УДК 681.511.4+517.9 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 3

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ*

В. Б. Смирнова[1,2], *Н. В. Утина*[2], *А. И. Шепелявый*[1], *А. А. Перкин*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
Российская Федерация, 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, 4

Рассматриваются непрерывные и дискретные системы непрямого управления с периодическими векторными нелинейностями. Исследуется один из ключевых вопросов асимптотики таких систем — вопрос о существовании циклов в цилиндрическом фазовом пространстве. Установлены многопараметрические частотно-алгебраические критерии, гарантирующие отсутствие в цилиндрическом фазовом пространстве системы циклов определенной частоты. Библиогр. 12 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: фазовые системы, цилиндрическое фазовое пространство, циклы второго рода.

1. Введение. В статье рассматриваются непрерывные и дискретные нелинейные системы непрямого управления, содержащие периодические векторные нелинейности. Аргументы периодических функций принято называть угловыми координатами. Рассматриваемые системы с угловыми координатами являются фазовыми в смысле определений монографий [1, 2].

Изучению асимптотического поведения фазовых систем посвящена обширная литература. Одной из основных задач в этом направлении является задача о наличии или отсутствии предельных циклов. Системы с угловыми координатами обладают цилиндрическим фазовым пространством. Поэтому интерес представляют не только O-циклы, существующие в евклидовом пространстве, но и циклы, существующие в цилиндрическом пространстве и исчезающие при развертке его по одной или нескольким угловым координатам. Предельные циклы, существующие только в цилиндрическом фазовом пространстве, часто называют предельными циклами второго рода (в отличие от O-циклов — предельных циклов первого рода). В данной статье рассматриваются циклы второго рода.

Задача о существовании циклов второго рода для систем с цилиндрическим фазовым пространством решалась различными методами. Весьма распространенным при исследовании циклических решений конкретных систем фазовой синхронизации является метод гармонического баланса [3–5]. Однако было показано [6], что приближенный метод гармонического баланса может приводить к неверным результатам.

В статье [6] для непрерывных систем с одной угловой координатой установлены достаточные условия отсутствия циклов второго рода определенной частоты. Результаты имеют форму частотных неравенств с варьируемыми параметрами. На варьируемые параметры при этом наложены алгебраические ограничения. Частотный критерий отсутствия циклов второго рода получен в статье [6] соединением идеи Гарбера [7] о разложении предполагаемых периодических решений в ряды Фурье и процедуры

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00808).

Бакаева—Гужа, позволяющей строить для фазовых систем периодические функции Ляпунова [8]. В монографии [9] расширен класс используемых периодических функций Ляпунова. В статье [10] результаты статьи [6] распространяются на дискретные фазовые системы.

В данной статье для решения задачи об отсутствии циклов второго рода используется обобщение периодических функций и последовательностей Ляпунова, предложенное в статье [11]. Последнее обстоятельство в ряде случаев позволяет ослабить алгебраические требования на варьируемые параметры в частотных неравенствах и тем самым расширяет возможности применения частотных неравенств.

2. Условия отсутствия у непрерывной фазовой системы циклов второго рода определенной частоты. Рассмотрим фазовую систему вида

$$\begin{aligned} \tfrac{dz(t)}{dt} &= Az(t) + Bf(\sigma(t)), \\ \tfrac{d\sigma(t)}{dt} &= C^* z(t) + Rf(\sigma(t)) \quad (z \in \mathbf{R}^m, \quad \sigma \in \mathbf{R}^l), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, C, R — матрицы размеров $m \times m$, $m \times l$, $m \times l$, $l \times l$ соответственно, $z = ||z_k||$, $\sigma = ||\sigma_j||$, $f(\sigma)$ — l-мерная вектор-функция с компонентами $\varphi_j(\sigma_j)$ $(j = 1, \ldots, l)$, символом «$*$» обозначено эрмитово сопряжение.

Матрица A предполагается гурвицевой, пара (A, B) полностью управляемой, пара (A, C) полностью наблюдаемой. Предполагается, что функция $\varphi_j(\sigma_j)$ $(j = 1, \ldots, l)$ Δ_j-периодична, непрерывно дифференцируема, обладает хотя бы двумя нулями при $\sigma \in [0, \Delta_j)$. Для определенности предполагается, что

$$\int\limits_0^{\Delta_j} \varphi_j(\sigma)\, d\sigma \le 0 \quad (j = 1, \ldots, l). \tag{2}$$

Определение 1. Решение $\{z(t), \sigma(t)\}$ системы (1) называется предельным циклом второго рода, если можно указать такое $T > 0$ и такие целые числа I_j $(j = 1, \ldots, l)$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что выполнены равенства

$$z(T) = z(0), \tag{3}$$

$$\sigma_j(T) = \sigma_j(0) + I_j \Delta_j \quad (j = 1, \ldots, l). \tag{4}$$

Величина $\omega = 2\pi/T$ называется частотой предельного цикла второго рода.

