УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИСТОВЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ТРЕХМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Н. А. Бегун

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В этой статье мы рассматриваем малые C^1-возмущения дифференциальных уравнений. Мы вводим понятия слабо гиперболического множества K и листа Υ системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Липшицево условие не предполагается. Мы показываем, что если возмущение достаточно мало, то существует непрерывное отображение $h : \Upsilon \longrightarrow \Upsilon^Y$, где Υ^Y — лист возмущенной системы. Библиогр. 6 назв.

Ключевые слова: устойчивость, инвариантное множество, малые возмущения, гиперболические структуры.

Введение. Вопросы, связанные с устойчивостью слабо гиперболических инвариантных множеств, являются одними из основных в современной теории дифференциальных уравнений. В работах [1] и [2] В. А. Плисс и G. R. Sell изучали устойчивость слабо гиперболических инвариантных множеств, предполагая, что нейтральное и устойчивое подпространства соответствующих линеаризованных систем удовлетворяют условию Липшица. Они показали, что при достаточно малых C^1-возмущениях слабо гиперболическое инвариантное множество является устойчивым. Другими словами, возмущенная система имеет слабо гиперболическое инвариантное множество в малой окрестности слабо гиперболического инвариантного множества невозмущенной системы. В то же время известно, что липшицевость нейтральных и устойчивых подпространств является весьма существенным ограничением. В работах [4] и [5] рассматривалась проблема устойчивости инвариантных множеств двумерных периодических систем, не обладающих вышеупомянутым свойством. Для этих целей было введено понятие листа слабо гиперболического инвариантного множества и была построена система координат в окрестности листового инвариантного множества. Оказалось, что метод, позволивший построить эти координаты, неприменим в n-мерном случае. В данной статье произведено построение координат и доказана устойчивость слабо гиперболического инвариантного множества для случая $n = 3$.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$, а X — это C^1-функция, действующая из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^3$. Предполагается, что существует число $\omega > 0$ такое, что

$$X(t + \omega, x) = X(t, x).$$

Обозначим через $x(t, t_0, x_0)$ максимально продолженное решение системы (1.1), удовлетворяющее условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Заметим, что в силу периодичности системы (1.1) мы можем провести факторизацию

$$t \sim t + kw, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00624).

и в дальнейшем рассматривать систему в пространстве $\Xi = S \times \mathbb{R}^3$ (так называемое цилиндрическое пространство), где S — это окружность длины ω.

Обозначим через $\Phi(t, t_0, x_0)$ фундаментальную матрицу линейной системы

$$\dot{x} = \frac{\partial X(t, x(t, t_0, x_0))}{\partial x}\, x, \tag{1.2}$$

удовлетворяющую условию $\Phi(t_0, t_0, x_0) = I$, где I — тождественный оператор на $\mathbb{R}^3$.

Будем говорить, что система (1.2) слабо гиперболична на интервале $J \subset \mathbb{R}$ с константами a, λ_1 и λ_2, если $\lambda_2 < \lambda_1$, $\lambda_1 > 0$, $a \geq 1$, и существуют дополняющие друг друга линейные подпространства $U^n(t, t_0, x_0)$ и $U^s(t, t_0, x_0)$, $\dim U^n(t, t_0, x_0) = k$, $\dim U^s(t, t_0, x_0) = 3 - k$, $0 \leq k \leq 3$ такие, что

$$\Phi(t, t_0, x_0) U^s(t_0, t_0, x_0) = U^s(t, t_0, x_0),$$

$$\Phi(t, t_0, x_0) U^n(t_0, t_0, x_0) = U^n(t, t_0, x_0),$$

для любого $t \in J$ и если $\bar{x} \in U^s(\tau, t_0, x_0)$, то

$$|\Phi(t, t_0, x_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_1(t-\tau)}, \tag{1.3}$$

для $t \geq \tau$, $t, \tau \in J$, и если $\bar{x} \in U^n(\tau, t_0, x_0)$, то

$$|\Phi(t, t_0, x_0)\Phi^{-1}(\tau, t_0, x_0)\bar{x}| \leq a|\bar{x}|e^{-\lambda_2(t-\tau)}, \tag{1.4}$$

для $t \leq \tau$, $t, \tau \in J$.

