

## О ВЛИЯНИИ ВИДА АППРОКСИМАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБМЕНА НА ПОВЕРХНОСТИ НА ХАРАКТЕР НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В КАНАЛЕ\*

*О. А. Аксенова*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Произведено сопоставление численных и аналитических результатов, касающихся предельных свойств траекторий, аттракторов и бифуркаций для течений разреженных газов в каналах, полученных не только при различных значениях параметров, но и для различных моделей аппроксимаций локального взаимодействия при взаимодействии атомов газа с поверхностью. Сравняются результаты как для исходных моделей, предложенных первоначально Р. Н. Мирошиным, так и для аппроксимаций, рассматриваемых впервые или изучавшихся в последующих работах. Взаимодействия атомов газа со стенками описываются лучевой моделью, обобщающей зеркальное отражение. Выявлены преимущества и недостатки рассмотренных аппроксимаций, отмечены особенности полученных решений и даны рекомендации по использованию результатов в практических приложениях и в численных расчетах течений разреженного газа. Библиогр. 10 назв. Ил. 3.

*Ключевые слова:* неустойчивость течений разреженного газа, взаимодействие газа с поверхностью, рассеяние атомов газа на стенках канала.

**Введение.** Исследование течений разреженного газа в каналах методами нелинейной динамики для различных моделей взаимодействия атомов газа с поверхностью впервые детально было произведено в работах Р. Н. Мирошина [1–3]. Предположив поток газа свободномолекулярным, т. е. рассматривая траекторию каждого отдельного атома газа как последовательность отражений от стенок канала, удалось аналитически найти вид предельных траекторий (аттракторов) с возрастанием числа столкновений с поверхностью. Результаты были получены для класса моделей отражения лучевого типа [2], обобщающих зеркальное отражение, причем коэффициенты обмена нормальным и касательным импульсом на поверхности аппроксимировались аналитическими выражениями, зарекомендовавшими себя в практических аэродинамических расчетах с применением локальных методов [4]. В дальнейшем эти результаты были уточнены и использованы в численных расчетах для более широкого класса течений и моделей взаимодействия со стенками в работах Р. Н. Мирошина и его учеников [4–7].

Цель настоящей работы — сопоставить численные и аналитические результаты, касающиеся предельных свойств траекторий, аттракторов и бифуркаций для течений разреженных газов в каналах, полученные не только при различных значениях параметров, но и при различных моделях аппроксимаций локального взаимодействия при взаимодействии атомов газа с поверхностью. В терминах нелинейной динамики это означает различные аналитические выражения для итерационного уравнения, связывающего значения определяющей траекторию переменной при прохождении атомом газа двух последовательных отрезков (до и после очередного отражения от стенки канала). При этом в качестве базовой модели взаимодействия атома газа со стенками, как и в работах [1–7], применяется лучевая модель, обобщающая зеркальную схему. Как уже отмечалось [6], лучевая модель обладает рядом преимуществ, в том

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проект 6.0.24.2010).

числе возможностью получать различные виды зависимости коэффициентов обмена от углов падения и отражения атома, а также разнообразием форм получаемых предельных траекторий атомов. В отличие от диффузного рассеяния на поверхности (и от широко распространенной на практике диффузно-зеркальной смеси) в данной модели отсутствует «поглощающая» стохастическая компонента, преобразующая динамический хаос в случайный.

В настоящей работе сравниваются результаты как для двух исходных моделей, предложенных первоначально Р. Н. Мирошиным [1–3], так и для иных аппроксимаций, в том числе и изучавшихся в последующих работах [4–7], и рассматриваемых впервые. Актуальность темы обусловлена многообразием приложений как в области движения космических аппаратов в верхних слоях атмосферы (при моделировании течений в соплах, щелях, зазорах и т. п.), так и в аэрогазодинамике микротечений (течений, имеющих малые характерные размеры), так как определяющее разреженность газа число Кнудсена достаточно велико в подобных течениях для нанотехнологических масштабов вплоть до нормального атмосферного давления уже при неглубоком вакууме.

