УДК 521.11 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 2

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ*

Т. Н. Санникова[1], *К. В. Холшевников*[1,2], *М. С. Джазмати*[3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
[2] Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10
[3] Университет Кассим, Бурайдах, Кассим, Саудовская Аравия

Показано, что при выводе уравнений типа Эйлера в форме, инвариантной относительно группы вращений $SO(3)$ (для оскулирующих элементов: большая полуось, эксцентриситет, средняя аномалия) или относительно группы вращений $SO(2)$ (для наклона, долготы восходящего узла, аргумента перицентра), достаточно использовать представление через элементы лишь радиуса-вектора $\mathbf{r}$, но не вектора скорости $\dot{\mathbf{r}}$. Указан метод получения уравнений типа Эйлера в проекциях на оси употребительных в астрономии систем координат. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: оскулирующая орбита, вращающаяся система отсчета, изменение оскулирующих элементов.

Введение. В работе [1] мы привели уравнения изменения инвариантных относительно группы вращений $SO(3)$ элементов a, e, M (большая полуось, эксцентриситет, средняя аномалия) в инвариантной относительно $SO(3)$ форме. Затем мы привели уравнения изменения элементов i, Ω, g (наклон, долгота восходящего узла, аргумент перицентра) в форме, инвариантной относительно группы $SO(2)$ вращений основной плоскости x, y. Заметим, что наклон и аргумент перицентра инвариантны относительно $SO(2)$, чего нельзя сказать о долготе узла. Однако аддитивная константа не меняет скорости $\dot{\Omega}$ изменения Ω, поэтому $\dot{\Omega}$ обладает нужной инвариантностью.

В настоящей статье мы приводим более изящный вывод уравнений для элементов, связанных с основной плоскостью, использующий представление через элементы лишь $\mathbf{r}$, но не $\dot{\mathbf{r}}$. Точно так же мы упрощаем вывод уравнений в проекциях на оси основной инерциальной системы отсчета и добавляем уравнения в проекции на оси орбитальной системы координат с первой осью, направленной в перицентр орбиты.

Изменение наклона и аргумента широты. Приведем скорость $\overset{\bullet}{i}$ изменения i, вывод которой в [1] не нуждается в модификации:

$$\overset{\bullet}{i} = \frac{\operatorname{ctg} i}{\varkappa^2 p}(\mathbf{crF}) - \frac{1}{\varkappa\sqrt{p}\sin i}(\mathbf{rFk}), \tag{1}$$

где $\varkappa^2$ — гравитационный параметр, p — фокальный параметр, $\mathbf{k}$ — орт оси z, $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ — вектор площадей, $\mathbf{F}$ — возмущающее ускорение. Последнее определяется фактически заданием уравнения движения точки в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\varkappa^2}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{F} \tag{2}$$

в области $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \in \big(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\big) \times \mathbb{R}^3$ или в той ее части, где определено $\mathbf{F}$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-02-00804) и Программы проведения фундаментальных исследований СПбГУ по приоритетным направлениям (грант № 6.37.110.2011).

Перейдем к аргументу широты u. Обратимся к известному представлению координат через элементы [2, 3]:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos\Omega - \cos i \sin u \sin\Omega), \\ y &= r(\cos u \sin\Omega + \cos i \sin u \cos\Omega), \\ z &= r \sin i \sin u. \end{aligned} \tag{3}$$

Продифференцируем по времени третью формулу (3):

$$\dot z = \dot r \sin i \sin u + r \cos i \sin u \, \overset{\bullet}{i} + r \sin i \cos u \, \dot u. \tag{4}$$

В невозмущенном движении (4) можно представить в виде

$$\dot z = \dot r \sin i \sin u + \frac{\varkappa\sqrt{p}}{r} \sin i \cos u, \tag{5}$$