Линейное подпространство $U^s(t_0, x_0) = U^s(t_0, t_0, x_0)$ называется устойчивым линейным подпространством, линейное подпространство $U^n(t_0, x_0) = U^n(t_0, t_0, x_0)$ — нейтральным линейным подпространством.

Заметим, что если $k = 1$, то задача решается методами, изложенными в статьях [4] и [5]. В этой работе рассматривается случай $k = 2$. Таким образом, пространства U^s являются прямыми, пространства U^n — плоскостями.

Предположим, что существует $K \subset \Xi$ — компактное инвариантное множество системы (1.1).

Положим $K_{t_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (t_0, x) \in K\}$.

Множество K будем называть слабо гиперболическим, если выполнены следующие два условия:

(1) линейная система (1.2) слабо гиперболична на $\mathbb{R}$ с константами a, λ_1 и λ_2 для любой точки $(t_0, x_0) \in K$;

(2) существует $r > 0$ такое, что для любой точки $(t_0, x_0) \in K$ существует 2-мерный диск $\widehat{D}(t_0, x_0) \subset K_{t_0}$ радиуса r, такой что
(i) x_0 — центральная точка $\widehat{D}(t_0, x_0)$;
(ii) если $x \in \widehat{D}(t_0, x_0)$, то в точке (t_0, x) линейное подпространство $U^n(t_0, x)$ касается диска $\widehat{D}(t_0, x_0)$;
(iii) множество

$$D(t_0, x_0) = \{(t, x) : |t - t_0| < r, x \in \widehat{D}(t, x(t, t_0, x_0))\}$$

является локально инвариантным.

В этой работе мы не предполагаем липшицеву зависимость $U^n(t_0, x_0)$ и $U^s(t_0, x_0)$ от x_0, теряя, очевидно, при этом свойство единственности дисков.

Вместо липшицевости мы потребуем выполнения следующего условия:
(iv) если $\widehat{D}_1(t_0, x_0)$ и $\widehat{D}_2(t_0, x_0)$ — это два диска в точке (t_0, x_0) со свойствами (i),(ii),(iii), то $\widehat{D}_1(t_0, x_0) = \widehat{D}_2(t_0, x_0)$.

Известно, что если K является слабо гиперболическим, то существует $\alpha > 0$ такое, что $\angle(U^s(t_0, x_0), U^n(t_0, x_0)) > \alpha$ для любых $(t_0, x_0) \in K$. Не умаляя общности, будем считать, что $\alpha < 0.1$.

Для $(t_0, x_0) \in K$ определим множества $\Upsilon_1(t_0, x_0), \Upsilon_2(t_0, x_0), \ldots, \Upsilon(t_0, x_0)$ следующим образом:

$$\Upsilon_1(t_0, x_0) = \bigcup_{(t,x)\in D(t_0,x_0)} D(t,x), \quad \Upsilon_{i+1}(t_0, x_0) = \bigcup_{(t,x)\in \Upsilon_i(t_0,x_0)} D(t,x) \text{ для } i \geq 1,$$

$$\Upsilon(t_0, x_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Upsilon_i(t_0, x_0).$$

Множество $\Upsilon(t_0, x_0)$ будем называть *листом, проходящим через* (t_0, x_0). В том случае, когда нам не важна точка (t_0, x_0), мы будем обозначать лист просто Υ.

Введем обозначение

$$\Upsilon_{t_0} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (t_0, x) \in \Upsilon\}.$$

2. Наряду с системой (1.1) рассмотрим ее возмущение

$$\dot{y} = X(t, y) + Y(t, y), \tag{2.1}$$

где Y — это C^1-функция, действующая из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^3$.

Функция Y тоже предполагается ω-периодичной, т. е.

$$Y(t + \omega, y) = Y(t, y), \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $y(t, t_0, x_0)$ максимально продолженное решение системы (2.1), удовлетворяющее условию $y(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Сформулируем основную теорему.

