МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С ГАМИЛЬТОНОВОЙ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ*

В. В. Басов, А. С. Ваганян

С.-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Предложен новый эффективный метод нахождения структур обобщенных нормальных форм (ОНФ) двумерных автономных систем с гамильтоновой квазиоднородной невозмущенной частью в окрестности точки покоя. В явном виде приведены ОНФ систем с невозмущенной частью, представленной вектором с мономиальными компонентами. Полученные ОНФ сравниваются с известными результатами Такенса, Байдера и Сандерса, Басова и др. Библиогр. 9 назв.

Ключевые слова: нормальные формы, формальные преобразования.

1. Введение. Одним из основных инструментов исследования поведения траекторий автономных систем ОДУ в окрестности особой точки является классический метод *нормальных форм* (НФ), позволяющий делать выводы о поведении траекторий возмущенной системы по ее линейному приближению. Необходимость исследования вырожденных случаев, когда все собственные числа матрицы линейной части равны нулю, привела к многочисленным обобщениям понятия НФ, которые встречаются, начиная с известной работы Такенса [1] и заканчивая недавней статьей [2]. Говоря неформально, *обобщенной нормальной формой* (ОНФ) системы с заданной невозмущенной частью (не обязательно линейной) и произвольным возмущением называют наиболее простую формальную систему, к которой можно прийти при помощи формальных преобразований.

В настоящей работе решается задача об описании возможных структур ОНФ для двумерных систем с квазиоднородной гамильтоновой невозмущенной частью. Следуя идеям Байдера и Сандерса [3], мы разделяем возмущение системы на гамильтонову и негамильтонову составляющие и упрощаем каждую из частей по отдельности, используя метод Белицкого [4]. Получающаяся упрощенная система легко интерпретируется в терминах гамильтоновых нормальных форм, в связи с чем вводится понятие обобщенной метагамильтоновой нормальной формы. Также показан алгоритм сведе-

*Работа выполнена при финансовой поддержке тематического плана Санкт-Петербургского государственного университета (тема 6.0.112.2010).

ния метагамильтоновой нормальной формы к ОНФ в смысле определения, данного Басовым в [5]. В частности, мы находим структуры ОНФ двумерных систем с гамильтоновой невозмущенной частью, представленной вектором с мономиальными компонентами. Полученные ОНФ сравниваются с известными результатами Такенса [1], Байдера и Сандерса [3], Басова и др. [5–8].

Рассмотрим двумерную автономную систему ОДУ с гамильтоновой полиномиальной невозмущенной частью и произвольным формальным возмущением:

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y} + X, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} + Y \qquad (H \in \mathbb{K}[z],\ X, Y \in \mathbb{K}[[z]]), \tag{1}$$

где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $z = (x, y)$, x, y — скалярные переменные, а H является квазиоднородным полиномом обобщенной степени χ с весом $\gamma \in \mathbb{N}^2$ (см., напр. [5]), причем $\chi \geq \delta \overset{\text{def}}{=} \gamma_1 + \gamma_2$. Введем обозначения для невозмущенной части системы (1),

$$\widehat{H} = \frac{\partial H}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x},$$

и возмущения,

$$\mathcal{Z} = X\,\frac{\partial}{\partial x} + Y\,\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$

Будем также предполагать, что $\mathcal{Z}$ имеет обобщенный порядок (т. е. начинается с членов обобщенной степени) больше обобщенной степени $\widehat{H}$.

В силу сделанных предположений начало координат является точкой покоя системы (1), а $\widehat{H}$ — квазиоднородный векторный полином обобщенной степени $\chi - \delta$.

Пусть $\mathcal{P} = P_1\,\partial/\partial x + P_2\,\partial/\partial y$ — векторный ряд обобщенного порядка $k \in \mathbb{N}$. Тогда под действием почти тождественного формального преобразования

$$x = \widetilde{x} + P_1(\widetilde{z}), \quad y = \widetilde{y} + P_2(\widetilde{z}) \tag{3}$$

система (1) переходит в систему с такой же невозмущенной частью. При этом исходное и преобразованное возмущения $\mathcal{Z}$ и $\widetilde{\mathcal{Z}}$ связаны *гомологическими уравнениями*, которые в первых k обобщенных степенях имеют вид (см., напр. [5])

$$\mathcal{Z}_\gamma^{[l+\chi-\delta]} = \widetilde{\mathcal{Z}}_\gamma^{[l+\chi-\delta]}, \quad [\widehat{H}, \mathcal{P}_\gamma^{[k]}] = \mathcal{Z}_\gamma^{[k+\chi-\delta]} - \widetilde{\mathcal{Z}}_\gamma^{[k+\chi-\delta]} \qquad (l = \overline{1, k-1}), \tag{4}$$

где квадратные скобки в левой части обозначают скобку Ли, а верхние индексы — обобщенные степени.

