МЕХАНИКА

УДК 519.21

ПРОСТОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ДИСПЕРСИИ ЧИСЛА НУЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА*

Р. Н. Мирошин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Дисперсия числа нулей гауссовского дифференцируемого стационарного процесса на конечном интервале времени представляется в виде однократного интеграла от сложной подынтегральной функции, имеющей особенность в окрестности нуля, что затрудняет компьютерные вычисления. В статье для широкого класса корреляционных функций доказано неравенство, оценивающее эту дисперсию в более простых терминах. Два из пяти рассмотренных примеров демонстрируют пределы эффективности полученного неравенства посредством сравнения с ранее установленными автором частными случаями процессов, для которых дисперсия вычисляется по формулам без интегралов. В двух следующих примерах неравенство используется для асимптотической оценки дисперсии числа нулей на малом интервале времени, а в последнем кроме этой асимптотики даны верхние и нижние границы для самого распространенного аналитического процесса на всех интервалах времени. Библиогр. 18 назв.

Ключевые слова: дифференцируемый гауссовский стационарный процесс, дисперсия числа нулей, корреляционная функция, неравенство для дисперсии, процесс Уонга, асимптотика.

Число пересечений уровня дифференцируемым случайным процессом на конечном интервале времени используется, в основном, для представления сложных вероятностей, таких, например, как вероятность процессу не пересечь уровень, возникающих в задачах статистической радиофизики [1], аэродинамики разреженного газа [2], газо- и нефтедобычи [3], теории массового обслуживания [4] и т. д. Связь моментов этой случайной величины со статистическими характеристиками материнского процесса установлена еще в 1944 г. С. О. Райсом [5] в виде интегралов возрастающей с номером момента кратности и с тех пор изучалась многими исследователями (см. библиографию в [6–7]). Однако нельзя сказать, что в вычислениях упомянутых вероятностей даже для нулевого уровня достигнут значительный прогресс. Полностью в аналитической форме среди дифференцируемых гауссовских стационарных процессов эта задача решена только для косинус-процесса и сведена к двухкратному интегралу для процесса Уонга [8–10], а для всех прочих известна только формула

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проект 6.0.24.2010).

среднего числа пересечений (формула Райса [1]), но уже дисперсия числа нулей представляется интегралом от сложной подынтегральной функции [11], имеющей особенность в нуле, что осложняет компьютерное его вычисление. В серии работ [12–15] этот интеграл существенно модифицирован, что позволило записать его в элементарных функциях для того же процесса Уонга и для частного случая возвратных процессов первого порядка и затем использовать в оценках сверху и снизу дисперсии числа нулей некоторых других родственных процессов (теоремы сравнения), а также найти несколько первых членов асимптотики на малых и больших интервалах времени и несколько первых коэффициентов разложения в степенной ряд по времени для широкого класса процессов. В настоящей работе доказывается аналитическое неравенство, заключающее дисперсию числа нулей в вилку из верхней и нижней границ в терминах корреляционной функции процесса, основанное на той же модификации интеграла. Результат иллюстрируется примерами, в которых сравниваются эти границы с упомянутыми выше точными решениями и исправляется ошибка в одной из асимптотических формул в [12] (повторенная в [9]).

Далее рассматривается дифференцируемый гауссовский стационарный процесс ξ_t с нулевым средним и корреляционной функцией $p(t) = \mathbf{M}\xi_0\xi_t$.

Выберем масштабы по осям координат так, чтобы $p(0) = -p''(0) = 1$, что избавляет от загромождения формул масштабными константами (штрих над символом функции означает дифференцирование ее по аргументу). Пусть η_t — число нулей процесса ξ_t на интервале $[0, t]$. По формуле Райса [5] среднее число нулей равно

$$N_1(t) \equiv \mathbf{M}\eta_t = \frac{t}{\pi}\,, \tag{1}$$

а для дисперсии имеем

$$\mathbf{D}(t) \equiv \mathbf{M}\eta_t^2 - (\mathbf{M}\eta_t)^2 = N_2(t) - N_1^2(t) + N_1(t), \tag{2}$$