Теорема. *Пусть K — компактное слабо гиперболическое инвариантное множество системы* (1.1). *Предположим, что выполнено свойство единственности дисков. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если*

$$\|Y\|_{C^1} \leq \delta,$$

а Υ — это лист, проходящий через $(t', x') \in K$, то существует непрерывное отображение

$$h : \Upsilon \longrightarrow \Xi,$$

удовлетворяющее условиям
(0) *если $h(t_0, x_0) = (t_1, y_1)$, то $t_1 = t_0$;*
(1) *$|h(t, x) - (t, x)| \leq \varepsilon$;*
(2) *$\Upsilon^Y = h(\Upsilon)$ — это инвариантное множество системы* (2.1)*;*
(3) *линейная система*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial(X(t, y(t, t_0, y_0)) + Y(t, y(t, t_0, y_0)))}{\partial y} y \tag{2.2}$$

слабо гиперболична для любой точки $(t_0, y_0) \in \Upsilon^Y$*;*
(4) *нейтральное подпространство* $U_Y^n(t_0, y_0)$ *системы (2.2) касается множества* $h(t_0, \widehat{D}(t_0, x_0))$ *в точке* (t_0, y_0)*, где* $(t_0, y_0) = h(t_0, x_0)$*;*
(5) *множество*

$$K^Y = \bigcup_{\Upsilon \in K} \Upsilon^Y$$

является замкнутым.

Доказательство. Зафиксируем число $\sigma > 0$ такое, что $11\sigma = \min(\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2)$.

Зафиксируем $T > 0$, для которого выполнены следующие два условия:

$$e^{-(\lambda_1 - \sigma)T} \le \frac{\sin(\alpha/4)}{1000a^2}, \quad e^{-(\lambda_1 - 3\sigma)T} \le \frac{\sin(\alpha/5)}{500a^2}. \tag{2.3}$$

Зафиксируем c, $0 < c \le 1/10$, такое, что для любого вектора ζ, удовлетворяющего неравенству

$$\angle(U^n(t_0, x_0), \zeta) \le c\alpha, \quad (t_0, x_0) \in K, \tag{2.4}$$

выполнены неравенства

$$\angle(U^n(t, t_0, x_0), \Phi(t, t_0, x_0)\zeta) \le \frac{\alpha}{4}, \quad 0 \le t - t_0 \le 2T,$$

и

$$\angle(U^n(t, t_0, x_0), \Phi(t, t_0, x_0)\zeta) \le \frac{c\alpha}{256}, \quad T \le t - t_0 \le 2T.$$

Существование такого c доказано в работе [4].

Пусть $N(t_0, x_0) \subset \{t = t_0\} \times \mathbb{R}^3$, $(t_0, x_0) \in K$, — 1-мерное подпространство, перпендикулярное $U^n(t_0, x_0)$ в точке (t_0, x_0).

По выбранному c зафиксируем $r > 0$ такое, что для любых $(t_0, x_0), (t_0, x_1) \in K$ таких, что $|x_0 - x_1| \le r$ и $x_1 \in \widehat{D}(t_0, x_0)$, выполнено

$$\angle(U^n(t_0, x_0), x_0 - x_1) \le c\alpha, \tag{2.5}$$

$$\sin \angle(U^n(t_0, x_0), x_0 - x_1) \le \frac{1}{10}, \tag{2.6}$$

$$\angle(U^n(t_0, x_0), U^n(t_0, x_1)) \le \frac{c\alpha}{20}, \tag{2.7}$$

$$\sin(\angle(U^n(t_0, x_0), U^n(t_0, x_1))) \le \frac{1}{20}. \tag{2.8}$$

Из теоремы Перрона об устойчивом многообразии следует, что для любой точки $(t_0, x_0) \in K$ существует 1-мерный диск $D^p(t_0, x_0)$ (так называемый диск Перрона) такой, что если $x_1 \in D^p(t_0, x_0)$, то

$$|x(t, t_0, x_1) - x(t, t_0, x_0)| \le 2a\, |x_1 - x_0|\, e^{-(\lambda_1 - \sigma)(t - t_0)} \tag{2.9}$$

при $t \ge t_0$.

Известно также, что радиус b диска $D^p(t_0, x_0)$ не зависит от (t_0, x_0) и диск $D^p(t_0, x_0)$ сколь угодно мало (при должном выборе b) отличается от $U^s(t_0, x_0)$.

