УДК 517.9 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 3

ОТСЛЕЖИВАНИЕ ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

С. Г. Крыжевич

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Доказывается результат о наличии «частичного» отслеживания для отображений самого общего вида. Показывается, что для любого отображения метрического компакта в себя и любой достаточно точной псевдотраектории найдется бесконечная подпоследовательность некоторой траектории, поточечно аппроксимирующая подпоследовательность рассматриваемой псевдотраектории с теми же номерами. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: отслеживание, инвариантные меры, топологическая динамика.

Отслеживание является одним из важнейших свойств динамических систем. Если система обладает этим свойством, в окрестности любой достаточно точной псевдотраектории (приближенного решения) имеется истинная траектория, поточечно к ней близкая. Это свойство имеет особенное значение для численного моделирования динамических систем. Известно большое количество различных типов отслеживания и критериев их выполнимости. Теория отслеживания является важнейшим разделом теории динамических систем. Обзор результатов в рассматриваемой области заслуживает отдельной статьи, впрочем, это уже подробно проделано в работах [1–3].

Мы ограничимся двумя формальными определениями.

Определение 1. *Пусть X — метрическое пространство с метрикой d, $f : X \to X$ — гомеоморфизм, $\delta > 0$. Назовем последовательность $p_k \in X$ ($k \in \mathbb{Z}$) δ-псевдотраекторией, если для любого $k \in \mathbb{Z}$ справедлива оценка $d(f(p_k), p_{k+1}) \le \delta$.*

Определение 2. *Говорим, что гомеоморфизм f обладает свойством отслеживания, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой δ-псевдотраектории p_k найдется такая точка $x \in X$, что*

$$d(f^k(x), p_k) \le \varepsilon$$

для любого $k \in \mathbb{Z}$.

Разумеется, ожидать отслеживания для гомеоморфизма общего вида (или даже диффеоморфизма в случае, когда X является гладким многообразием) не приходится. Большинство критериев отслеживания так или иначе связывают это свойство с понятиями гиперболичности и структурной устойчивости, например, аносовские диффеоморфизмы свойству отслеживания удовлетворяют.

Тем не менее оказывается, что имеется общий результат, справедливый для непрерывных отображений метрических компактов (мы не требуем даже обратимости). В этом случае мы можем рассматривать положительные полутраектории точек $\{T^k(x) : k \ge 0\}$ и «псевдополутраектории», которые мы будем называть, допуская вольность, псевдотраекториями.

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проект 6.38.223.2014) и РФФИ (грант №12-01-00275 и 14-01-00202).

Основным результатом этой заметки является следующее утверждение, являющееся очень слабой формой теоремы об отслеживании. Грубо говоря, у любой достаточно точной псевдотраектории есть бесконечный кусок, который отслеживается куском истинной траектории с теми же номерами.

Теорема 1. *Пусть X — метрический компакт, $T : X \to X$ — непрерывное отображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой δ-псевдотраектории p_k $(k \geq 0)$ отображения T существует последовательность $k_j \to \infty$ и точка $x_0 \in X$ такие, что*

$$d(p_{k_j}, T^{k_j}(x_0)) \leq \varepsilon \tag{1}$$

для любого $j \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Мы будем пользоваться идеями доказательства теоремы Крылова—Боголюбова [4, Теорема 4.1.1].

Пусть утверждение теоремы неверно. Тогда найдутся константа $\varepsilon > 0$, последовательность $\delta_m \to 0$ и последовательность δ_m-псевдотраекторий p_k^m, ни одна из которых не может быть ε-отслежена в смысле неравенств (1). Рассмотрим целочисленную последовательность $s_j \to \infty$ такую, что для любой непрерывной функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ найдется предел

$$J_m(\varphi) := \lim_{j \to \infty} \frac{1}{s_j} \sum_{i=0}^{s_j - 1} \varphi(p_i^m).$$