поскольку в этом случае $\overset{\bullet}{i} = 0$, $r^2 \dot u = \varkappa\sqrt{p}$. Формула (5) содержит только координаты, скорости и элементы, но не ускорения или производные от элементов. По определению оскуляции она справедлива и в возмущенном движении. Вычитая (5) из (4), получим

$$r \cos i \sin u \, \overset{\bullet}{i} + r \sin i \cos u \, \dot u - \frac{\varkappa\sqrt{p}}{r} \sin i \cos u = 0,$$

откуда с учетом (1) находим

$$\dot u = \frac{\varkappa\sqrt{p}}{r^2} - \frac{\operatorname{ctg}^2 i \operatorname{tg} u}{\varkappa^2 p} (\mathbf{crF}) + \frac{\cos i \operatorname{tg} u}{\varkappa\sqrt{p} \sin^2 i} (\mathbf{rFk}). \tag{6}$$

Изменение долготы узла. Из первых двух уравнений (3) легко найти следующие комбинации косинуса и синуса долготы восходящего узла:

$$\begin{aligned} x \cos\Omega + y \sin\Omega &= r \cos u, \\ -x \sin\Omega + y \cos\Omega &= r \cos i \sin u. \end{aligned} \tag{7}$$

Дифференцируя первое соотношение (7)

$$\dot x \cos\Omega + \dot y \sin\Omega + (-x \sin\Omega + y \cos\Omega)\dot\Omega = \dot r \cos u - r \sin u \, \dot u$$

и пользуясь вторым соотношением (7), получаем

$$r \sin u (\dot u + \cos i \, \dot\Omega) = \dot r \cos u - (\dot x \cos\Omega + \dot y \sin\Omega). \tag{8}$$

В невозмущенном случае (8) можно представить в виде

$$\frac{\varkappa\sqrt{p}}{r} \sin u = \dot r \cos u - (\dot x \cos\Omega + \dot y \sin\Omega). \tag{9}$$

Формула (9) справедлива и в возмущенном движении. Вычитая (9) из (8), получаем после преобразований

$$\dot u + \cos i \, \dot\Omega = \frac{\varkappa\sqrt{p}}{r^2}\,. \tag{10}$$

Четыре системы отсчета. Для практического применения уравнений типа Эйлера следует спроектировать векторы на оси какой-либо системы отсчета. В астрономии широко используются четыре координатные системы с общим началом в притягивающем центре, но разными направлениями осей: основная $\mathcal{O}$ с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и три орбитальные $\mathcal{O}_s$ с ортами $\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s$. Орты системы $\mathcal{O}_1$ направлены по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей). Орты системы $\mathcal{O}_2$ направлены по вектору скорости, главной нормали к оскулирующей орбите и бинормали. Орты системы $\mathcal{O}_3$ направлены в перицентр, в точку с истинной аномалией $90°$ и по бинормали.

Пусть $\mathbf{Q}$ — произвольный вектор, отнесенный к системе $\mathcal{O}$. Тот же вектор, отнесенный к системе $\mathcal{O}_s$, обозначим через $\mathbf{Q}_s$. Связь между ними дается матричным равенством

$$\mathbf{Q} = \mathcal{B}_s \mathbf{Q}_s. \tag{11}$$

Третий столбец всех трех матриц $\mathcal{B}_s$ состоит из координат $(\sin i \sin \Omega,\ -\sin i \cos \Omega,\ \cos i)^T$ единичного вектора площадей в системе $\mathcal{O}$. Матрица $\mathcal{B}_1$ принимает вид [2, 3]