где $N_2(t) = \mathbf{M}\eta_t(\eta_t - 1)$ — второй факториальный момент числа нулей, для которого справедлива формула [13]

$$N_2(t) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^t (t-\tau)(-f'')(\alpha + \mathrm{ctg}\ \alpha)d\tau \tag{3}$$

в обозначениях

$$f \equiv f(\tau) = \arccos p(\tau), \quad \alpha \equiv \alpha(\tau), \quad \sin\alpha = -\frac{f''\sin f}{1-(f')^2}\,. \tag{4}$$

Вследствие (1)–(2) достаточно оценить $N_2(t)$, чем и займемся, исходя из формул (3)–(4).

Необходимым и достаточным критерием конечности интеграла (3) является конечность интеграла

$$\int_0^\epsilon \frac{h(\tau)}{\tau^3}\,d\tau \tag{5}$$

при некотором малом $\epsilon > 0$ и при условии, что $p(t)$ имеет непрерывную компоненту в спектре, а $h(t)$ определяется соотношением

$$p(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + h(t)(1 + o(1)), \quad \frac{h(t)}{t^2} \downarrow 0, \quad t \to 0. \tag{6}$$

Если обозначить

$$p \equiv p(\tau), \quad q \equiv -p'(\tau), \quad r \equiv -p''(\tau), \tag{7}$$

то тогда в (3) (см. [9])

$$-f'' = \frac{k_6}{(\sqrt{1-p^2})^3}\,, \quad \sin\alpha = \frac{k_6}{k_2}\,, \quad k_2 = 1 - p^2 - q^2, \quad k_6 = p^2 r + pq^2 - r. \tag{8}$$

Докажем следующее утверждение:
при $k_6 \geq 0$ *в интервале* $[0, t]$ *имеет место неравенство*

$$\frac{2}{\pi^2} A_- J(t) \leq N_2(t) \leq \frac{2}{\pi^2} A_+ J(t), \tag{9}$$

где

$$J(t) = t - \arccos p(t), \tag{10}$$

$$A_- = \min_{0 \leq \tau \leq t} (\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha), \qquad A_+ = \max_{0 \leq \tau \leq t} (\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha). \tag{11}$$

Действительно, если $k_6 \geq 0$, то $-f'' \geq 0$ в силу (8), и тем самым справедливо неравенство (9), в котором

$$J(t) = \int_0^t (t - \tau)(-f'')d\tau. \tag{12}$$

Интегрируя (12) по частям, получаем

$$J(t) = t \cdot f'(0) - f(t) + f(0). \tag{13}$$

Выражение (13) совпадает с (10), завершая доказательство (9)–(11), так как $f(t) = \arccos p(t)$, $f(0) = \arccos p(0) = 1$ и в силу (6)

$$f'(\tau) = \frac{q}{\sqrt{1-p^2}} \to 1 \quad \text{при} \quad \tau \to 0.$$

Покажем на примерах, что несмотря на тривиальность неравенства (9), оно может быть весьма полезно.

Пример 1. Процесс Уонга определяется корреляционной функцией [9, с. 145]

$$p(t) = \frac{3}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2}\varphi^3(t), \quad \text{где} \quad \varphi(t) = \exp\Big(-\frac{|t|}{\sqrt{3}}\Big). \tag{14}$$

Для этого процесса $h(\tau) = O(\tau^3)$, интеграл (5) конечен, обеспечивая конечность $N_2(t)$, а $\varphi \equiv \varphi(\tau)$,

$$k_2 = (1-\varphi^2)^2, \quad k_6 = \frac{\varphi}{2}(1-\varphi^2)^3 \geq 0, \quad 1 - p^2 = \frac{1}{4}(1-\varphi^2)^2(4-\varphi^2),$$

так что при $\tau \geq 0$

$$\sin\alpha = \frac{\varphi}{2}, \quad (\cos\alpha)\alpha' = -\frac{2\varphi}{\sqrt{3}}, \quad \alpha' = -\frac{\operatorname{tg}\,\alpha}{\sqrt{3}},$$