Введем в рассмотрение передаточную функцию системы (1) от входа f к выходу $(-\dot{\sigma})$:

$$K(p) = -R + C^*(A - pE_m)^{-1}B \quad (p \in \mathbf{C}), \tag{5}$$

где E_m — $m \times m$-единичная матрица.

Введем также в рассмотрение числа

$$\alpha_{1j} = \inf_{\xi \in [0, \Delta_j)} \frac{d\varphi_j(\xi)}{d\xi}, \quad \alpha_{2j} = \sup_{\xi \in [0, \Delta_j)} \frac{d\varphi_j(\xi)}{d\xi} \quad (j = 1, \ldots, l) \tag{6}$$

и составим диагональные матрицы

$$A_k = \operatorname{diag}\{\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kl}\} \quad (k = 1, 2).$$

Заметим, что $\alpha_{1j}\alpha_{2j} < 0$ $(j = 1, \ldots, l)$.

Нам понадобятся далее следующие числовые характеристики нелинейных функций:

$$\nu_j = \frac{\int_0^{\Delta_j} \varphi_j(\xi)d\xi}{\int_0^{\Delta_j} |\varphi_j(\xi)|d\xi}, \quad \nu_{0j} = \frac{\int_0^{\Delta_j} \varphi_j(\xi)d\xi}{\int_0^{\Delta_j} |\varphi_j(\xi)|\sqrt{(1-\alpha_{1j}^{-1}\varphi_j'(\xi))(1-\alpha_{2j}^{-1}\varphi_j'(\xi))}d\xi} \quad (j = 1, \dots, l).$$

Для квадратной матрицы M будем использовать обозначение

$$\Re e M = \frac{1}{2}(M + M^*).$$

Теорема 1. *Пусть существует такое* $\omega_0 > 0$, *такая диагональная матрица* $æ = \mathrm{diag}\{æ_1, \dots, æ_l\}$, *положительно определенные диагональные матрицы* $\varepsilon = \mathrm{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l\}$, $\delta = \mathrm{diag}\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$, $\tau = \mathrm{diag}\{\tau_1, \dots, \tau_l\}$ *и такие* $a_j \in [0,1]$ $(j = 1, \dots, l)$, *что выполнены условия:*
1)

$$æK(0) - \delta - K^*(0)(\tau + \varepsilon)K(0) \geq 0; \tag{7}$$

2) для всех $\omega \geq \omega_0 > 0$ *справедливо неравенство*

$$\Re e\{æK(i\omega) - (K(i\omega) + i\omega A_1^{-1})^*\tau(K(i\omega) + i\omega A_2^{-1})\} - K^*(i\omega)\varepsilon K(i\omega) - \delta \geq 0 \quad (i^2 = -1); \tag{8}$$

3) квадратичные формы

$$Q_j(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon_j\xi^2 + \delta_j\eta^2 + \tau_j\zeta^2 + æ_j a_j \nu_j \xi\eta + æ_j(1 - a_j)\nu_{0j}\zeta\eta \quad (j = 1, 2, \dots, l)$$

являются положительно определенными.
Тогда у системы (1) нет циклов второго рода частоты $\omega \geq \omega_0$.

Доказательство. Здесь использована схема доказательства теоремы об оценках частоты циклов второго рода, приведенная в статье [6] и монографии [9].

Предположим, что решение $\{z(t), \sigma(t)\}$ является для системы (1) циклом второго рода частоты $\omega \geq \omega_0$. Пусть $T = 2\pi/\omega$. Рассмотрим векторную функцию

$$f(\sigma(t)) = ||\varphi_j(\sigma_j(t))||_{j=1,\dots,l}.$$

Она является T-периодической. Действительно,

$$\varphi_j(\sigma_j(t+T)) = \varphi_j(\sigma_j(t) + I_j\Delta_j) = \varphi_j(\sigma_j(t)) \quad (j = 1, \dots, l).$$

Разложим функцию $f(\sigma(t))$ в ряд Фурье:

$$f(\sigma(t)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k e^{ik\omega t} \quad (i^2 = -1). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Az(t) + BB_k e^{ik\omega t}, \\ \dot{\sigma}(t) &= C^*z(t) + RB_k e^{ik\omega t}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $k \in \mathbf{N}$. T-периодическое решение первого уравнения системы (10) имеет вид

$$z(t) = (ik\omega E_m - A)^{-1}BB_k e^{ik\omega t}.$$

Подставив его во второе уравнение (10), получим

$$\dot{\sigma}(t) = -K(i\omega k)B_k e^{ik\omega t}. \tag{11}$$

Из (9) и (11) следует, что для рассматриваемого цикла второго рода справедливо разложение

$$\dot{\sigma}(t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} K(i\omega k)B_k e^{ik\omega t}. \tag{12}$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} F_j(\sigma) &= \varphi_j(\sigma) - \nu_j|\varphi_j(\sigma)|, \\ \Phi_j(\sigma) &= \sqrt{(1-\alpha_{1j}^{-1}\varphi_j'(\sigma))(1-\alpha_{2j}^{-1}\varphi_j'(\sigma))}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\Psi_j(\sigma) = \varphi_j(\sigma) - \nu_{0j}\Phi_j(\sigma)|\varphi_j(\sigma)| \quad (j=1,\dots,l) \tag{14}$$