Поясним понятие ОНФ, как оно вводится в работе [5]. Выбрав в пространствах квазиоднородных векторных полиномов стандартный базис и лексикографически упорядочив его элементы, придем к системе линейных уравнений, связывающих коэффициенты возмущения исходной и преобразованной систем:

$$A\,P = Z - \widetilde{Z}.$$

Условия совместности этой системы называются *резонансными уравнениями.* Коэффициенты, входящие хотя бы в одно из резонансных уравнений, называются резонансными, а остальные — нерезонансными. ОНФ определяется как система, у которой в каждой обобщенной степени равны нулю все нерезонансные коэффициенты, а также все резонансные коэффициенты, за исключением *резонансного набора*, которому соответствует подматрица системы резонансных уравнений с отличным от нуля определителем.

2. Нахождение структуры ОНФ. Хорошо известно [2, 3], что произвольный двумерный векторный ряд $\mathcal{Z}$ единственным образом разлагается на гамильтонову и негамильтонову составляющие:

$$\mathcal{Z} = \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x} + G\,\mathcal{E}_\gamma, \tag{5}$$

где $\mathcal{E}_\gamma = \gamma_1\, x\,\partial/\partial x + \gamma_2\, y\,\partial/\partial y$ — оператор Эйлера с весом γ. При этом

$$G^{[k]}_\gamma = \operatorname{div}(\mathcal{Z}^{[k]}_\gamma)/(k+\delta).$$

Оператор $\mathcal{E}_\gamma$ имеет нулевую обобщенную степень и обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{E}_\gamma(P^{[k]}_\gamma) = k\,P^{[k]}_\gamma, \quad [\mathcal{E}_\gamma,\, \mathcal{P}^{[k]}_\gamma] = k\,\mathcal{P}^{[k]}_\gamma, \quad \operatorname{div}(P^{[k]}_\gamma\,\mathcal{E}_\gamma) = (k+\delta)\,P^{[k]}_\gamma.$$

Введем на $\mathbb{K}[z]$ скалярное произведение

$$\langle P,\, Q\rangle = P(\partial)(\overline{Q})|_{z=0} \qquad (P,\, Q \in \mathbb{K}[z]),$$

где $\partial = (\partial/\partial x,\, \partial/\partial y)$, а черта сверху означает комплексное сопряжение коэффициентов, и оператор $\widehat{H}^{\,*}$, сопряженный $\widehat{H}$ относительно этого скалярного произведения (см. [4]), имеет вид

$$\widehat{H}^{\,*} = y\,\frac{\partial\overline{H}}{\partial x}(\partial) - x\,\frac{\partial\overline{H}}{\partial y}(\partial).$$

Введем обозначения:

$$\mathfrak{R} = \operatorname{Ker}\,\widehat{H}^*, \quad \mathfrak{R}' = \operatorname{Ker}\,\widehat{H}^* \cap \operatorname{Im}\,\widehat{H}^*.$$

Из квазиоднородности $\widehat{H}^{\,*}$ вытекает, что $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ разбиваются в прямую сумму ортогональных линейных подпространств $\mathfrak{R}^{[k]}_\gamma$, ${\mathfrak{R}'}^{[k]}_\gamma \subset \mathbb{K}^{[k]}_\gamma[z]$.

Определение 1. *Гамильтоновым (усеченным) резонансным набором* в обобщенной степени k для гамильтониана H назовем множество полиномов $\{S^{[k]}_{\gamma,\nu}\}$ такое, что для некоторого базиса $\{R^{[k]}_{\gamma,\mu}\}$ пространства $\mathfrak{R}^{[k]}_\gamma$ (соответственно ${\mathfrak{R}'}^{[k]}_\gamma$) матрица скалярных произведений $\big\{\langle R^{[k]}_{\gamma,\mu},\, S^{[k]}_{\gamma,\nu}\rangle\big\}$ невырождена. Здесь индексы μ и ν пробегают множество целых чисел от 1 до размерности соответствующего пространства.