и поэтому

$$(\alpha+\operatorname{ctg}\,\alpha)'=\frac{\operatorname{ctg}\,\alpha}{\sqrt{3}}>0,$$

т. е. $(\alpha+\operatorname{ctg}\,\alpha)$ возрастает в $[0,t]$ и

$$A_-=(\alpha+\operatorname{ctg}\,\alpha)|_{\tau=0}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3},$$

поскольку $\alpha(0)=\arcsin(1/2)=\pi/6$. Для верхней границы в (9)

$$A_+=\alpha(t)+\operatorname{ctg}\,\alpha(t).$$

Известна простая формула для $N_2(t)$ в случае процесса Уонга [13] (см. также [9])

$$N_2(t)=\frac{t^2}{\pi^2}+\frac{t}{3\pi}-\frac{1}{12}+\frac{3}{\pi^2}\Big[\arcsin\frac{\varphi(t)}{2}\Big]^2, \tag{15}$$

в которой $\varphi(t)$ определена в (14). Используя формулу 1.649 на с. 66 в [16], преобразуем (15) в ряд:

$$N_2(t)=\frac{t^2}{\pi^2}+\frac{t}{3\pi}-\frac{1}{12}+\frac{3}{4\pi^2}\varphi^2(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k+1)!(k+1)}\varphi^{2k}(t). \tag{16}$$

Как видим, это — асимптотический ряд при $t\to\infty$, состоящий из степенного полинома второй степени и ряда по степеням экспонент $\varphi^2(t)$. В [17] степенной отрезок асимптотического ряда при $t\to\infty$ построен для всех моментов числа нулей процесса Уонга. Формула (16) показывает, каков может быть при этом остаточный член на примере второго момента.

Сравним (15) с неравенством (9)–(11), справедливым в силу $k_6\geq 0$.

При $t\to 0$ имеем $A_+\to A_-$, так что верхняя и нижняя границы для $N_2(t)$ сливаются в точке $t=0$ и близки в ее малой окрестности.

При $t\to\infty$

$$J(t)=t-\frac{\pi}{2}+O(p(t)),$$

так что нижняя граница для $N_2(t)$

$$\Big(\frac{\pi}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2}\Big)t-\Big(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{\pi}\Big)+O(p(t)). \tag{17}$$

Она сильно «отстает» от степенного отрезка в (16), растущего на порядок быстрее, чем (17).

Для верхней границы $N_2(t)$ при $t\to\infty$ имеем

$$\sin\alpha\to 0,\qquad \operatorname{ctg}\,\alpha\sim\frac{2}{p(t)},\qquad A_+\sim\frac{2}{p(t)}=2\exp\Big(\frac{t}{\sqrt{3}}\Big) \tag{18}$$

и, сравнивая (18) с (16), находим, что верхняя граница растет экспоненциально быстрее, чем $N_2(t)$.

Таким образом, неравенство (9)–(11) для процесса Уонга при малых t дает тесные границы, а при больших t эти границы расходятся, причем нижняя граница все же ближе к истинному значению.

Пример 2. Одна из корреляционных функций возвратного процесса первого порядка имеет вид [9, с. 146]

$$p(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{6\sqrt{3}}, \qquad |t| \le 2\sqrt{3}.$$

Для этой корреляционной функции

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} - \frac{|\tau|}{2\sqrt{3}}, \qquad k_6 = \frac{\tau^3(\sqrt{3}-\tau)(2\sqrt{3}-\tau)^3}{216\sqrt{3}},$$

$$1 - p^2 = \frac{\tau^2}{108}(3\sqrt{3}-\tau)(2\sqrt{3}-\tau)^2(\tau+\sqrt{3}), \qquad -f'' = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4\cos^2\alpha},$$

так что при $0 \le \tau \le t \le \sqrt{3}$, как и в примере 1,

$$k_6 \ge 0, \qquad \alpha' \le 0, \qquad (\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)' = -\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \alpha' \ge 0,$$