и диагональные матрицы

$$A = \operatorname{diag}\{a_1,\dots,a_l\}, \quad A_0 = E - A.$$

Введем в рассмотрение векторные функции F, Φ, Ψ с элементами F_j, Φ_j, Ψ_j $(j = 1,\dots,l)$ соответственно.

Определим для рассматриваемого цикла второго рода функцию

$$\begin{aligned} G(t) = {}& \dot{\sigma}^*(t)\varepsilon\dot{\sigma}(t) + f^*(\sigma(t))\text{æ}\dot{\sigma}(t) + f^*(\sigma(t))\delta f(\sigma(t)) + \\ & + (\dot{\sigma}(t) - A_1^{-1}\dot{f}(\sigma(t)))^*\tau(\dot{\sigma}(t) - A_2^{-1}\dot{f}(\sigma(t))) - \Psi^*(\sigma(t))A_0\text{æ}\dot{\sigma}(t) - F^*(\sigma(t))A\text{æ}\dot{\sigma}(t) \end{aligned}$$

и двумя различными способами проведем оценки функционала

$$J(T) = \int_0^T G(t)dt.$$

1. Используем формулы (13) и (14). Тогда

$$\begin{aligned} J(T) = \int_0^T \sum_{j=1}^{l} \{ & \varepsilon_j\sigma_j^2(t) + \delta_j\varphi_j^2(\sigma(t)) + \\ & + \tau_j(\dot{\sigma}_j(t) - \alpha_{1j}^{-1}\dot{\varphi}_j(\sigma_j(t)))(\dot{\sigma}_j(t) - \alpha_{2j}^{-1}\dot{\varphi}_j(\sigma_j(t))) - \\ & - a_j\text{æ}_jF_j(\sigma_j(t))\dot{\sigma}_j(t) - (1-a_j)\text{æ}_j\Psi_j(\sigma_j(t))\dot{\sigma}_j(t)\}dt = \\ & = \int_0^T \sum_{j=1}^{l} \{\varepsilon_j\sigma_j^2(t) + \delta_j\varphi_j^2(\sigma_j(t)) + \tau_j\dot{\sigma}_j^2(t)\Phi_j^2(\sigma(t)) + \\ & + \text{æ}_ja_j\nu_j|\varphi_j(\sigma_j(t))|\dot{\sigma}_j(t) + \text{æ}_j(1-a_j)\nu_{0j}|\varphi_j(\sigma_j(t))|\dot{\sigma}_j(t)\Phi_j(\sigma_j(t))\}dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Каждая из фигурных скобок в правой части цепочки равенств (15) равна выражению $Q_j(\dot{\sigma}_j(t), |\varphi_j(\sigma_j(t)|, \Phi_j(\sigma_j(t))\dot{\sigma}_j(t))$ $(j = 1,\dots,l)$, где квадратичные формы введены в условии 3 теоремы 1. Согласно указанному условию все эти квадратичные формы являются положительно определенными, так что

$$J(T) > 0. \tag{16}$$

2. Используем разложения (9) и (11). Заметим, что

$$\int_0^T F_j(\sigma_j(t))\dot\sigma_j(t)dt = \int_{\sigma_j(0)}^{\sigma_j(T)} F_j(\xi)d\xi = I_j\int_0^{\Delta_j} F_j(\xi)d\xi = 0, \tag{17}$$

$$\int_0^T \Psi_j(\sigma_j(t))\dot\sigma_j(t)dt = I_j\int_0^{\Delta_j} \Psi_j(\xi)d\xi = 0 \quad (j = 1,\ldots,l). \tag{18}$$

Рассмотрим отдельно интегралы от первых четырех слагаемых функции $G(t)$. Будем учитывать при этом, что для коэффициентов B_k в формуле (9) справедливы равенства

$$B_{-k} = \overline{B}_k \quad (k \in \mathbf{N}), \tag{19}$$

где символом «–» обозначено комплексное сопряжение, и

$$\int_0^T e^{ik\omega t}e^{ir\omega t}dt = \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq -k, \\ T, & \text{если } r = -k. \end{cases} \tag{20}$$