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos u - \cos i \sin\Omega \sin u & -\cos\Omega \sin u - \cos i \sin\Omega\cos u & \star \\ \sin\Omega\cos u + \cos i\cos\Omega\sin u & -\sin\Omega\sin u + \cos i\cos\Omega\cos u & \star \\ \sin i \sin u & \sin i \cos u & \star \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где мы выписали явно только первые два столбца. Матрица $\mathcal{B}_3$ получается из $\mathcal{B}_1$ заменой u на g. Матрица $\mathcal{B}_2$ получается [1] из $\mathcal{B}_1$ заменой u на $u + 90° - f$, где f — угол, на который надо повернуть вектор скорости до совмещения с трансверсалью. Именно,

$$\begin{aligned} \cos f &= \frac{1 + e\cos\theta}{\sqrt{1 + 2e\cos\theta + e^2}} = \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2\cos^2 E}}, \\ \sin f &= \frac{e\sin\theta}{\sqrt{1 + 2e\cos\theta + e^2}} = \frac{e\sin E}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}, \end{aligned} \tag{13}$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos(u + 90° - f) &= -\frac{\sin u + e\sin g}{\sqrt{1 + 2e\cos\theta + e^2}} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}\cos E \sin g + \sin E\cos g}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}, \\ \sin(u + 90° - f) &= \frac{\cos u + e\cos g}{\sqrt{1 + 2e\cos\theta + e^2}} = \frac{\sqrt{1 - e^2}\cos E\cos g - \sin E\sin g}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Сопровождающая система отсчета $\mathcal{O}_1$ (первый орт — по радиусу-вектору). В этой, чаще всего используемой системе, $\mathbf{F} = S\mathbf{i}_1 + T\mathbf{j}_1 + W\mathbf{k}_1$,

$$\mathbf{r} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix} e\sin\theta \\ p/r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \varkappa\sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \sin i\sin u \\ \sin i\cos u \\ \cos i \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Компоненты вектора $\mathbf{k}$ в (15) — это третья строка матрицы $\mathcal{B}_1$.

Скалярное и два смешанных произведения принимают вид

$$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{F} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\left(e\sin\theta\, S + \frac{p}{r}T\right) = \frac{\varkappa\sqrt{a}}{r}\left(e\sin E\, S + \sqrt{1 - e^2}\,T\right),$$

$$(\mathbf{crF}) = \varkappa r\sqrt{p}\,T,$$

$$(\mathbf{rFk}) = r\cos i\,T - r\sin i\cos u\,W =$$
$$= r\cos i\,T + a\sin i(e\cos g - \cos E\cos g + \sqrt{1-e^2}\sin E\sin g)\,W. \qquad (16)$$

Орбитальная система отсчета $\mathcal{O}_3$ (первый орт направлен в перицентр). В этой системе $\mathbf{F} = \Phi_1\mathbf{i}_3 + \Phi_2\mathbf{j}_3 + W\mathbf{k}_3$,

$$\mathbf{r} = r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ e+\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \varkappa\sqrt{p}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix}\sin i\sin g\\ \sin i\cos g\\ \cos i\end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Скалярное и два смешанных произведения принимают вид

$$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{F} = \frac{\varkappa}{\sqrt{p}}\left[-\sin\theta\,\Phi_1 + (e+\cos\theta)\,\Phi_2\right] = \frac{\varkappa\sqrt{a}}{r}\left(-\sin E\,\Phi_1 + \sqrt{1-e^2}\cos E\,\Phi_2\right),$$

$$(\mathbf{crF}) = \varkappa r\sqrt{p}\,(-\sin\theta\,\Phi_1 + \cos\theta\,\Phi_2) = \varkappa a\sqrt{p}\left[-\sqrt{1-e^2}\sin E\,\Phi_1 + (\cos E - e)\,\Phi_2\right],$$

$$(\mathbf{rFk}) = -r\cos i\sin\theta\,\Phi_1 + r\cos i\cos\theta\,\Phi_2 - r\sin i\cos u\,W =$$
$$= -a\cos i\sqrt{1-e^2}\sin E\,\Phi_1 + a\cos i(\cos E - e)\,\Phi_2 +$$
$$+ a\sin i[(e-\cos E)\cos g + \sqrt{1-e^2}\sin E\sin g]\,W. \qquad (18)$$