При описании взаимодействия атомов со стенками используем локальные тригонометрические аппроксимации, учитывая тем самым конечность числа Кнудсена, т. е. наличие соударений атомов газа друг с другом, а не только со стенками. Теория локального взаимодействия точна для свободномолекулярного течения, а в переходном режиме между свободномолекулярным потоком и движением сплошной среды позволяет учесть истинное состояние газа эмпирическими зависимостями коэффициентов аппроксимаций (коэффициентов режима) от параметров режима, под которыми понимаются числа Кнудсена ( $Kn$ ), Маха ( $M$ ), Рейнольдса ( $Re$ ), температурный фактор ( $t_w$ ) и т. п. [4].

**1. Постановка задачи для различных локальных аппроксимаций коэффициентов обмена импульсом на поверхности.** Для расчета течения разреженного газа, в котором атомы газа в промежутках между столкновениями движутся по прямолинейной траектории, необходимо знать геометрию стенок и закон отражения атомов от них. Информация о геометрии стенок нужна лишь в той мере, в которой она определяет связь угла падения  $\theta_{m+1}$  при следующем столкновении атома со стенкой с углом отражения  $\theta'_m$  при предыдущем столкновении:

$$\theta_{m+1} = \psi(\theta'_m), \quad (1)$$

т. е. нужен явный вид функции  $\psi$ . В простейшем случае для двумерного течения (т. е. для течения в плоской щели) углы  $\theta'_m$  и  $\theta_{m+1}$  просто равны между собой (нижним индексом отмечен номер соударения). Заметим, что нет необходимости полностью исключать взаимные столкновения атомов и предполагать свободномолекулярный режим, так как возможные соударения атомов друг с другом на участке траектории между столкновениями со стенкой учитываются в коэффициентах режима локальной аппроксимации. Но, в отличие от задачи внешнего обтекания, постановку задачи нельзя распространить на весь диапазон чисел  $Kn$ , поскольку гипотеза локальности в данном случае означает, что основной поток должен формироваться из атомов газа с противоположной стенки канала.

Закон взаимодействия атома с поверхностью определяет связь угла отражения  $\theta'_m$  с углом падения  $\theta_m$  при  $m$ -м столкновении:  $\theta'_m = \phi(\theta_m)$ . При лучевой схеме взаимодействия на изотропно отражающей поверхности [4] скорости падения  $\vec{u}$  и отра-

жения  $\vec{u}'$  атома лежат в одной плоскости с ортом нормали  $\vec{n}$  к поверхности стенки канала в точке столкновения. После столкновения атом с вероятностью единица имеет единственную скорость  $\vec{u}'$ . Падающая и отраженная скорости характеризуются их абсолютными значениями  $u, u'$  и углами падения  $\theta$  и отражения  $\theta'$ . Для лучевой модели нормированные величины нормального и касательного импульса, переданного единичной площадке стенки в единицу времени (т. е. потоки импульса), выражаются формулами [4]

$$p = 2 \cos \theta (\cos \theta + u' \cos \theta'), \quad \tau = 2 \cos \theta (\sin \theta - u' \sin \theta'), \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность набегающего потока,  $\cos \theta = -\vec{n}\vec{u}/u$ ,  $\cos \theta' = \vec{n}\vec{u}'/u'$ , нормаль  $\vec{n}$  к стенке направлена внутрь газа, а под нормированными понимаются величины, отнесенные к  $\rho u^2/2$ .