Нетрудно установить справедливость равенств

$$\int_0^T \dot\sigma^*(t)\text{æ}f(\sigma(t))dt = -\int_0^T (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} K(i\omega k)B_k e^{i\omega kt})^*\text{æ}(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} B_r e^{i\omega rt})dt =$$

$$= -\int_0^T (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k^* K^*(i\omega k)e^{-i\omega kt})\text{æ}(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} B_r e^{i\omega rt})dt =$$

$$= -T\{B_0^*\text{æ}K(0)B_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} B_k^*\Re e(\text{æ}K(i\omega k)B_k\}; \tag{21}$$

$$\int_0^T f^*(\sigma(t))\delta f(\sigma(t))dt =$$

$$= \int_0^T (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k^* e^{-i\omega kt})\delta(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} B_r e^{i\omega rt})dt = T\{B_0^*\delta B_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} B_k^*\delta B_k\}; \tag{22}$$

$$\int_0^T \dot\sigma^*(t)\varepsilon\dot\sigma(t)dt = \int_0^T (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} K(i\omega k)B_k e^{i\omega kt})^*\varepsilon(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} K(i\omega r)B_r e^{i\omega rt})dt =$$

$$= T\{B_0^*K^*(0)\varepsilon K(0)B_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} B_k^*K^*(i\omega k)\varepsilon K(i\omega k)B_k\}. \tag{23}$$

Продифференцировав ряд (9), для четвертого слагаемого $G(t)$ установим справедливость цепочки равенств

$$\int_0^T (\dot\sigma(t) - A_1^{-1}\dot f(\sigma(t)))^*\tau(\dot\sigma(t) - A_2^{-1}\dot f(\sigma(t)))dt =$$

$$= T\{B_0^*K^*(0)\tau K(0)B_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} B_k^*K^*(i\omega k)\tau K(i\omega k)B_k +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\omega^2 B_k^* A_1^{-1}\tau A_2^{-1}B_k + 2\sum_{k=1}^{+\infty} B_k^*\Re e(i\omega k(-\tau A_2^{-1} - A_1^{-1}\tau)K(i\omega k))B_k\}. \quad (24)$$

Из формул (21)–(24) следует, что

$$J(T) = -TB_0^*\{æK(0) - \delta - K^*(0)(\varepsilon+\tau)K(0)\}B_0 -$$

$$- 2T\{\sum_{k=1}^{+\infty} B_k^*\big(\Re e(æK(i\omega k)) - \delta - k^2\omega^2 A_1^{-1}\tau A_2^{-1} +$$

$$+ \Re e(i\omega k(-A_1^{-1}\tau - \tau A_2^{-1})K(i\omega k)) - K^*(i\omega k)(\varepsilon+\tau)K(i\omega k)\big)B_k\}. \quad (25)$$

В силу условий 1 и 2 доказываемой теоремы получим

$$J(T) \le 0, \quad (26)$$

что противоречит неравеству (16). Этим противоречием теорема 1 доказана.

Приведем модификацию теоремы 1, использующую то же частотное неравенство (8), но другие алгебраические условия на варьируемые параметры.

Теорема 2. *Пусть существуют такое $\omega_0 > 0$, такая диагональная матрица $æ = \operatorname{diag}\{æ_1, \ldots, æ_l\}$ и такие положительно определенные диагональные матрицы $\varepsilon = \operatorname{diag}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l\}$, $\tau = \operatorname{diag}\{\tau_1, \ldots, \tau_l\}$, $\delta = \operatorname{diag}\{\delta_1, \ldots, \delta_l\}$, что выполнены условия:*
1) справедливо неравенство (7);
2) для всех $\omega \ge \omega_0 > 0$ справедливо неравенство (8);
3) справедливы неравенства

$$4\delta_j\varepsilon_j > æ_j^2\nu_{1j}^2 \quad (j = 1, \ldots, l), \quad (27)$$

где

$$\nu_{1j} = \frac{\int_0^{\Delta_j}\varphi_j(\xi)d\xi}{\int_0^{\Delta_j}|\varphi_j(\xi)|\sqrt{1+\frac{\tau_j}{\varepsilon_j}\Phi_j^2(\xi)}d\xi},$$

а функции Φ_j определены в тексте доказательства теоремы 1.
Тогда у системы (1) нет циклов второго рода частоты $\omega \ge \omega_0$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$P_j(\xi) = \sqrt{1+\frac{\tau_j}{\varepsilon_j}\Phi_j^2(\xi)},$$

$$Y_j(\xi) = \varphi_j(\xi) - \nu_{1j}|\varphi_j(\xi)|P_j(\xi).$$

Пусть

$$Y(\xi) = ||Y_j(\xi)||_{j=1,\ldots,l}.$$

Предположим, что $\{z(t), \sigma(t)\}$ является для системы (1) циклом второго рода частоты $\omega \geq \omega_0$. Пусть $T = 2\pi/\omega$. Определим для этого решения функцию

$$G_1(t) = \dot{\sigma}^*(t)\varepsilon\dot{\sigma}(t) + f^*(\sigma(t))æ\dot{\sigma}(t) + f^*(\sigma(t))\delta f(\sigma(t)) + \\ + (\dot{\sigma}(t) - A_1^{-1}\dot{f}(\sigma(t)))\tau(\dot{\sigma}(t) - A_2^{-1}\dot{f}(\sigma(t))) - Y^*(\sigma(t))æ\dot{\sigma}(t)$$