Легко видеть, что определение (усеченного) резонансного набора не зависит от выбора базисов в пространствах $\mathfrak{R}^{[k]}_\gamma$ (соответственно ${\mathfrak{R}'}^{[k]}_\gamma$).

Пусть

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{S}^{[k]}_\gamma, \quad \mathfrak{S}' = \bigcup_{k=1}^{\infty} {\mathfrak{S}'}^{[k]}_\gamma,$$

где $\mathfrak{S}^{[k]}_\gamma$ и ${\mathfrak{S}'}^{[k]}_\gamma$ — произвольно выбранные гамильтоновы резонансные и усеченные резонансные наборы для H в обобщенной степени k. Обозначим через $\operatorname{Span}\mathfrak{S}$ и $\operatorname{Span}\mathfrak{S}'$ линейные оболочки множеств $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$.

Определение 2. Систему (1) назовем *обобщенной метагамильтоновой нормальной формой*, соответствующей наборам $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$, если ее возмущение имеет вид (5), где $F_\gamma^{[k]} \in \operatorname{Span}\mathfrak{S}'$, а $G_\gamma^{[k]} \in \operatorname{Span}\mathfrak{S}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Для произвольно выбранных наборов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ существует преобразование* (3), *приводящее систему* (1) *к соответствующей обобщенной метагамильтоновой нормальной форме.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное преобразование (3) вида

$$x = \widetilde{x} + \gamma_1\, \widetilde{x}\, P_\gamma^{[k]}(\widetilde{z}), \quad y = \widetilde{y} + \gamma_2\, \widetilde{y}\, P_\gamma^{[k]}(\widetilde{z}).$$

Из гомологических уравнений (4) и цепочки равенств

$$\begin{aligned}[][\widehat{H},\, P_\gamma^{[k]}\, \mathcal{E}_\gamma] &= \{H,\, P_\gamma^{[k]}\}\, \mathcal{E}_\gamma + P_\gamma^{[k]}\, [\widehat{H},\, \mathcal{E}_\gamma] = \{H,\, P_\gamma^{[k]}\}\, \mathcal{E}_\gamma - (\chi-\delta)\, P_\gamma^{[k]}\, \widehat{H} = \\ &= \Bigl(1 - \frac{\chi-\delta}{k+\chi}\Bigr)\{H,\, P_\gamma^{[k]}\}\, \mathcal{E}_\gamma + \mathcal{R}_\gamma^{[k+\chi-\delta]} = \frac{k+\delta}{k+\chi}\{H,\, P_\gamma^{[k]}\}\, \mathcal{E}_\gamma + \mathcal{R}_\gamma^{[k+\chi-\delta]},\end{aligned}$$

где фигурные скобки обозначают скобку Пуассона, а $\mathcal{R}_\gamma^{[k+\chi-\delta]}$ — бездивергентное векторное поле, вытекает, что дивергентные части возмущений исходной и преобразованной систем, G и $\widetilde{G}$, в обобщенной степени $k+\chi-\delta$ связаны следующим образом:

$$G_\gamma^{[k+\chi-\delta]} - \widetilde{G}_\gamma^{[k+\chi-\delta]} = \frac{k+\delta}{k+\chi}\, \widehat{H}(P_\gamma^{[k]}).$$

Покажем, что существует единственный полином $\widetilde{G}_\gamma^{[k+\chi-\delta]} \in \operatorname{Span}\mathfrak{S}$, для которого последнее уравнение разрешимо относительно $P_\gamma^{[k]}$. Действительно, из альтернативы Фредгольма следует, что для существования $P_\gamma^{[k]}$ необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\langle R_\gamma^{[k+\chi-\delta]},\, \widetilde{G}_\gamma^{[k+\chi-\delta]}\rangle = \langle R_\gamma^{[k+\chi-\delta]},\, G_\gamma^{[k+\chi-\delta]}\rangle$$