Если известны коэффициенты обмена импульсом  $p$  и  $\tau$ , то из (2) однозначно определяются модуль  $u'$  и угол  $\theta'$  вылета атома, т. е. если не интересоваться теплообменом, то у любого закона рассеяния атома изотропной поверхностью существует лучевая версия. Исключение скорости вылета в (2) приводит к соотношению

$$\theta' = \phi(\theta), \quad \text{tg} \phi(\theta) = \frac{2 \sin \theta \cos \theta - \tau}{p - 2 \cos^2 \theta}. \quad (3)$$

При положительных  $\theta'$  лучи падения и отражения лежат по разные стороны от нормали, при отрицательных — по одну сторону. Коэффициенты обмена  $p$  и  $\tau$  в (3) — функции угла падения  $\theta$ :  $p = p(\theta)$ ,  $\tau = \tau(\theta)$ . Поэтому для любого закона отражения уравнение (3) определяет угол отражения  $\theta'$  атома для лучевой версии по углу падения  $\theta$ . Таким образом, при движении атома газа в какой-либо области без столкновений с другими атомами газа угол падения при  $(m+1)$ -м столкновении с его стенками связан с углом падения при  $m$ -м столкновении соотношениями  $\theta_{m+1} = \psi(\theta'_m)$ ,  $\theta'_m = \phi(\theta_m)$ .

Итерационное уравнение, связывающее углы вылета при двух последовательных столкновениях, получается путем объединения равенств (1) и (3) в одно уравнение. Учитывая наличие тангенса в (3), удобнее записать итерационное уравнение в переменных  $x_m = \text{tg} \theta_m$  и  $x_{m+1} = \text{tg} \theta'_{m+1}$ :

$$x_{m+1} = \text{tg} \phi(\psi(\text{arctg} x_m)). \quad (4)$$

В частности, для течения газа в плоской щели с прямолинейными параллельными стенками вся траектория атома газа лежит в одной плоскости и углы равны:  $\theta_{m+1} = \theta'_m$ , т. е.  $\psi(\theta'_m) = \theta'_m$ , так что соотношение (4) становится проще:  $x_{m+1} = \text{tg} \phi(\text{arctg} x_m)$ .

Учитывая вид (3) функции  $\text{tg} \phi$ , равенство преобразуем к виду

$$x_{m+1} = \frac{2x_m - \tau(1 + x_m^2)}{p(1 + x_m^2) - 2}. \quad (5)$$

Отметим, что соотношение (5) сохраняет силу и для течения в цилиндрическом канале, поскольку угол  $\theta_{m+1}$  здесь по-прежнему равен  $\theta'_m$ .

Формула (5) сама по себе еще не определяет аналитический вид перехода к следующей итерации, пока не задан конкретный вид функций  $p(\theta)$  и  $\tau(\theta)$ . Но именно видом этих функций как раз и отличаются различные варианты локальных методов.

В соответствии с целями настоящей работы исследуем влияние аналитического выражения аппроксимации коэффициентов обмена  $p$  и  $\tau$  на предельные решения задачи, т. е. на траектории атомов газа при  $m \rightarrow \infty$ . Для этого рассмотрим три разных формы представления  $p$  и  $\tau$ .

1. Прежде всего изучим трехпараметрическую модель, рассматривавшуюся в [6]. Эта аппроксимация, использующая первые члены разложения  $p$  и  $\tau/\sin \theta$  по чебышёвской системе функций  $\{\cos^n \theta\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — одна из основных в теории локального взаимодействия [4]. Она применена не только в работах, выполненных в СПбГУ [1–6], но и в работах авторов из ЦАГИ (Галкин, Ерофеев, Толстых [8]), а также при сопоставлении с численным экспериментом [9], и определена формулами

$$p = p_1 \cos \theta + p_2 \cos^2 \theta, \quad \tau = \tau_0 \sin \theta \cos \theta. \quad (6)$$