и рассмотрим

$$J_1(T) = \int_0^T G_1(t)dt.$$

Справедливы равенства

$$J_1(T) = \int_0^T \sum_{j=1}^{l} \{\varepsilon_j \dot{\sigma}_j^2(t) + \delta_j \varphi_j^2(\sigma_j(t)) + \tau_j \dot{\sigma}_j^2(t)\Phi_j^2(\sigma_j(t)) + \\ + æ_j \nu_{1j} |\varphi_j(\sigma(t))| P_j(\sigma_j(t))\dot{\sigma}(t)\}dt = \\ = \int_0^T \sum_{j=1}^{l} \{\varepsilon_j (\dot{\sigma}_j(t) P_j(\sigma_j(t)))^2 + \delta_j \varphi_j^2(\sigma_j(t)) + æ_j \nu_{1j} |\varphi_j(\sigma(t))| P_j(\sigma_j(t))\dot{\sigma}(t)\}dt.$$

В силу условия 3 доказываемой теоремы справедлива оценка

$$J_1(T) > 0. \tag{28}$$

Исследуем теперь знак $J_1(T)$, исходя из представлений (9) и (11). Используем формулы (21)–(24). Заметим также, что

$$\int_0^T Y_j(\sigma_j(t))\dot{\sigma}_j(t)dt = \int_{\sigma_j(0)}^{\sigma_j(T)} Y_j(\xi)d\xi = 0.$$

Тогда

$$J_1(T) = -TB_0^*\{æK(0) - \delta - K^*(0)(\tau + \varepsilon)K(0)\}B_0 - \\ - 2T\left\{\sum_{k=1}^{\infty} B_k^*(\Re e(æK(i\omega k) + i\omega k(A_1^{-1}\tau + \tau A_2^{-1})K(i\omega k)) - \right. \\ \left. - \delta - k^2\omega^2 A_1^{-1}\tau A_2^{-1} - K^*(i\omega k)(\varepsilon + \tau)K(i\omega k))B_k\right\}.$$

В силу условий 1 и 2 теоремы 2 установим, что

$$J_1(T) \leq 0. \tag{29}$$

Оценки (28), (29) противоречат друг другу. Этим теорема 2 доказана.

Замечание. Если для нелинейных функций φ_j справедливы условия

$$\int_0^{\Delta_j} \varphi_j(\sigma)\, d\sigma = 0 \quad (j = 1, \ldots, l),$$

то требование 3 теоремы 1 и требование 3 теоремы 2 удовлетворяются автоматически.

3. Частотный критерий отсутствия N-циклов второго рода у дискретной фазовой системы. Рассмотрим систему вида

$$\begin{array}{rcl} z(n+1) & = & Az(n)+Bf(\sigma(n)), \\ \sigma(n+1) & = & \sigma(n)+C^*z(n)+Rf(\sigma(n)) \quad (n=0,1,2,\ldots). \end{array} \tag{30}$$

Матрицы A, B, C, R имеют те же размеры, что в пункте 2. Свойства функции f также описаны в пункте 2. Пары (A, B) и (A, C) по-прежнему предполагаются соответственно управляемой и наблюдаемой. Предполагается также, что все собственные значения матрицы A лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга.

Определение 2. [10] Говорят, что система (30) обладает циклом второго рода периода $N \in \mathbf{N}$, $N \neq 1$, если существуют такие $I_j \in \mathbf{Z}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что

$$z(N) = z(0), \quad \sigma_j(N) = \sigma_j(0) + \Delta_j I_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l). \tag{31}$$

Отметим, что если решение $\{z(n), \sigma(n)\}$ является для системы (30) циклом второго рода периода N, то

$$\varphi_j(\sigma_j(n+N)) = \varphi_j(\sigma_j(n) + \Delta_j I_j) = \varphi_j(\sigma_j(n)). \tag{32}$$

Определим числа $\mu_{1j} = 2\alpha_{1j} - \alpha_{2j}$ и $\mu_{2j} = 2\alpha_{2j} - \alpha_{1j}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ и построим диагональные матрицы $M_k = \mathrm{diag}\{\mu_{k1}, \ldots, \mu_{kl}\}$ $(k = 1, 2)$.