т. е. по-прежнему $(\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$ возрастает в $[0, \sqrt{3}]$,

$$A_- = \min_{0\le\tau\le t}(\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}, \qquad A_+ = \max_{0\le\tau\le t}(\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = \alpha(t) + \operatorname{ctg}\alpha(t).$$

Для такого процесса интеграл $N_2(t)$ вычисляется в аналитической форме [9, с. 147]:

$$N_2(t) = \frac{t}{3\pi} - \frac{1}{12} + \frac{3}{\pi^2}\Big[\arcsin\Big(\frac{1}{2} - \frac{t}{2\sqrt{3}}\Big)\Big]^2, \tag{19}$$

которую легко преобразовать в ряд ([16], № 1.645)

$$N_2(t) = \frac{t}{3\pi} - \frac{1}{12} + \frac{3}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!(k+1)}\sin^{2k+2}\alpha(t).$$

Так как $k_6 \ge 0$ в интервале $[0, \sqrt{3}]$, при $0 \le t \le \sqrt{3}$ имеет место неравенство (9)–(11). Обе границы в (9)–(11) при $t \to 0$ совпадают и дают главный член асимптотики $N_2(t)$:

$$N_2(t) = \frac{t^2}{3\pi^2}\Big(1 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\Big),$$

поскольку

$$A_+ \sim A_- = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}, \qquad J(t) \sim J''(0)\frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{6\sqrt{3}}.$$

Этот же результат получается из (19) (см. [9]).

Пример 3. Гауссовский стационарный процесс называется $(2,\beta)$-процессом, если при некотором c его корреляционная функция имеет вид [18]

$$p(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + b\cdot|t|^{2+\beta}, \quad |t| \le c, \quad 0 < \beta < 2, \quad b > 0. \tag{20}$$

В примере 2 рассматривался $(2,1)$-процесс, в котором $b = 1/6\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{3}$. Для $(2,\beta)$-процессов интеграл (5) конечен, т. е. конечен момент $N_2(t)$ при $0 \le t \le c$.

Существование таких процессов при $0 < \beta \le 1$ доказано в [18] (более подробно в [8–9]). Покажем, что и для $1 < \beta < 2$ возможны корреляционные функции типа (20).

Корреляционный определитель случайного вектора $(\xi_0, \xi_0'; \xi_\tau, \xi_\tau')$ в обозначениях (7) представляется в следующей форме [9, с.124]:

$$D \equiv \det\{\mathbf{M}(\xi_0, \xi_0'; \xi_\tau, \xi_\tau')^T(\xi_0, \xi_0'; \xi_\tau', \xi_\tau')\} = k_7 \cdot k_8,$$

где верхним индексом T отмечен вектор-столбец,

$$k_7 = (1-r)(1+p) - q^2, \qquad k_8 = (1+r)(1-p) - q^2. \tag{21}$$

Так как $D \ge 0$, функции k_7 и k_8 одного знака. С помощью этого утверждения найдем b и c в (20) при $1 < \beta < 2$. Подставив (20) в (21), получаем

$$k_8 = \tau^2 x\Big[\frac{(2-\beta)(1+\beta)}{2} - (2+\beta)x\Big], \tag{22}$$

$$k_7 = x\Big\{2(2+\beta)(1+\beta) - \frac{\tau^2}{x}\Big[1 - \frac{(2+\beta)(3-\beta)}{2}x + (2+\beta)x^2\Big]\Big\}, \tag{23}$$

где

$$x = b \cdot \tau^\beta. \tag{24}$$

Из (22) следует, что $k_8 \ge 0$ при

$$0 \le x \le x_* = \frac{(1+\beta)(2-\beta)}{2(2+\beta)}\,. \tag{25}$$

Найдем условия для $1 < \beta < 2$, при которых $k_7 \ge 0$. Производная по t от выражения в фигурной скобке в (23) равна

$$-\frac{\tau^{1-\beta}}{b} \cdot K(x), \tag{26}$$

где

$$K(x) = 2 - \beta - (2+\beta)(3-\beta)x + (2+\beta)^2 x^2. \tag{27}$$

Корни полинома $K(x)$ суть

$$x_1 = \frac{2-\beta}{2+\beta} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1}{2+\beta}, \tag{28}$$

а $K(0) = 2-\beta > 0$, т. е. при $1 < \beta < 2$ (когда в (28) $x_1 < x_2$) в интервале $[0, x_1)$ полином (27) положителен и тем самым в этом интервале выражение (26) не положительно, что влечет за собой убывание функции в фигурной скобке в (23).