Частные случаи модели (6) при  $p_2 = \tau_0$  и  $p_2 = 2$  рассмотрены Р. Н. Мирошиным [1–3], где они названы «модель А» и «модель Z» соответственно. Коэффициенты режима  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\tau_0$  определяются обычно эмпирически через параметры режима — числа Кнудсена, Маха, температурный фактор и т. п. [4]. В [4] отмечалось, что три коэффициента  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\tau_0$  могут быть сведены к двум параметрам  $a$  и  $b$  с помощью соотношений

$$a = \frac{p_1}{2 - \tau_0}, \quad b = \frac{2 - p_2}{2 - \tau_0}. \quad (7)$$

При этом, используя введенные обозначения  $x_{m+1} = \operatorname{tg} \theta'_{m+1}$ ,  $x_m = \operatorname{tg} \theta'_m$  и равенства (6) при  $\theta = \theta_m$  и (5) для плоского или цилиндрического канала, можно записать итерационное соотношение в виде

$$x_{m+1} = f(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

где

$$f(x) = \frac{x}{a\sqrt{1+x^2} - b}. \quad (9)$$

2. Еще одна аппроксимация, предложенная Р. Н. Мирошиным [1–3] под названием «модель В», также сводится к двум параметрам по формулам

$$f(x) = \frac{x[1 - a + (1 - b)x^2]}{a + bx^2}, \quad (10)$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  выражаются уже по-другому — через коэффициент  $p_4$  при более высоких степенях разложения коэффициентов обмена  $p$  и  $\tau$ :

$$a = \frac{p_2 + p_4 - 2}{p_2 - \tau_0}, \quad b = \frac{p_2 - 2}{p_2 - \tau_0}. \quad (11)$$

3. Обобщением первых двух моделей может служить аппроксимация, содержащая 3 параметра,

$$f(x) = \frac{x}{a\sqrt{1+x^2} - b} \cdot \left(1 - \frac{d}{1+x^2}\right), \quad (12)$$

где связь коэффициентов  $a$  и  $b$  с коэффициентами обмена  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\tau_0$  описывается теми же равенствами (7), а новый параметр  $d$  выражается формулой

$$d = \frac{t_1}{2 - \tau_0}. \quad (13)$$

При  $d = 0$  выражение (12) совпадает с формулой (9), т. е. первая модель — точный частный случай (12). Вторая аппроксимация (10) не может быть представлена как частный случай (12) ни при каких значениях параметров, но все основные свойства могут быть воспроизведены.

На рис. 1 изображены графики функций (9), (10) и (12) при значениях параметров  $p_1, p_2, t_1, \tau_0$ , отвечающих реальным (т. е. наблюдаемым в эксперименте) физическим условиям взаимодействия разреженного газа с поверхностью. Для аппроксимации (9) это соответствует  $a = 2, b = 1,7$  (штриховая линия), для (10) —  $a = 0,2, b = 0,9$  (штрих-пунктирная линия), и для (12) —  $a = 2, b = 1,8, d = 0,3$  (сплошная линия). Отметим, что все три функции имеют сходные графики, причем все эти функции отображают в себя отрезок  $[0; 1]$  и они унимодальны — имеют единственную точку максимума и монотонное поведение с обеих сторон от точки максимума. Именно унимодальность функций вместе с отрицательностью производной Шварца — необходимое условие возникновения каскада бифуркаций [5, 10].

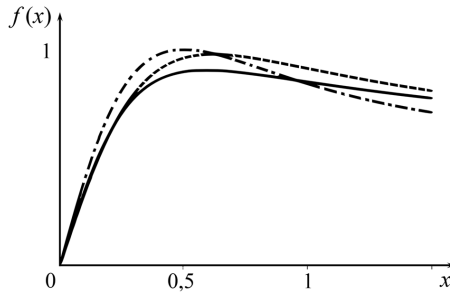


Рис. 1. Функции (9), (10) и (12).

