. 115–118.
15. *Гермогенова Т. А., Павельева Е. Б.* Характеристическое уравнение в задачах о переносе излучения в протяженных цилиндрических областях // Журн. выч. матем. и мат. физики. 1989. Т. 29. № 8. С. 1195–1211.
16. *Павельева Е. Б.* Асимптотика решения уравнения переноса в диске большого радиуса с источником в окрестности оси симметрии. Препринт ИПМ. М., № 97. 1990. 27 с.
17. *Нагирнер Д. И.* Перенос излучения в цилиндре. I. Резольвента основного интегрального уравнения // Астрофизика. 1994. Т. 37. Вып. 1. С. 111–117.
18. *Нагирнер Д. И.* Перенос излучения в цилиндре. II. Частные задачи. Асимптотика // Астрофизика. 1994. Т. 37. Вып. 4. С. 655–670.

19. *Нагирнер Д. И.* Перенос излучения в цилиндре. III. Спектр основного интегрального уравнения // Астрофизика. 1995. Т. 38. Вып. 1. С. 77–88.

20. *Масленников М. В.* Проблемы Милна с анизотропным рассеянием // Труды МИАН СССР. 1968. Т. 97. С. 3–132.

21. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

22. *Колесов А. К., Кропачева Н. Ю.* Некоторые асимптотические формулы в теории нестационарного переноса излучения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 4. С. 152–158.

Статья поступила в редакцию 2013 г.

Сведения об авторах

Колесов Александр Константинович — доктор физико-математических наук, профессор; s.kolesov@spbu.ru

Кропачева Наталия Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент; NK@NK11595.spb.edu

ON ASYMPTOTIC LIGHT REGIME IN AN INFINITE MEDIUM FAR FROM A LINEAR SOURCE OF ENERGY

Alexander K. Kolesov, Natalia Yu. Kropacheva

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; s.kolesov@spbu.ru, NK@NK11595.spb.edu

Stationary and nonstationary monochromatic radiative transfer in an infinite medium with cylindrical symmetry is considered. It is supposed that the medium is illuminated by a stationary or momentary linear source of energy. The medium is assumed to be homogeneous. Its optical properties are characterized by the volume absorption coefficient α, the single-scattering albedo λ and the anisotropic phase function, which is represented by a finite sum of Legendre polynomials. The finite speed of light and the duration of the light scattering process are taken into account.

The radiation field at large optical distances τ from the source of radiation ($\tau \gg 1$) is investigated. The true absoption of light in the medium is assumed to be small ($1 - \lambda \ll 1$). The partial-differential-integral equations of radiative transfer in the medium illuminated by a stationary linear energy source are solved by means of the Case method. Asymptotic formulae for the mean intensity and the radiation flux is derived.

Transition from a stationary to a non-stationary radiation field is realized by the technique proposed by I. N. Minin [3]. In this way the asymptotic expressions for the above-mentioned values are reduced for the case of a momentary linear source of energy. Refs 22.

Keywords: radiative transfer, linear energy source, momentary energy source, radiation field, asymptotic expressions.