Теорема 3. *Пусть существуют такие положительно определенные диагональные матрицы $\varepsilon = \mathrm{diag}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l\}$, $\delta = \mathrm{diag}\{\delta_1, \ldots, \delta_l\}$, $\tau = \mathrm{diag}\{\tau_1, \ldots, \tau_l\}$, диагональная матрица $æ = \mathrm{diag}\{æ_1, \ldots, æ_l\}$ и $a_j \in [0, 1]$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$, что выполнены требования:*
1)

$$\Re e\{æK(p) - K^*(p)\varepsilon K(p) - (K(p) + (p-1)M_1^{-1})^*\tau(K(p) + (p-1)M_2^{-1})\} - \delta \geq 0 \tag{33}$$

для всех

$$p = 1, e^{2\pi i/N}, \ldots, e^{2\pi(N-1)i/N} \quad (i^2 = -1);$$

2) квадратичные формы

$$Q_{2j}(\xi,\eta,\zeta) = (\varepsilon_j - \frac{æ_j\alpha_{0j}}{2}(a_j(1+|\nu_j|) + a_{0j}(1 + \frac{\alpha_{2j}-\alpha_{1j}}{\sqrt{|\alpha_{1j}|\alpha_{2j}}}|\nu_{0j}|))\xi^2 +$$
$$+ \delta_j\eta^2 + \frac{\tau_j\alpha_{1j}\alpha_{2j}}{\mu_{1j}\mu_{2j}}\zeta^2 + æ_j\nu_j a_j\xi\eta + æ_j\nu_{0j}a_{0j}\eta\zeta,$$

где

$$a_{0j} = 1 - a_j, \quad \alpha_{0j} = \begin{cases} \alpha_{2j} \ \textit{при}\ æ_j > 0, \\ \alpha_{1j} \ \textit{при}\ æ_j < 0 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

являются положительно определенными.
Тогда система (30) не имеет циклов второго рода с периодом N.

Доказательство. Предположим, что у системы (30) существует цикл второго рода $\{z(n), \sigma(n)\}$ периода N. Следуя методике, разработанной в [10], применим к решению дискретное преобразование Фурье. Дискретные Фурье-образы векторных последовательностей $z(n)$ и $f(\sigma(n))$ имеют вид

$$\tilde{z}(r) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-i\Omega nr},$$

$$\tilde{f}(r) = \sum_{n=0}^{N-1} f(\sigma(n)) e^{-i\Omega nr},$$

где $i^2 = -1$, $\Omega = 2\pi/N$, $r = 0, 1, \ldots, N-1$.

Рассмотрим последовательность

$$\xi(n) = \sigma(n+1) - \sigma(n), \quad \xi(n) = ||\xi_j(n)||_{j=1,\ldots,l}.$$

Для ее Фурье-образа $\tilde{\xi}(r)$ справедливо [10] равенство

$$\tilde{\xi}(r) = -K(e^{i\Omega r})\tilde{f}(r). \tag{34}$$

Определим последовательность

$$\begin{gathered} G_2(n) = \xi^*(n)\varepsilon\xi(n) + f^*(\sigma(n))æ\xi(n) + f^*(\sigma(n))\delta f(\sigma(n)) + \\ + (\xi(n) - M_1^{-1}(f(\sigma(n+1)) - f(\sigma(n))))^*\tau(\xi(n) - M_2^{-1}(f(\sigma(n+1)) - f(\sigma(n)))). \end{gathered} \tag{35}$$

Запишем ее в виде

$$G_2(n) = \sum_{j=1}^{l} G_{2j}(n),$$

где

$$\begin{gathered} G_{2j}(n) = \varepsilon_j \xi_j^2(n) + æ_j a_j \varphi_j(\sigma_j(n))\xi_j(n) + æ_j a_{0j}\varphi_j(\sigma_j(n))\xi_j(n) + \delta_j \varphi_j^2(\sigma_j(n)) \\ + \tau_j(\xi_j(n) - \mu_{1j}^{-1}(\varphi_j(\sigma_j(n+1)) - \varphi_j(\sigma_j(n))))(\xi_j(n) - \mu_{2j}^{-1}(\varphi_j(\sigma_j(n+1)) - \varphi_j(\sigma_j(n)))). \end{gathered}$$

Снова рассмотрим функции Ψ_j, Φ_j, F_j, введенные при доказательстве теоремы 1, и воспользуемся оценками, приведенными в статье [11]:
1)

$$æ_j \varphi_j(\sigma_j(n))\xi_j(n) \geq æ_j \int_{\sigma_j(n)}^{\sigma_j(n+1)} F_j(\zeta)d\zeta + \nu_j æ_j |\varphi_j(\sigma_j(n))|\xi_j(n) - \frac{\alpha_{0j}}{2} æ_j (1 + |\nu_j|)\xi_j^2(n);$$