**2. Аттракторы и бифуркации в рассматриваемых моделях течений разреженного газа.** Изучаемая проблема описания предельного поведения динамической системы при неограниченном возрастании индекса  $m$  — номера соударения атома газа со стенкой — составляет главную задачу нелинейной динамики. Все три рассматриваемых отображения — (9), (10) и (12) — нелинейны, и в достаточно широких областях изменения параметров обладают свойством унимодальности и имеют отрицательные производные Шварца на всем промежутке  $[0; \infty)$ :

$$Sf \equiv \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 < 0, \quad (14)$$

где штрихами отмечено дифференцирование по  $x$ .

Отрицательность производных (14) проверяется путем непосредственного аналитического вычисления; впервые это было выполнено Р. Н. Мирошиным [1] для второй модели (10). Подставляя поочередно нелинейные функции (9), (10) и (12) в соотношение (14), получим в первом случае (для (9)):

$$Sf_1 \equiv -3 \frac{(a\sqrt{1+x^2} - b)^2 + a^2 - b^2}{2(1+x^2)^2 (a - b\sqrt{1+x^2})^2}, \quad (15)$$

во втором случае ((10) соответственно [5]):

$$Sf_2 \equiv -6 \frac{(b-a)(b(1-b)x^4 - 6a(1-b)x^2 + a(1-a))}{(b(1-b)x^4 + (3a - 2ab - b)x^2 + a(1-a))^2}, \quad (16)$$

а для третьей модели (для (12)) выражение  $Sf$  получается в общем виде слишком громоздким, поэтому ограничимся значением  $Sf$  в точке  $x = 0$  (хотя можно доказать и отрицательность для всех  $x$  при  $a > b$  и  $d < \frac{a}{3a-2b}$ ):

$$Sf_3(0) = -3 \left( \frac{a}{a-b} + \frac{2d}{d-1} \right). \quad (17)$$

Хотя отрицательность производной Шварца необходима для существования бесконечного каскада бифуркаций Фейгенбаума, она не является достаточной. Для установления достаточности необходимо исследование каждой из моделей на наличие предельных множеств (аттракторов). Для аппроксимации (12), так же как и выполненное ранее исследование для первых двух моделей (9) и (10) [4], такая проверка показывает, что все три модели, в зависимости от величины параметров  $a$ ,  $b$  и  $d$ , могут иметь аттракторы типа предельных циклов и всегда имеют наиболее простые аттракторы — стационарные притягивающие точки, которые обязаны быть решениями уравнения  $x = f(x)$ . При этом функция (9), кроме присутствующего всегда аттрактора  $x = 0$  (имеющего смысл стремления скорости атомов к направлению оси канала), как правило, имеет еще стационарную точку  $x_0 = \sqrt{(b+1)^2/a^2 - 1}$ . Симметричную точку  $-x_0$ , отвечающую движению атомов в обратную сторону, рассматривать отдельно нет необходимости. Аналогичная ситуация складывается и в случае (10), когда наряду со стационарной точкой  $x = 0$  могут присутствовать аттракторы  $\sqrt{(2a-1)/(1-2b)}$  и  $x = \pm\infty$ . Последняя точка соответствует «запиранию» канала, когда скорости атомов в пределе направлены перпендикулярно оси канала.

Модель (12), в отличие от первых двух, может иметь кроме аттрактора  $x = 0$  при некоторых значениях параметров  $a$ ,  $b$  и  $d$  еще три конечных вещественных аттрактора, которые являются решениями кубического уравнения  $at^3 - (b+1)t^2 + d = 0$ . Точки аттракторов типа предельного цикла периода  $n$  находятся среди решений уравнения  $f^n(x) = x$ , где  $f^n(x)$  обозначает  $n$ -ю итерацию операции  $f(x)$ , т. е. это неподвижные точки для  $f^n(x)$ . Полное исследование всех возможных стационарных точек и аттракторов отображения (12) могло бы составить отдельную работу большого объема и не является целью данной статьи.