для всех $R_\gamma^{[k+\chi-\delta]} \in \mathfrak{R}_\gamma^{[k+\chi-\delta]}$. Пусть $\{R_{\gamma,\,\mu}^{[k+\chi-\delta]}\}$ — базис пространства $\mathfrak{R}_\gamma^{[k+\chi-\delta]}$, а $\mathfrak{S}_\gamma^{[k+\chi-\delta]} = \{S_{\gamma,\,\nu}^{[k+\chi-\delta]}\}$. Полагая $\widetilde{G}_\gamma^{[k+\chi-\delta]} = \sum_\nu c_\nu\, S_{\gamma,\,\nu}^{[k+\chi-\delta]}$, приходим к системе уравнений на коэффициенты c_ν,

$$\sum_\nu \langle R_{\gamma,\,\mu}^{[k+\chi-\delta]},\, S_{\gamma,\,\nu}^{[k+\chi-\delta]}\rangle\, c_\nu = \langle R_\gamma^{[k+\chi-\delta]},\, G_\gamma^{[k+\chi-\delta]}\rangle,$$

которая однозначно разрешима по определению гамильтонова резонансного набора.

Теперь рассмотрим произвольное преобразование (3) вида

$$x = \widetilde{x} + \gamma_1\, \widetilde{x}\, P_\gamma^{[k]}(\widetilde{z}) - \frac{\partial Q_\gamma^{[k+\delta]}(\widetilde{z})}{\partial \widetilde{y}}, \quad y = \widetilde{y} + \gamma_2\, \widetilde{y}\, P_\gamma^{[k]}(\widetilde{z}) + \frac{\partial Q_\gamma^{[k+\delta]}(\widetilde{z})}{\partial \widetilde{x}},$$

где $\{H,\, P_\gamma^{[k]}\} = 0$. С учетом того факта, что все интегралы векторного поля $\widehat{H}$ являются функциями от H, из гомологических уравнений (4) и равенств

$$\begin{gathered}\Bigl[\widehat{H},\, \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Bigr] = \frac{\partial\{H,\, F\}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\{H,\, F\}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}, \\ (1+\alpha)\, H^\alpha\, \widehat{H} = \frac{\partial H^{1+\alpha}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial H^{1+\alpha}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\end{gathered}$$

вытекает, что при таком преобразовании дивергентная часть возмущения в обобщенной степени $k+\chi-\delta$ не меняется, а бездивергентные части возмущений исходной и преобразованной систем связаны уравнением

$$F_\gamma^{[k+\chi]} - \widetilde{F}_\gamma^{[k+\chi]} = \widehat{H}\,(Q_\gamma^{[k+\delta]}) + H\,I_\gamma^{[k]},$$

где $\{H,\, I_\gamma^{[k]}\} = 0$. Проводя те же рассуждения, что для дивергентной части возмущения, приходим к выводу, что имеется единственный полином $\widetilde{F}_\gamma^{[k+\chi]} \in \operatorname{Span}\mathfrak{S}'$, для которого данное уравнение разрешимо относительно $Q_\gamma^{[k+\delta]}$ и $I_\gamma^{[k]}$.

Согласно гомологическим уравнениям (4) при указанных преобразованиях возмущение не меняется в обобщенных степенях меньше $k+\chi-\delta$. Таким образом, преобразование (3), приводящее систему (1) к нужному виду, может быть получено в результате композиции указанных преобразований для всех $k \in \mathbb{N}$ в порядке возрастания. □

Для описания структуры ОНФ нам остается перейти от гамильтоновых к обычным резонансным наборам. Для этого выберем $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$, состоящими из мономов. Обозначим через $Z^{(p,q)}$ коэффициент ряда $Z \in \mathbb{K}[[z]]$ при мономе $x^p\,y^q$.

Представления (2) и (5) векторного ряда $\mathcal{Z}$ связаны следующим образом:

$$X^{(p+1,q)} = -(q+1)\,F^{(p+1,q+1)} + \gamma_1\,G^{(p,q)}, \quad Y^{(p,q+1)} = (p+1)\,F^{(p+1,p+1)} + \gamma_2\,G^{(p,q)}. \quad (6)$$

Если $x^{p+1}\,y^{q+1} \notin \mathfrak{S}'$, $x^p\,y^q \notin \mathfrak{S}$, коэффициенты $X^{(p+1,q)}$, $Y^{(p,q+1)}$ в соответствующей ОНФ равны нулю согласно теореме 1.