2)

$$\begin{gathered} æ_j \varphi_j(\sigma_j(n))\xi_j(n) \geq æ_j \int_{\sigma_j(n)}^{\sigma_j(n+1)} \Psi_j(\zeta)d\zeta + \\ + \nu_{0j} æ_j \Phi(\sigma'_{jn})|\varphi_j(\sigma_j(n))|\xi_j(n) - \frac{\alpha_{0j}}{2} æ_j (1 + |\nu_{0j}| \frac{\alpha_{2j} - \alpha_{1j}}{\sqrt{|\alpha_{1j}|\alpha_{2j}}})\xi_j^2(n); \end{gathered}$$

3)

$$(\mu_{2j}^{-1}(\varphi_j(\sigma_j(n+1))-\varphi_j(\sigma_j(n)))-\xi_j(n))(\mu_{1j}^{-1}(\varphi_j(\sigma_j(n+1))-\varphi_j(\sigma_j(n)))-\xi_j(n))\geq \\ \geq \frac{\alpha_{2j}\alpha_{1j}}{\mu_{2j}\mu_{1j}}\Phi_j^2(\sigma'_{jn})\xi_j^2(n),$$

где $\sigma_j(n)\lessgtr\sigma'_{jn}\lessgtr\sigma_j(n+1)$.

Применяя полученные оценки к последовательностям $G_{2j}(n)$, установим неравенства

$$G_{2j}(n)\geq Q_{2j}(\xi_j(n),|\varphi_j(\sigma_j(n))|,\Phi(\sigma'_{jn})\xi_j(n))+\text{æ}_j\int_{\sigma_j(n)}^{\sigma_j(n+1)}(a_jF_j(\zeta)+a_{0j}\Psi_j(\zeta))d\zeta.$$

В силу условия 2 доказываемой теоремы

$$G_2(n)>\sum_{j=1}^{l}\text{æ}_j\int_{\sigma_j(n)}^{\sigma_j(n+1)}(a_jF_j(\zeta)+a_{0j}\Psi_j(\zeta))\,d\zeta. \tag{36}$$

Рассмотрим сумму

$$V(N)=\sum_{n=0}^{N-1}G_2(n).$$

Из оценки (36) следует, что

$$V(N)>\sum_{j=1}^{l}\text{æ}_j\int_{\sigma_j(0)}^{\sigma_j(N)}(a_jF_j(\zeta)+a_{0j}\Psi_j(\zeta))d\zeta. \tag{37}$$

Из равенств (31) и вида функций F_j,Ψ_j следует, что

$$\int_{\sigma_j(0)}^{\sigma_j(N)}F_j(\zeta)d\zeta=\int_{\sigma_j(0)}^{\sigma_j(N)}\Psi_j(\zeta)d\zeta=0\quad(j=1,\ldots,l).$$

Таким образом, из (37) вытекает

$$V(N)>0. \tag{38}$$

Обратимся теперь к формуле (35) и применим, следуя статье [10], равенство Парсеваля. Учитывая, что в силу (31)

$$\sum_{n=0}^{N-1}f(\sigma(n+1))e^{-i\Omega nr}=e^{i\Omega r}\sum_{n=0}^{N-1}f(\sigma(n))e^{-i\Omega nr},$$

получим

$$V(N)=\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}\{\tilde{\xi}^*(r)\varepsilon\tilde{\xi}(r)+\tilde{f}^*(r)\text{æ}\tilde{\xi}(r)+ \\ +\tilde{f}^*(r)\delta\tilde{f}(r)+(\tilde{\xi}(r)-M_1^{-1}(e^{i\Omega r}-1)\tilde{f}(r))^*\tau(\tilde{\xi}(r)-M_2^{-1}(e^{i\Omega r}-1)\tilde{f}(r))\}. \tag{39}$$

Подставив в формулу (39) значение $\tilde{\xi}(r)$, вычисленное по формуле (34), установим равенство

$$V(N) = -\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{f}^*(r)\{\Re e(æK(e^{i\Omega r}) - (K(e^{i\Omega r}) + M_1^{-1}(e^{i\Omega r} - 1))^*\tau \times$$
$$\times\,(K(e^{i\Omega r}) + M_2^{-1}(e^{i\Omega r} - 1))) - K^*(e^{i\Omega r})\varepsilon K(e^{i\Omega r}) - \delta\}\tilde{f}(r).$$

Из условия 1 следует, что

$$V(N) \leq 0. \tag{40}$$

Неравенство (40) противоречит неравенству (38). Следовательно, сделанное предположение неверно и у системы (30) нет циклов второго рода с периодом N. Теорема 3 доказана.