Заметим, что диски Перрона $D^p(t_0, x_0)$ непрерывно зависят от $(t_0, x_0) \in K$.

Зафиксируем такое χ, что диски $D^p(t,x)$, $(t,x) \in D(t_0,x_0)$ образуют расслоение в χ-окрестности диска $D(t_0,x_0)$ для любой точки $(t_0,x_0) \in K$. Существование такого χ было доказано в [6].

Нашей задачей будет построение координат в окрестности листа Υ.

Заметим, что в силу отсутствия липшицевой зависимости угла между $U^n(t,x)$ от точки x мы не можем воспользоваться теоремой о трубчатой окрестности. В противном случае, в качестве координат мы могли бы рассмотреть пару (v,u), где

$$v \in \Upsilon, \quad u \in N(v).$$

Подобные рассуждения были проведены в [1].

Зафиксируем $(0,x) \in \Upsilon$. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 граничные точки диска $\widehat{D}(0,x)$ такие, что

$$|x_i - x_j| \geq r, \quad i,j = 1,2,3, \quad i \neq j,$$

$$\frac{\pi}{6} < \angle(x_i x_j, x_i x_k), < \frac{\pi}{2}, \quad i,j,k = 1,2,3.$$

(Такие точки можно выбрать при достаточно малом r).

Обозначим через S плоскость, проходящую через точки x_1, x_2, x_3. Выберем r достаточно малым для того, чтобы

$$\angle(U^n(0,x), S) \leq \frac{c\alpha}{20}, \quad \sin(\angle(U^n(0,x), S) \leq \frac{1}{20}.$$

Обозначим через z_i точки, лежащие на $N(0,x_i)$, $i = 1,2,3$, такие, что

$$|x_i - z_i| = \frac{r}{5}.$$

Будем считать, что точки z_i лежат по одну сторону от плоскости S.

Оценим расстояние от точек z_i, $i = 1,2,3$, до плоскости S. Опустим перпендикуляры $z_i h_i$, $i = 1,2,3$, из точек z_i на плоскость S. Легко видеть, что

$$|z_i - h_i| = |x_i - z_i| \sin \angle z_i x_i h_i.$$

Учитывая (2.7), получим, что $|z_i - h_i| \geq \frac{r}{10}$.

Каждой точке $\bar{x} \in x_1 x_2$ сопоставим точку $\bar{z} \in z_1 z_2$ такую, что

$$\frac{|\bar{z} - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|\bar{x} - x_1|}{|x_2 - x_1|},$$

и проведем через эти точки прямую $\bar{x}\bar{z}$.

Зафиксируем точку $\bar{z}$, обозначим $\frac{|\bar{z} - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \mu$ и оценим угол между $\bar{x}\bar{z}$ и $x_1 z_1$. Очевидно, что

$$\overrightarrow{\bar{x}\bar{z}} = (1-\mu)\overrightarrow{x_1 z_1} + \mu \overrightarrow{x_2 z_2}.$$

Отсюда, учитывая близость углов $\angle z_1 x_1 x_2$ и $\angle z_2 x_2 x_1$ и то, что $|\bar{x}\bar{z}| \geq \frac{r}{10}$, получим, что $\angle(\bar{x}\bar{z}, x_1 z_1) \leq c\alpha/15$.

Подобную операцию проделаем со всеми точками, лежащими внутри и на границе треугольника $x_1 x_2 x_3$.

Каждой такой точке $\tilde{x}$ сопоставим пару чисел (λ, ν), $0 \leq \lambda, \nu \leq 1$, по следующему правилу. Проведем через $\tilde{x}$ прямую, параллельную $x_1 x_2$. Обозначим через $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ точки пересечения этой прямой с прямыми $x_1 x_3$ и $x_2 x_3$ соответственно.

Положим

$$\lambda = \frac{|\tilde{x}_1 - x_1|}{|x_3 - x_1|} = \frac{|\tilde{x}_2 - x_2|}{|x_3 - x_2|},$$

$$\nu = \frac{|\tilde{x} - \tilde{x}_1|}{|\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1|}.$$

Ровно таким же образом сопоставим пару чисел каждой точке $\tilde{z}$, лежащей внутри треугольника $z_1z_2z_3$.