Основная система отсчета $\mathcal{O}$. Считаем $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$. Проще всего вывести выражения для нужных нам величин, представив $(\Phi_1, \Phi_2, W)^T$ произведением транспонированной матрицы $\mathcal{B}_3$ на вектор $\mathbf{F}$:

$$\Phi_1 = (\cos\Omega\cos g - \cos i\sin\Omega\sin g)F_x + (\sin\Omega\cos g + \cos i\cos\Omega\sin g)F_y + \sin i\sin g\,F_z\,,$$

$$\Phi_2 = (-\cos\Omega\sin g - \cos i\sin\Omega\cos g)F_x + (-\sin\Omega\sin g + \cos i\cos\Omega\cos g)F_y + \sin i\cos g\,F_z\,,$$
$$W = \sin i\sin\Omega\,F_x - \sin i\cos\Omega\,F_y + \cos i\,F_z\,. \qquad (19)$$

Поскольку

$$-\sin\theta\Phi_1 + \cos\theta\Phi_2 = (-\cos\Omega\sin u - \cos i\sin\Omega\cos u)F_x +$$
$$+ (-\sin\Omega\sin u + \cos i\cos\Omega\cos u)F_y + \sin i\cos u\,F_z\,,$$

последнее соотношение (18) перейдет в

$$(\mathbf{rFk}) = -r(\sin\Omega\cos u + \cos i\cos\Omega\sin u)F_x + r(\cos\Omega\cos u - \cos i\sin\Omega\sin u)F_y\,, \qquad (20)$$

что, впрочем, легче получить непосредственно, поскольку $\mathbf{k} = (0,0,1)^T$ в системе $\mathcal{O}$.

Вывод соотношений в системе $\mathcal{O}_2$ не нуждается в модификации.

Заключение. Рациональный вывод соотношений трех ключевых величин $\dot{\mathbf{r}}\mathbf{F}$, $(\mathbf{crF})$, $(\mathbf{rFk})$ не влияет на окончательный вид уравнений типа Эйлера, приведенных в [1]. Заметим только, что уравнения (37), (38) из этой статьи, где следует положить $\Phi_4 = W$, являются фактически уравнениями в системе $\mathcal{O}_3$. Их можно рассматривать как уравнения в системе $\mathcal{O}$ с учетом (19).

Литература

1. *Санникова Т. Н., Холшевников К. В.* Уравнения движения в оскулирующих элементах в различных системах отсчета // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2013. Сер. 1. Вып. 4. С. 134–145.
2. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
3. *Холшевников К. В., Титов В. Б.* Задача двух тел / учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 180 с.

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2013 г.

Сведения об авторах

Санникова Татьяна Николаевна — аспирант; tnsannikova@gmail.com

Холшевников Константин Владиславович — доктор физико-математических наук, профессор; kvk@astro.spbu.ru

Джазмати Мухаммед Салахович — кандидат физико-математических наук, доцент; jazmati@yahoo.com

ON THE DERIVATION OF EQUATIONS OF MOTION IN OSCULATING ELEMENTS

Tatiana N. Sannikova[1], *Konstantin V. Kholshevnikov*[1,2], *Mohammad S. Jazmati*[3]

[1] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; tnsannikova@gmail.com, kvk@astro.spbu.ru
[2] Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St.Petersburg, 191187, Russian Fedration; kvk@astro.spbu.ru
[3] Qassim University, Buraidah, Kassim, Saudi Arabia, jazmati@yahoo.com

It is shown that for deducing Euler type equations in a form that is invariant with respect to the rotation group $SO(3)$ (for osculating elements: semi-major axis, eccentricity, mean anomaly) or with respect to the rotation group $SO(2)$ (for inclination, longitude of ascending node, argument of pericentre) it is sufficient to use a representation via elements of the radius-vector $\mathbf{r}$, but not of the velocity vector $\dot{\mathbf{r}}$. A method of deducing Euler type equations in projections on axes of coordinate systems commonly used in astronomy is pointed out. Refs 3.

Keywords: osculating orbit, rotating reference frame, variation of osculating elements.