Так как

$$x_* - x_1 = \frac{(2-\beta)(\beta-1)}{2(2+\beta)} > 0 \quad \text{при} \quad 1 < \beta < 2,$$

$0 < x_1 < x_*$. Обозначим $t_1 = (x_1/b)^{1/\beta}$. Минимум в фигурной скобке в (23) при $0 \le \tau \le t_1$ достигается в точке $\tau = t_1$ (соответственно, $x = x_1$) и равен

$$2(2+\beta)(1+\beta) - \frac{t_1^{2-\beta}}{2b}[\beta^2 - 2(1+\beta)],$$

т. е. не отрицателен при $1 < \beta < 2$, а это равносильно $k_7 \geq 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, если взять в (20)

$$c = t_1 = \Big[\frac{2-\beta}{b(2+\beta)}\Big]^{1/\beta},$$

то при $0 \leq \tau \leq c$ корреляционный определитель D не отрицателен, т. е. при таком c возможно существование $(2, \beta)$-процесса (при бо́льших c — невозможно).

Несложно показать, что

$$k_2 = \tau^2\Big[2(1+\beta)x - \frac{\tau^2}{4} + O(x^2)\Big] \geq 0, \quad k_6 = \tau^2\Big[\beta(1+\beta)x - \frac{\tau^2}{4} + O(x^2)\Big] \geq 0,$$

$$k_6'k_2 - k_6k_2' = -\frac{\tau^{5-\beta}x^2}{4b}(2-\beta)^2(1+\beta)(1+o(1)) \leq 0. \tag{29}$$

Так как в силу (8)

$$(\sin\alpha)' = \Big(\frac{k_6}{k_2}\Big)' = \frac{k_6'k_2 - k_6k_2'}{k_2^2},$$

из (29) заключаем, что $(\sin\alpha)' \leq 0$, т. е. $\sin\alpha$ убывает при малых τ. Следовательно,

$$(\alpha + \mathrm{ctg}\ \alpha)' = -\mathrm{ctg}^2\alpha\cdot\alpha' \geq 0,$$

и мы имеем право использовать неравенство (9)–(11) для $(2, \beta)$-процесса в окрестности нуля, причем $A_- = \lim_{\tau\to 0}(\alpha + \mathrm{ctg}\ \alpha)$.

Поскольку $\lim_{t\to 0} A_+ = A_-$, главный член асимптотики $N_2(t)$ при $t \sim 0$ получается сближением верхней и нижней границы в (9). В силу

$$J(t) = t - \arccos p(t) = bt^{1+\beta}(1+o(1)), \quad \sin\alpha \sim \frac{\beta}{2}, \quad A_- = \arcsin\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{\beta},$$

находим

$$N_2(t) = \frac{2b}{\pi^2}\Big(\arcsin\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{\beta}\Big)t^{1+\beta}(1+o(1)), \tag{30}$$

что получено в [12] иным путем.

Пример 4. Как показывают последние два примера, главный член асимптотики $N_2(t)$ при $t \to 0$ можно выделить, опираясь на неравенство (9)–(11), причем зависимость от t входит только от сомножителя $J(t)$. Имеет смысл использовать этот прием для более общих процессов, корреляционная функция которых допускает в окрестности нуля представление

$$p(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + h(t)(1+o(1)), \quad \frac{h(t)}{t^2} \equiv g(t) \to 0, \quad \frac{h(t)}{t^4} \to \infty. \tag{31}$$