Если $x^{p+1}\,y^{q+1} \in \mathfrak{S}'$, $x^p\,y^q \in \mathfrak{S}$, то коэффициенты $X^{(p+1,q)}$, $Y^{(p,q+1)}$ могут быть любыми.

Если $x^{p+1}\,y^{q+1} \notin \mathfrak{S}'$, $x^p\,y^q \in \mathfrak{S}$, то в соответствующей ОНФ можно положить равным нулю только один из коэффициентов $X^{(p+1,q)}$, $Y^{(p,q+1)}$. Это следует из представлений

$$\begin{aligned} x^p\,y^q\,\mathcal{E}_\gamma &= \frac{\gamma_2}{p+1}\Big((p+1)\,x^p\,y^{q+1}\,\frac{\partial}{\partial y} - (q+1)\,x^{p+1}\,y^q\,\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \frac{\gamma_1\,p+\gamma_2\,q+\delta}{p+1}\,x^{p+1}\,y^q\,\frac{\partial}{\partial x} = \\ &= \frac{\gamma_1}{q+1}\Big((q+1)\,x^{p+1}\,y^q\,\frac{\partial}{\partial x} - (p+1)\,x^p\,y^{q+1}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big) + \frac{\gamma_1\,p+\gamma_2\,q+\delta}{q+1}\,x^p\,y^{q+1}\,\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

В случае $x^{p+1}\,y^{q+1} \in \mathfrak{S}'$, $x^p\,y^q \notin \mathfrak{S}$ в ОНФ можно положить либо $X^{(p+1,q)} = 0$, если для некоторых p', $q' \in \mathbb{Z}_+$ коэффициент $[\mathcal{H}_\gamma^{[\chi]},\, x^{p'}\,y^{q'}\,\mathcal{E}_\gamma]_1^{(p+1,q)} \neq 0$, либо $Y^{(p,q+1)} = 0$, если $[\mathcal{H}_\gamma^{[\chi]},\, x^{p'}\,y^{q'}\,\mathcal{E}_\gamma]_2^{(p,q+1)} \neq 0$. При этом нужный коэффициент обнуляется заменой вида (3) с $\mathcal{P} = c\,x^{p'}\,y^{q'}\,\mathcal{E}_\gamma$, $c \in \mathbb{K}$. Все лишние слагаемые, возникающие после такого преобразования, можно учесть, добавляя в доказательстве теоремы 1 к $\widetilde{F}_\gamma^{[k+\chi]}$ и $\widetilde{G}_\gamma^{[k+\chi-\delta]}$ слагаемые, не принадлежащие соответственно $\mathfrak{S}'$ и $\mathfrak{S}$.

Следствие 1. *Система* (1) *с невозмущенной частью* $(y^{m-1},\, 0)$ *с* $m \geq 2$ *формально эквивалентна системе вида*

$$\dot{x} = y^{m-1} + \sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-3} X^{(i-j,j)}\,x^{i-j}\,y^j + x^2\,y^{m-2}\sum_{i=0}^{\infty} X^{(i+2,m-2)}\,x^i,$$

$$\dot{y} = \sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-2} Y^{(i-j,j)}\,x^{i-j}\,y^j + x\,y^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty} Y^{(i+1,m-1)}\,x^i,$$

где для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ *полагаем* $X^{(i+2,m-2)} = 0$ *или* $Y^{(i+1,m-1)} = 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае в степенях $k > m$ существует лишь один мономиальный гамильтонов резонансный набор $\mathfrak{S}$ (см. [9]), который в то же время является усеченным и состоит из мономов $x^p\, y^q$ с $q < m-1$. Отсюда с учетом теоремы 1 и приведенных вслед за ней рассуждений немедленно вытекает доказываемое утверждение. $\square$

При $m = 2$ полученная ОНФ совпадает с НФ Такенса [1], а при $m = 3$ — с результатом из [6, теор. 11].