Но главный вывод, который обнаруживается уже в самом начале поиска, — множество аттракторов и бифуркаций модели (12) существенно богаче аналогичного множества для первых двух аппроксимаций (9) и (10). Особенно заметным этот факт становится при изучении возможности появления хаотического аттрактора, переход к которому сопровождается каскадом бифуркаций Фейгенбаума. Такой каскад выражает свойство самоподобия динамической системы и проявляется следующим образом [10]. Пусть функция  $f(x)$ , задающая динамическую систему итерационным соотношением (9), зависит от некоторого параметра  $a$ :  $f(x) = g(x, a)$ , в роли которого в нашем случае могут выступать параметры  $a$ ,  $b$  и  $d$ . Тогда может существовать бесконечная последовательность значений параметра  $a$  (упорядоченная по возрастанию или убыванию  $a$ :  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ ), такая, что в интервалах  $(a_n, a_{n+1})$  динамическая система  $x_{m+1} = g(x_m, a)$  имеет предельный цикл периода  $2^n$ , и при этом последовательность  $\{a_i\}$  имеет точку сгущения  $a_\infty$ , определяемую соотношением

$$a_n = a_\infty + \text{const } \delta^{-n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

где  $\delta$  — константа Фейгенбаума,  $\delta = 4,669201\dots$

Заметим, что выполнение необходимых условий существования [10], т. е. отрицательности производной Шварца и унимодальности функции  $f(x)$  на заданном промежутке, еще не гарантирует появления каскада бифуркаций и перехода к хаотическому аттрактору при  $r = r_\infty$ . Недостаточным оказывается и такой признак, как существование области значений параметров  $a$  и  $b$ , в которой все стационарные точки первой итерации оказываются неустойчивыми. Подобные области были найдены в работе [6] аналитически и изображены графически на плоскости параметров с учетом отрицательности  $Sf$  и унимодальности  $f(x)$ .

Но все эти соображения играют лишь вспомогательную роль и служат указателями, по которым в пространстве параметров ищутся области возможного наличия бифуркаций. Реальную картину бифуркаций в любом случае дают лишь численные эксперименты.

Результаты ряда расчетов для модели (10) приведены в [5], а для первой модели было проведено множество расчетов, начиная с [6] и заканчивая [7].

Выполненный для модели (12) численный эксперимент при сопоставлении с (9) и (10) показал, что возникает возможность найти дополнительно множество отдельных бифуркаций. Так, аппроксимация (9) допускает наличие каскада бифуркаций лишь в единичных узких областях плоскости  $(a; b)$  параметров, причем немаловажно, что эти значения не отвечают наблюдаемым в реальности коэффициентам обмена импульсом (как это имело место на рис. 1). Для модели (12), напротив, в достаточно широком диапазоне изменения параметров  $a$  и  $b$  одна лишь имеющаяся свобода выбора дополнительного параметра  $d$  обеспечивает появление каскада бифуркаций при фиксированных величинах  $a$  и  $b$ . Типичную траекторию динамической системы, отвечающей (12), в области неустойчивости иллюстрирует рис. 2, на котором по оси абсцисс отложены номера соударений, а по оси ординат — значения переменной  $x$  на каждом из отрезков движения атома газа (система дискретна, поэтому соединительные отрезки даны лишь для наглядности). Заметим, что траектория приведена для величин параметров  $a = 2$ ,  $b = 1,95$ , вполне соответствующих наблюдаемым в реальности коэффициентам обмена импульсом, в то время как для аппроксимации (9) система не обладает неустойчивостью в близлежащих областях плоскости параметров  $(a; b)$ .

Наиболее полное представление о каскаде бифуркаций для нелинейной динамической системы дает бифуркационная диаграмма, приведенная на рис. 3, на которой видны бифуркации удвоения цикла при изменении параметра согласно (18).

**Заключение.** Рассмотренные в работе течения разреженного газа в каналах с различными локальными аппроксимациями коэффициентов обмена импульсом продемонстрировали богатство и разнообразие явлений, связанных с развитием неустойчивости в этих течениях, включая бифуркации и каскады бифуркаций. Анализ полученных результатов дает возможность сделать следующие выводы.