Очевидно, интеграл (5) конечен, т. е. момент $N_2(t)$ конечен. Введем параметры [18, а также 8, с. 140] ($h \equiv h(t)$)

$$c_0 = \lim_{t\downarrow 0}\frac{th'}{h}, \qquad c_1 = \lim_{t\downarrow 0}\frac{t^2h''}{h} \quad \text{при} \quad t \downarrow 0, \tag{32}$$

так что

$$q(t) \equiv -p'(t) = t[1 - c_0 g(t)(1+o(1))], \quad r(t) \equiv -p''(t) = 1 - c_1 g(t)(1+o(1)). \tag{33}$$

В [18] и [8, с. 141] доказано, что $2 \le c_0 \le 4(2+\sqrt{3})$, $2 \le c_1 \le 4(c_0 - 1)$.

Предположим, что

$$c_2 = 4(c_0 - 1) - c_1 > 0, \tag{34}$$

т. е. верхняя граница для c_1 не достигается. Используя (31)–(33), находим ($g \equiv g(\tau)$)

$$k_2 \sim 2(c_0 - 1)h, \quad k_6 \sim (2 + c_1 - 2c_0)h \ge 0, \quad \sin\alpha \sim \frac{2 + c_1 - 2c_0}{2(c_0 - 1)}, \quad \operatorname{ctg}\alpha \sim \frac{\sqrt{c_0 c_2}}{2 + c_1 - 2c_0},$$

$$A_+ \sim A_- = \lim_{\tau\downarrow 0}(\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = \arcsin\frac{2 + c_1 - 2c_0}{2(c_0 - 1)} + \frac{\sqrt{c_0 c_2}}{2 + c_1 - 2c_0}, \quad J(t) \sim t\cdot g(t),$$

и поэтому

$$N_2(t) = \frac{2}{\pi^2}\Big[\arcsin\frac{2 + c_1 - 2c_0}{2(c_0 - 1)} + \frac{\sqrt{c_0 c_2}}{2 + c_1 - 2c_0}\Big] t\cdot g(t)(1+o(1)). \tag{35}$$

В случае $(2,\beta)$-процесса имеем $c_0 = 2+\beta$, $c_1 = (2+\beta)(1+\beta)$, $c_2 = (2-\beta)(1+\beta)$, $g(t) = bt^\beta$, так что из формулы (35) получаем (30).

В следующем примере $c_2 = 0$, но по-прежнему главный член асимптотики при $t \to 0$ получается с помощью неравенства (9)–(11).

Пример 5. Пусть $p(t) = \exp(-t^2/2)$. Это корреляционная функция аналитического процесса. Для него

$$q = \tau p, \quad r = (1-\tau^2)p, \quad k_2 = 1 - p^2 - \tau^2 p^2, \quad k_6 = (p^2 - 1 + \tau^2)p \ge 0.$$

Очевидно, в (31) $h(t) = t^4/8$ и интеграл (5) конечен, т. е. $N_2(t) < \infty$.

Докажем, что $\sin\alpha$ убывает в $[0,\infty)$. Обозначим $x = \tau^2$, $p^2(\tau) \equiv p_1(x) = \exp(-x)$. В этих обозначениях

$$\sin\alpha = \sqrt{p_1}K, \quad \text{где} \quad K = \frac{p_1 - 1 + x}{1 - p_1 - p_1 x}\,. \tag{36}$$

Производная от (36) по x равна

$$(\sin\alpha)' = \sqrt{p_1}\,\frac{\Lambda(x)}{2(1 - p_1 - p_1 x)^2}, \tag{37}$$

где

$$\Lambda(x) = 3(1-p_1)^2 - (1-p_1^2)x - p_1 x^2, \quad \Lambda(0) = 0. \tag{38}$$

Докажем, что $\Lambda(x) \le 0$.