Соединим прямой точки $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$, соответствующие одинаковой паре чисел (λ, ν). Обозначим $\hat{x} \in \widehat{D}(0, x)$ точку пересечения прямой $\tilde{x}\tilde{z}$ с Υ_0. Обозначим эту прямую $M(0, \hat{x})$.

Заметим, что

$$\angle(N(0, \hat{x}), M(0, \hat{x})) \leq \frac{c\alpha}{10}.$$

Легко видеть, что прямые $M(0, \hat{x})$ образуют координаты в $\frac{r}{10}$-окрестности множества, гомеоморфного треугольнику (далее — криволинейный треугольник), лежащего в Υ_0.

Известно, что каждое двумерное многообразие можно триангулировать. В силу компактности множества K и равномерной непрерывности пространств U^n мы можем считать, что все криволинейные треугольники, образующие триангуляцию, удовлетворяют условиям, наложенным на криволинейный треугольник $x_1x_2x_3$. При достаточно малом r, вводя вышеизложенным способом координаты на каждом криволинейном треугольнике, получим координаты в $\frac{r}{10}$-окрестности листа Υ на уровне $t = 0$.

Далее будем рассматривать листы двух типов. К первому отнесем те, которые на уровне $t = 0$ представимы в виде объединения конечного числа криволинейных труегольников (разумеется, каждый такой лист будет замкнут). Ко второму типу отнесем все остальные листы.

Сначала изучим листы второго типа.

Построим координаты на уровне $t = \tilde{t}$. Заметим, что при изменении времени мы можем через промежуток $t = k\omega$ пересечь ту область, на которой уже были построены координаты (такое может случиться в силу того, что пространство Ξ является цилиндрическим).

В случае, если вышеупомянутое пересечение не происходит, мы будем выбирать триангуляцию непрерывной по t и потребуем от всех криволинейных треугольников выполнения условий, наложенных на криволинейный треугольник $x_1x_2x_3$. Таким образом получим непрерывные координаты в окрестности листа Υ.

В том случае, если через промежуток $t = k\omega$ произойдет пересечение с областью, на которой мы уже построили координаты, мы введем функции $r_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что $\{(t, r_i(t))\} \in \Upsilon$, $r_i(0) = r_i(k\omega) = x_i$, и на каждом уровне $\tilde{t}$ криволинейный треугольник $r_1(\tilde{t})r_2(\tilde{t})r_3(\tilde{t})$ удовлетворяет условиям, наложенным на криволинейный треугольник $x_1x_2x_3$. Триангуляцию на каждом уровне $t = \tilde{t}$ будем выбирать таким образом, чтобы одним из ее элементов являлся криволинейный треугольник $r_1(\tilde{t})r_2(\tilde{t})r_3(\tilde{t})$.

Кроме того, мы будем выбирать триангуляцию непрерывной от t. Таким образом получим непрерывные координаты в окрестности листа Υ.

Перейдем к изучению листов первого типа.

Напомним, что в этом случае, объединяя диски на уровне $t = 0$, мы получаем замкнутое множество. Обозначим его $\widetilde{D}(0, x)$.

Докажем сначала, что в этом случае найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что через время $k\omega$ множество $\widetilde{D}(0, x)$ перейдет само в себя.

Предположим противное.

Обозначим

$$\widetilde{D}_i = x(i\omega, 0, \widetilde{D}(0, x)), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим множество

$$K_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (0, x) \in K\}.$$

Заметим, что $\widetilde{D}_i \subset K_0$, $i \in \mathbb{Z}$.

Зафиксируем число $\eta : 0 < \eta < \chi$. В силу компактности K существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что множество K_0 не может пересекаться более чем с N непересекающимися шарами радиуса η.

Рассмотрим множества $\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_{N-1}$. Эти множества в силу нашего предположения и в силу единственности дисков не могут пересекаться.