Следствие 2. *Система* (1) *с невозмущенной частью* $(-m\, x^l\, y^{m-1},\, l\, x^{l-1}\, y^m)$ *с* $l > m \geq 1$ *и НОД* $(l,\, m) = d$ *формально эквивалентна системе вида*

$$\dot{x} = -m\, x^l\, y^{m-1} + \sum_{k=l+m}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{l-2} X^{(i,k-i)}\, x^i\, y^{k-i} + \sum_{j=0}^{m-3} x^{(k-j,j)}\, x^{k-j}\, y^j\Big) +$$

$$+\, x^{l+2}\, y^{m-2} \sum_{i=0}^{\infty} X^{(i+l+2,m-2)}\, x^i + x^{l-1}\, y^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} X^{(l-1,m+j+1)}\, y^j +$$

$$+ \sum_{r=d+1}^{\infty} X^{(rl/d,rm/d-1)}\, x^{rl/d}\, y^{rm/d-1} + \sum_{s=d+1+[\frac{3d-1}{l+m}]}^{\infty} X^{(sl/d-1,sm/d-2)}\, x^{sl/d-1}\, y^{sm/d-2},$$

$$\dot{y} = l\, x^{l-1}\, y^m + \sum_{k=l+m}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{l-3} Y^{(i,k-i)}\, x^i\, y^{k-i} + \sum_{j=0}^{m-2} Y^{(k-j,j)}\, x^{k-j}\, y^j\Big) +$$

$$+\, x^{l+1}\, y^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} Y^{(i+l+1,m-1)}\, x^i + x^{l-2}\, y^{m+2} \sum_{j=0}^{\infty} Y^{(l-2,m+j+2)}\, y^j +$$

$$+ \sum_{r=d+1}^{\infty} Y^{(rl/d-1,rm/d)}\, x^{rl/d-1}\, y^{rm/d} + \sum_{s=d+1+[\frac{3d-1}{l+m}]}^{\infty} Y^{(sl/d-2,sm/d-1)}\, x^{sl/d-2}\, y^{sm/d-1},$$

где для каждых $i,\, j \in \mathbb{Z}_+$, $r > d$ *и* $s > d + [\frac{3d-1}{l+m}]$ *полагаем* $X^{(i+l+2,m-2)} = 0$ *или* $Y^{(i+l+1,m-1)} = 0$, $X^{(l-1,m+j+1)} = 0$ *или* $Y^{(l-2,m+j+2)} = 0$, $X^{(rl/d,rm/d-1)} = 0$ *или* $Y^{(rl/d-1,rm/d)} = 0$, *и в случае* $m = 1$ *полагаем* $Y^{(sl/d-2,sm/d-1)} = 0$, *а в случае* $m \geq 2$ *полагаем* $X^{(sl/d-1,sm/d-2)} = 0$ *или* $Y^{(sl/d-2,sm/d-1)} = 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае в степенях $k > l+m$ существует лишь один мономиальный гамильтонов резонансный набор $\mathfrak{S}$ (см. [9]), который в то же время является усеченным и состоит из мономов $x^p\, y^q$, где либо $p < l-1$, либо $q < m-1$, либо $p = r\, l/d - 1$, $q = r\, m/d - 1$ с $r \geq d$. Отсюда с учетом теоремы 1 и приведенных вслед за ней рассуждений немедленно вытекает доказываемое утверждение. $\square$

При $l = 2$, $m = 1$ отсюда вытекает [7, теор. $7, \alpha = -1/2$].

Следствие 3. *Система* (1) *с невозмущенной частью* $(-x^m\, y^{m-1},\, x^{m-1}\, y^m)$ *с* $m \geq 1$ *формально эквивалентна системе вида*

$$\dot{x} = -x^m\, y^{m-1} + \sum_{k=2m}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{m-2} X^{(i,k-i)}\, x^i\, y^{k-i} + \sum_{j=0}^{m-3} X^{(k-j,j)}\, x^{k-j}\, y^j \Big) +$$

$$+\, x^{m+2}\, y^{m-2} \sum_{i=0}^{\infty} X^{(i+m+2,m-2)}\, x^i + x^{m-1}\, y^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} X^{(m-1,m+j+1)}\, y^j +$$

$$+\, x^m\, y^m \sum_{r=0}^{\infty} X^{(r+m+1,r+m)}\, x^{r+1}\, y^r,$$

$$\dot{y} = x^{m-1}\, y^m + \sum_{k=2m}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{m-3} Y^{(i,k-i)}\, x^i\, y^{k-i} + \sum_{j=0}^{m-2} Y^{(k-j,j)}\, x^{k-j}\, y^j \Big) +$$