Переобозначим в (38) $y = p_1$, $x = -\ln y$, $\Lambda(x) = A(x)$, так что при $x \in [0,\infty)$ имеем

$$y \in (0,1], \quad A(y) = 3(1-y)^2 + (1-y^2)\ln y - y\ln^2 y, \quad A(1) = 0, \quad \lim_{y\downarrow 0} A(y) = -\infty. \tag{39}$$

Дифференцируем последовательно $A(y)$:

$$A'(y) = -6 + 5y + \frac{1}{y} - 2(1+y)\ln y - \ln^2 y, \quad A'(1) = 0, \quad \lim_{y\downarrow 0} A'(y) = \infty,$$

$$A''(y) = 3 - \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} - 2\ln y - \frac{2\ln y}{y}, \quad A''(1) = 0, \quad \lim_{y\downarrow 0} A''(y) = -\infty,$$

$$A'''(y) = \frac{2}{y^3}B(y), \quad \text{где} \quad B(y) = 1 - y^2 + y\ln y, \quad B(0) = 1, \quad B(1) = 0.$$

В свою очередь,

$$B'(y) = 1 + \ln y - 2y, \quad \lim_{y\downarrow 0} B'(y) = -\infty, \quad B'(1) = -1.$$

Функция $B'(y)$ имеет в точке $y = 1/2$ максимум, равный $-\ln 2$, т. е. $B'(y) < 0$, а потому $B(y)$ монотонно убывает и $A'''(y) > 0$ при $y < 1$. Тем самым $A''(y)$ возрастает и $A''(y) < 0$ при $y < 1$, т. е. $A'(y)$ убывает и $A'(y) > 0$ при $y < 1$. Следовательно, $A(y)$ возрастает до 0, т. е. $A(y) \equiv \Lambda(x) \le 0$ в силу (39), что и требовалось доказать (см. (37)).

Поскольку $(\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)' = -\operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \alpha' \ge 0$, то $\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ — возрастающая функция. Неравенство (9)–(11) применимо во всем диапазоне $t \in [0, \infty)$, ибо $k_6 \ge 0$ при таких t.

Параметры (32) и (34) для данной корреляционной функции имеют вид $c_0 = 4$, $c_1 = 12$, $c_2 = 0$. Поэтому асимптотическую формулу для $N_2(t)$ при $t \sim 0$ нужно вывести заново.

Так как $k_2 \sim x^2/2$, $k_6 \sim x^2/2$, $\sqrt{p_1} \sim 1$ при $x = t^2 \sim 0$, получаем

$$\sin\alpha = \frac{k_6}{k_2} \sim 1, \quad \alpha \sim \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{ctg}\alpha \sim 0, \quad A_+ \sim A_- = \frac{\pi}{2}, \quad J(t) \sim \frac{t^3}{12\pi}.$$

Используя неравенство (9)–(11), в итоге имеем

$$N_2(t) = \frac{t^3}{12\pi}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \sim 0. \tag{40}$$

Формула (39) противоречит приведенной на с. 155–156 в [9] и в статье [12]. Ошибка в формуле (8) на с. 155 в [9]. Должно быть (в обозначениях [9])

$$H_\tau \sim \sqrt{\frac{b-1}{16a_2g_1}},$$

так что формулу (9) в [9] нужно заменить на

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{b-1}{16a_2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b-1}{16a_2g_1}} \longrightarrow \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{b-1}{a_2}},$$

а итоговую формулу (10) на с. 156 в [9] заменить на

$$N_2(t) = \frac{b-1}{24\pi}\, t^3(1 + o(1)). \tag{41}$$

Для процесса с $p(t) = \exp(-t^2/2)$ имеем $b = 3$, так что из (40) следует (39).

Заметим, что в [9] и [12] при вычислении главного члена асимптотики использовалась форма $N_2(t)$, предложенная в [11], более сложная, чем (3), что и привело к отмеченной выше ошибке.

Литература

1. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.

2. *Аксенова О. А., Халидов И. А.* Шероховатость поверхности в аэродинамике разреженного газа: фрактальные и статистические модели. СПб.: Изд-во ВВМ, 2004. 120 с.

3. Большая энциклопедия нефти и газа / http://www.napedia.ru

4. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания / под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Физматгиз, 1963. 236 с.

5. *Райс С. О.* Математический анализ случайного шума / пер. с англ. // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. М.: 1953. С. 88–238. (*Rice S. O.* Mathematical analysis of random noise // Bell System Tech. J. 1944. Vol. 23. P. 282–332; 1945. Vol. 24. P. 46–156.)