Обозначим

$$I = \{0, 1, \ldots N - 1\}.$$

Обозначим также

$$\theta = \min_{i,j \in I} \operatorname{dist}(\widetilde{D}_i, \widetilde{D}_j).$$

Выберем теперь такое число $\widehat{N} \in \mathbb{N}$, что если $\tilde{x}$ принадлежит η-окрестности множества $\widetilde{D}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, то

$$\operatorname{dist}(x(\widehat{N}\omega, 0, \tilde{x}), x(\widehat{N}\omega, 0, \widetilde{D}_i)) < \theta.$$

Заметим также, что такое $\widehat{N}$ мы можем выбрать в силу слабой гиперболичности.

Рассмотрим теперь множества

$$\widetilde{D}_{-\widehat{N}}, \widetilde{D}_{-\widehat{N}+1}, \ldots, \widetilde{D}_{-\widehat{N}+N-1}.$$

Несложно видеть, что их η-окрестности не пересекаются, иначе мы бы получили, что

$$\min_{i,j \in I} \operatorname{dist}(\widetilde{D}_i, \widetilde{D}_j) < \theta.$$

Но это, очевидно, противоречит тому, что множество K_0 не может пересекаться более чем с N непересекающимися шарами радиуса η.

В результате, найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что через время $k\omega$ множество $\widetilde{D}(0, x)$ перейдет само в себя.

Далее построение координат проводится тем же образом, что и для листов второго типа.

Итак, мы ввели непрерывные координаты в окрестности листа Υ.

Положим $\beta = \min(\frac{\chi}{2}, r)$ и определим для каждой точки $(t_0, x_0) \in K$ множество

$$\Gamma(t_0, x_0, \beta) = \left\{x + y : x \in \widehat{D}(t_0, x_0), y \in M(t_0, x), |y| \leq \beta\right\}.$$

Рассмотрим отображение

$$\varphi = \varphi_{(t_0, x_0)} : \Gamma(t_0, x_0, \beta) \longrightarrow \widehat{D}(t_0, x_0), \tag{2.10}$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi(x+y) = x, \quad x \in \widehat{D}(t_0, x_0), \ y \in M(t_0, x). \tag{2.11}$$

Заметим, что если $x_1 \in \widehat{D}(t_0, x_0)$, то $\varphi_{(t_0,x_0)}$ и $\varphi_{(t_0,x_1)}$ согласованы на множестве $\Gamma(t_0, x_0, \beta) \bigcap \Gamma(t_0, x_1, \beta)$.

Липшицевость отображения φ доказывается тем же способом, что и в работе [4]. Таким образом, мы ввели липшицевы координаты в окрестности листа Υ.

Все дальнейшие рассуждения проводятся тем же образом, что и в статьях [4, 5].

Литература

1. *Pliss V. A., Sell G. R.* Perturbations of attractors of differential equations // J. of Differential Equations, 1991. Vol. 92. P. 100–124.

2. *Pliss V. A., Sell G. R.* Approximation Dynamics and the Stability of Invariant Sets // J. of Differential Equations, 1997. Vol. 149. P. 1–51.

3. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977.

4. *Бегун Н. А.* Об устойчивости листовых инвариантных множеств двумерных периодических систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 4. С. 3–12.

5. *Бегун Н. А.* О замкнутости листового инвариантного множества возмущенной системы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 1. С. 80–88.

6. *Монаков В. Н.* Расположение интегральных поверхностей у слабо нелинейных систем дифференциальных уравнений // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1973. Вып. 1. С. 68–74.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Сведения об авторе

Бегун Никита Андреевич — кандидат физико-математических наук; matandmeh@gmail.com

ON THE STABILITY OF LEAFED INVARIANT SETS OF THIRDDIMENSION PERIODIC SYSTEMS

Nikita A. Begun

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; matandmeh@gmail.com

In this paper we study small C^1-perturbations of a differential equations. We introduce the concepts of a weakly hyperbolic set K and leaf Υ for a system of ordinary differential equations. Lipschitz condition is not suppose. We show, that if the perturbation is small enough, then there is a continuous mapping $h : \Upsilon \longrightarrow \Upsilon^Y$, where Υ^Y is a leaf of perturbed equation. Refs 6.

Keywords: stability, invariant set, small perturbations, hyperbolic structures.