Все эти функционалы $J_m : C(X) \to \mathbb{R}$ линейны, непрерывны и положительны. В силу теоремы Рисса о представлении они однозначно определяют борелевские вероятностные меры μ_m на X по формуле

$$J_m(\varphi) = \int_X \varphi \, d\mu_m.$$

Множество всех борелевских мер компактно в $*$-слабой топологии по теореме Банаха—Алаоглу. Не умаляя общности, предполагаем, что меры μ_m $*$-слабо сходятся к вероятностной мере μ_*. Покажем, что эта мера инвариантна. Фиксируем функцию $\varphi \in C(X)$, тогда

$$\begin{aligned} &\int_X ((\varphi \circ T) - \varphi) \, d\mu_* = \lim_{m \to \infty} (J_m(\varphi \circ T) - J_m(\varphi)) = \\ &\quad = \lim_{m \to \infty} \lim_{j \to \infty} \frac{1}{s_j} \left(\sum_{i=1}^{s_j - 1} (\varphi(T(p_{i-1}^m)) - \varphi(p_i^m)) + \varphi(T(p_{s_j-1}^m)) - \varphi(p_0^m) \right) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В самом деле, для выбранной функции φ и любого значения $\rho > 0$ можно предъявить такое $m_0 \in \mathbb{N}$, что если $m > m_0$, то

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \rho/2$$

при условии, что $d(x, y) \leq \delta_m$. Кроме того, возьмем $M = \max_X |\varphi|$ и выберем $j_0 \in \mathbb{N}$ столь большим, что $2M/s_j < \rho/2$ для любого $j > j_0$. Тогда абсолютное значение левой части равенства (2) не превосходит ρ. В силу произвольности ρ это и означает справедливость равенства (2). Выберем точку $\bar{x} \in X$ такой, что $\mu_*(B) \neq 0$, где $B = B_{\varepsilon/2}(\bar{x})$ — шар с центром в точке x радиуса $\varepsilon/2$. Заметим, что существует такое $m >$

0, что шар B содержит бесконечное число точек p_k^m, $k > 0$. В противном случае $J_m(\chi_B) = 0$ для всех m, где χ_B — характеристическая функция B. Тогда $\mu_m(B) = 0$ для всех m и $\mu_*(B) = 0$. Пусть последовательность $i_j \to \infty$ такова, что $p_{i_j}^m \in B$ для всех j.

Заметим, что для $K \in \mathbb{N}$, имеем

$$\mu_* \left(\bigcup_{j>K} T^{-i_j}(B) \right) \geq \mu_*(B) > 0.$$

Таким образом,

$$B_0 = \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{j>K} T^{-i_j}(B)$$

есть пересечение вложенной последовательности множеств, мера каждого из которых больше фиксированной положительной константы. Таким образом, $\mu_*(B_0) > 0$ и множество B_0 непусто.

Возьмем $x_0 \in B_0$. Для этой точки существует подпоследовательность $\{k_j\} \subset \{i_j\}$, $k_j \to \infty$ такая, что $T^{k_j}(x_0) \in B$. Следовательно, (1) выполнено для всех j. $\square$

В заключение заметим, что предположение о компактности пространства X существенно. Например, для тождественного отображения вещественной прямой аналог утверждения теоремы 1 очевидно неверен.

Литература

1. *Lee K., Sakai K.* Various shadowing properties and their equivalence // Discrete and Continuos Dynamical Systems. 2005. Vol. 13, N 2. P. 533–539.
2. *Palmer K. J.* Shadowing in dynamical systems: Theory and Applications. Springer, 2009.
3. *Pilyugin S. Yu.* Shadowing in dynamical systems // Lect. Notes Math. Vol. 1706. Springer-Verlag, 1999.
4. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge University Press, 1997.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Сведения об авторе

Крыжевич Сергей Геннадьевич — доктор физико-математических наук, доцент; kryzhevicz@gmail.com

SHADOWING ALONG SUBSEQUENCES FOR CONTINUOUS MAPPINGS

Sergei G. Kryzhevich

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; kryzhevicz@gmail.com

We prove a result on presence of a «partial» shadowing for the most general form of mappings. We demonstrate that for any mapping of a metric compact set into itself and any sufficiently precise pseudotrajectory there exists an infinite subsequence of an exact trajectory, approximating pointwise the subsequence of the considered pseudotrajectory with the same indices. Refs 4.

Keywords: shadowing, invariant measures, topological dynamics.