$$+\, x^{m+1}\, y^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} Y^{(i+m+1,m-1)}\, x^i + x^{m-2}\, y^{m+2} \sum_{j=0}^{\infty} Y^{(m-2,m+j+2)}\, y^j +$$

$$+\, x^m\, y^m \sum_{r=0}^{\infty} Y^{(r+m,r+m+1)}\, x^r\, y^{r+1},$$

где для каждых i, j и $r \in \mathbb{Z}_+$ полагаем $X^{(i+m+2,m-2)} = 0$ или $Y^{(i+m+1,m-1)} = 0$, $X^{(m-1,m+j+1)} = 0$ или $Y^{(m-2,m+j+2)} = 0$, $X^{(r+m+1,r+m)} = 0$ или $Y^{(r+m,r+m+1)} = 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае в степенях $k > 2\,m$ существует лишь один мономиальный гамильтонов резонансный набор $\mathfrak{S}$ (см. [9]), который состоит из мономов $x^p\, y^q$, где либо $p < m-1$, либо $q < m-1$, либо $p = q$. Поскольку мономы вида $x^p\, y^p$ являются интегралами невозмущенной части, они не входят в усеченный гамильтонов резонансный набор. Отсюда с учетом теоремы 1 и приведенных вслед за ней рассуждений немедленно вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$\theta[k] = \begin{cases} 0, & \text{если } k < 0, \\ 1, & \text{если } k \geq 0. \end{cases}$$

Следствие 4. *Система* (1) *с невозмущенной частью* $(\pm y^{m-1},\, x^{l-1})$ *с* $l \geq m \geq 2$ *формально эквивалентна системе вида*

$$\dot{x} = \pm y^{m-1} + \sum_{j=1}^{m-2} y^{j-1} \Bigg(\sum_{\substack{i \not\equiv 0,-1 \bmod l \\ i > l(1-j/m)}} X^{(i,j-1)}\, x^i + \sum_{r=1+\theta[m-jl]}^{\infty} X^{(rl-1,j-1)}\, x^{rl-1} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} X^{(sl,j-1)}\, x^{sl} \Bigg) + \sum_{\substack{i \not\equiv 0 \bmod l \\ i > l/m}} X^{(i,m-2)}\, x^i\, y^{m-2},$$

$$\dot y = x^{l-1} + \sum_{j=1}^{m-2} y^j \Biggl(\sum_{\substack{i\not\equiv 0,-1 \bmod l\\ i>l(1-j/m)}} Y^{(i-1,j)}\, x^{i-1} + \sum_{r=1+\theta[m-jl]}^{\infty} Y^{(rl-2,j)}\, x^{rl-2} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} Y^{(sl-1,j)}\, x^{sl-1} \Biggr) + \sum_{\substack{i\not\equiv 0,-1 \bmod l\\ i>l}} Y^{(i-1,0)}\, x^{i-1} + \sum_{\substack{i\not\equiv 0 \bmod l\\ i>l/m}} Y^{(i-1,m-1)}\, x^{i-1}\, y^{m-1},$$

где для каждых $i \not\equiv 0 \mod l$, $i > l/m$, $j = \overline{1, m-2}$, $r > \theta[m - jl]$ *и* $s \in \mathbb{N}$ *полагаем* $X^{(i,m-2)} = 0$ *или* $Y^{(i-1,m-1)} = 0$, $X^{(rl-1,j-1)} = 0$ *или* $Y^{(rl-2,j)} = 0$, $X^{(sl,j-1)} = 0$ *или* $Y^{(sl-1,j)} = 0$, *за исключением случая* $l = m$, *в котором при* $j = m - 2$ *в парах* $\{X^{(sm,m-3)}, Y^{(sm-1,m-2)}\}$ *полагаем* $X^{(sm,m-3)} = 0$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $\gamma = (m/d,\, l/d)$, $\chi = l\,m/d$, $H = x^l/l \mp y^m/m$, где $l \ge m \ge 2$ и $d = \text{НОД}(l,\, m)$.