6. *Azaïs J. M., Wschebor M.* Level sets and extrema of random processes and fields. N. Y.: Wiley, 2009. 393 p.

7. *Тихонов В. И., Хименко В. И.* Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987. 307 с.

8. *Мирошин Р. Н.* Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 212 с.

9. *Мирошин Р. Н.* Случайные процессы и поля (учебное пособие). СПб.: НИИХ С.-Петерб. ун-та, 2003. 284 с.

10. *Мирошин Р. Н.* О распределении числа нулей процесса Уонга на большом интервале времени // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. Вып. 3. С. 809–816.

11. *Steinberg H., Schultheiss P. M., Wogrin C. A., Zweig F.* Short time frequency measurements of narrow-band random signals by means of a zero counting process // J. Appl. Phys. 1955. Vol. 26. N 2. P. 195–201.

12. *Мирошин Р. Н.* Об асимптотике дисперсии числа нулей гауссовского стационарного процесса // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1999. Вып. 1. С. 22–28.

13. *Мирошин Р. Н.* О дисперсии числа нулей гауссовского стационарного процесса. // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2001. Вып. 1. С. 40–47.

14. *Мирошин Р. Н.* О неравенствах для дисперсии числа нулей некоторых стационарных гауссовских процессов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2004. Вып. 2. С. 56–63.

15. *Мирошин Р. Н.* О дисперсии числа нулей некоторых стационарных гауссовских процессов: малые отклонения от простых решений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2006. Вып. 1. С. 50–59.

16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

17. *Мирошин Р. Н.* Степенной отрезок асимптотического ряда для моментов числа нулей процесса Уонга на большом интервале времени // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1995. Вып. 2. С. 36–42.

18. *Мирошин Р. Н.* Асимптотическая оценка второго момента числа пересечений прямой kt+a гауссовским стационарным процессом и ее использование в теории разреженного газа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1976. Вып. 13. С. 101–107.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Сведения об авторе

Мирошин Роман Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; miroshin-roman1938@yandex.ru

THE EASY INEQUALITY FOR THE VARIANCE OF THE NUMBER OF ZEROS OF DIFFERENTIABLE GAUSSIAN STATIONARY PROCESS

Roman N. Miroshin

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; miroshin-roman1938@yandex.ru

It is known that the variance of the number of zeros of differentiable Gaussian stationary process on a finite time interval is represented as the integral of complex integrand which has a special feature in the neighborhood of zero to make it difficult to computer calculation. In the article for a wide class of correlation functions it is proven inequality to estimate both the top and bottom of the variance in terms of elementary function and without using integrals. Two examples demonstrate the the limits to the effectiveness of this inequality by comparison with earlier established formulas of variance of particular cases of processes for which the variance is also calculated without integrals. In the other three examples the inequality is used for to get the main term of the asymptotic of variance of the number of zeros on the small interval of time. Also in the latter example bounds of the variance of analytical process are estimated on any time intervals. Refs 18.

Keywords: differentiable Gaussian stationary process, the variance of the number of zeros, correlation function, inequality for the variance, Wong process, asymptotic.

ХРОНИКА

24 апреля 2014 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступила доктор физ.-мат. наук, профессор Е. А. Иванова (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет) с докладом на тему «Неклассические частицы и их использование при моделировании сред с немеханическими свойствами».

Краткое содержание доклада:

Рассматриваются частицы общего вида, обладающие дополнительными инерционными характеристиками по сравнению с твердыми телами. Динамические свойства этих частиц существенно отличаются от динамических свойств обычных твердых тел. В частности, при свободном движении такой частицы ее траектория не является прямой линией, а при движении вблизи притягивающего центра ее траектория — это не плоская кривая, а пространственная. Предлагается использовать эти частицы в качестве механических моделей элементарных частиц и квазичастиц — электронов, фотонов, фононов и т. д. Предлагается также использовать их при построении моделей сплошных сред, обладающих не только механическими, но и тепловыми или электромагнитными свойствами.