4. Пример. Система фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с пропорционально интегрирующим фильтром и синусоидальной характеристикой фазового детектора. Для рассматриваемой системы ФАПЧ

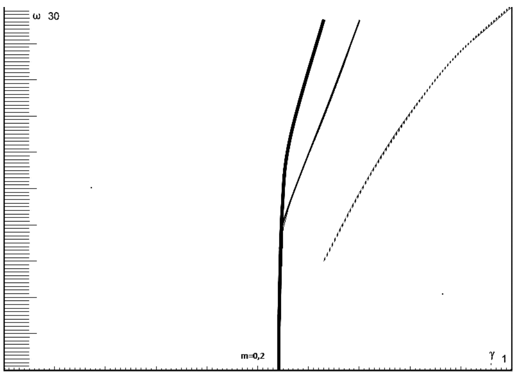
$$m = l = 1, \quad f(\sigma) = \varphi_1(\sigma) = \sin(\sigma) - \gamma \quad (\gamma \in (0,1)). \tag{41}$$

Ее передаточная функция имеет вид

$$K(p) = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{bp+\mu}{p+\mu} \quad (b \in (0,1)). \tag{42}$$

Наличие циклов второго рода соответствует нежелательному режиму биений системы ФАПЧ.

К системе (41), (42) в случае $\mu = 0,1; b = 0,2$ применялась теорема 1. Результаты представлены на рисунке. Область отсутствия режима биений, полученная с помощью теоремы 1, лежит левее тонкой линии. Левее жирной линии лежит область,



Результаты применения теоремы 1 к ФАПЧ.

полученная в частном случае $a_1 = 1$, соответствующая критерию Леонова—Сперанской [6]. Сравнение этих двух областей показывает, что введение в частотное условие варьируемых параметров a_j $(j = 1, \ldots, l)$ позволяет улучшить оценку истинной области отсутствия циклов второго рода. Пунктирной линией на рисунке показана кривая зависимости частоты биений от начальной расстройки γ, полученная в статье [12] методом медленно изменяющейся энергии.

Литература

1. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.

2. *Леонов Г. А., Смирнова В. Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000. 400 с.

3. *Урман Е. Л.* Применение принципа гармонического баланса для исследования условий синхронизации синхронных машин // Вестник электропромышленности. 1957. №4. С. 54–59.

4. *Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 447 с.

5. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Сов. Радио, 1978. 600 с.

6. *Леонов Г. А., Сперанская Л. С.* Оценки частоты биений в многомерных системах ФАП // Радиотехника. 1985. №3. С. 32–35.

7. *Гарбер Е. Д.* О частотных критериях отсутствия периодических режимов // Автоматика и телемеханика. 1967. Т. 28, №11. С. 178–182.

8. *Бакаев Ю. И., Гуж А. А.* Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Допплера // Радиотехника и электроника. 1965. Т. 10, №1. С. 175–196.

9. *Leonov G. A., Ponomarenko D. V., Smirnova V. B.* Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. Singapore-New Jersey-London-Hong Kong: World Scientific, 1996. 498 p.

10. *Леонов Г. А., Федоров А. А.* Оценки частот колебаний в дискретных системах фазовой синхронизации // ДАН. 2011. Т. 440. №4. С. 459–462.

11. *Перкин А. А., Смирнова В. Б., Утина Н. В., Шепелявый А. И.* О применении метода периодических функций Ляпунова // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 36–47.

12. *Евтянов С. И., Снедкова В. К.* Исследование фазовой автоподстройки с фильтрами высокого порядка асимптотическими методами // Радиотехника. 1968. №3. С. 48–53.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Сведения об авторах

Смирнова Вера Борисовна — доктор физико-математических наук, профессор; root@AL2189.spb.edu

Утина Наталья Васильевна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель; unv74@mail.ru

Шепелявый Александр Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент; as@as1020.spb.edu

Перкин Алексей Александрович — кандидат физико-математических наук, ассистент; ofercinn@qmail.com

CONDITIONS FOR THE LACK OF THE CYCLES OF THE SECOND KIND FOR CONTINUOUS AND DISCRETE SYSTEMS WITH CYLINDRICAL PHASE SPACE

Vera B. Smirnova[1,2], *Natalia V. Utina*[2], *Alexandr I. Shepelyavy*[1], *Alexey A. Perkin*[2]

[1] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; root@AL2189.spb.edu, as@as1020.spb.edu

[2] St.Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPSUACE), 2-ya Krasnoarmeiskaya ul., 4, St.Petersburg, 190005, Russian Federation; root@AL2189.spb.edu, unv74@mail.ru, ofercinn@qmail.com

In the paper continuous and discrete systems of indirect control with periodic vector nonlinearities are considered. The paper is devoted to one of key problems of the asymptotic behavior of such systems, that is the problem of the existence of cycles in the cylindrical phase space. In the paper a number of multiparametric frequency-algebraic criteria are established, which guarantee that the system has no cycles with given frequency in the cylindrical phase space. Refs 12. Figs 1.

Keywords: phase system, cylindrical phase space, cycle of the second kind.