Достаточно показать, что в обобщенных степенях $k > l\,m/d$ можно выбрать гамильтонов резонансный набор $\mathfrak{S}$, который состоит из мономов $x^p\, y^q$, где $p \not\equiv -1 \bmod l$ и $q < m-1$, и усеченный гамильтонов резонансный набор, состоящий из мономов $x^p\, y^q$, где либо $p \not\equiv -1,\, 0 \bmod l$ и $q = 0$, либо $p \not\equiv -1 \bmod l$ и $0 < q < m-1$. Пусть $R = \sum_{p,q=0}^{\infty} R^{(p,q)}\, x^p\, y^q \in \mathfrak{R}$. Имеем $\widehat{H}^{\,*} = y\,(\partial^{l-1}/\partial x^{l-1}) \pm x\,(\partial^{m-1}/\partial y^{m-1})$, откуда

$$\sum_{i=l-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (l-1)!\, C_i^{l-1}\, R^{(i,j)}\, x^{i-l+1}\, y^{j+1} \pm \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=m-1}^{\infty} (m-1)!\, C_j^{m-1}\, R^{(i,j)}\, x^{i+1}\, y^{j-m+1} = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при x^{i+1}, y^{j+1} и $x^{i+1}\, y^{j+1}$, получаем уравнения

$$R^{(i,m-1)} = 0, \quad R^{(l-1,j)} = 0, \quad (l-1)!\, C_{i+l}^{l-1}\, R^{(i+l,j)} \pm (m-1)!\, C_{j+m}^{m-1}\, R^{(i,j+m)} = 0.$$

Отсюда по индукции находим, что $R^{(i,km-1)}$, $R^{(kl-1,j)} = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и, кроме того, R однозначно определяется своими коэффициентами $R^{(p,q)}$ с $q < m-1$. Следовательно, множество таких мономов образует гамильтонов резонансный набор. Нужный усеченный набор получается исключением из найденного гамильтонова резонансного набора мономов, неортогональных степеням $H = x^l/l \mp y^m/m$.

Отсюда с учетом теоремы 1 и приведенных вслед за ней рассуждений немедленно вытекает доказываемое утверждение. □

При $m = 2$ полученная ОНФ совпадает с НФ второго порядка, полученной Байдером и Сандерсом [3]. Отметим, что в последнем примере из-за громоздкости формул выписаны не все возможные структуры ОНФ. В случае $l = 3$, $m = 2$ это сделано в [8, т. 4], а в случае $l = 4$, $m = 2$ — в [5, теор. 3].

Литература

1. *Takens F.* Singularities of vector fields // IHES. 1974. Vol. 43, N 2. P. 47–100.

2. *Algaba A., Gamero E., Garcia C.* The integrability problem for a class of planar systems // Nonlinearity. 2009. Vol. 22. P. 395–420.

3. *Baider A., Sanders J.* Further reduction of the Takens—Bogdanov Normal Form // Journal of Differential Equations. 1992. Vol. 99, N 2. P. 205–244.

4. *Белицкий Г. Р.* Инвариантные нормальные формы формальных рядов // Функциональный анализ и его приложения. 1979. Т. 13. Вып. 1. С. 59–60.

5. *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 154–170.

6. *Басов В. В., Федорова Е. В.* Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные нормальные формы // Дифференц. уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal). 2010, № 4. С. 49–85.

7. *Басов В. В., Скитович А. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1016–1029.

8. *Басов В. В., Федотов А. А.* Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 1. С. 25–30.

9. *Басов В. В., Ваганян А. С.* Нормальные формы гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения и процессы управления (Эл. журнал http://www.math.spbu.ru/diffjournal). 2010, № 4. С. 86–107.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Сведения об авторах

Басов Владимир Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент; vlvlbasov@rambler.ru

Ваганян Артур Суренович — аспирант; armay@yandex.ru

GENERALIZED NORMAL FORMS OF TWO-DIMENSIONAL AUTONOMOUS SYSTEMS WITH A HAMILTONIAN UNPERTURBED PART

Vladimir V. Basov, Artur S. Vaganyan

St.Petersburg State University, Universitetskiy pr., 28, Petrodvorets, 198504, Russian Federation; vlvlbasov@rambler.ru, armay@yandex.ru

A new effective method for finding the structures of generalized normal forms (GNF) of two-dimensional autonomous systems with a quasi-homogeneous Hamiltonian unperturbed part in a neighbourhood of the equilibrium is presented. GNFs for systems with the unperturbed part represented by a vector with monomial components are given explicitly. The obtained GNFs are compared to the known results by Takens, Baider and Sanders, Basov et al. Refs 9.

Keywords: normal forms, formal transformations.