1. Сопоставление трех моделей локального взаимодействия атомов газа с поверхностью показало, что добавление параметра в (12) существенно расширило области значений параметров, в которых наблюдается неустойчивость нелинейной динамической системы, связанной с моделируемым течением. При этом параметры неустойчивости приблизились к наблюдаемым в реальных течениях разреженного газа.

2. Проведенные расчеты подтверждают полученные ранее аналитические результаты в плане указания областей в пространстве параметров, в которых возможно возникновение неустойчивости течений разреженных газов, причем особенно ценно для

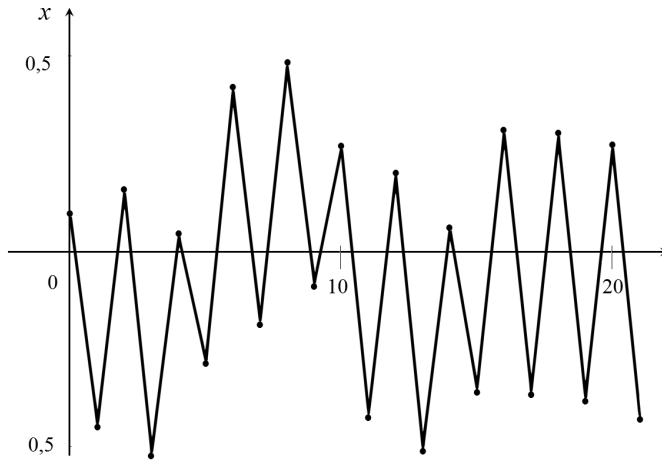


Рис. 2. Траектория динамической системы, отвечающей итерационной схеме (12).

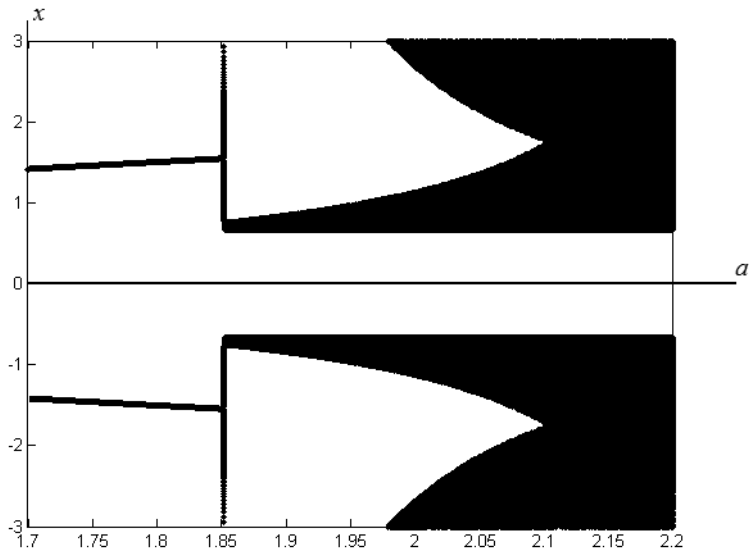


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма динамической системы, отвечающей итерационной схеме (12).

практических приложений то, что в первом приближении достаточными оказываются несложные аналитические представления.

3. Важна для практики связь параметров  $a$ ,  $b$  и  $d$  через посредство коэффициентов аппроксимаций  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_4$ ,  $\tau_0$ ,  $t_1$  с коэффициентами обмена импульсом (т. е. и с коэффициентами аккомодации), а тем самым и с газодинамическими характеристиками течения — такими, как число Рейнольдса, температурный фактор и др.

4. Выполненные расчеты позволяют прогнозировать появление неустойчивых течений в определенных областях изменения параметров как в экспериментах, так и в



практических задачах. При этом без целенаправленного поиска выявить такие эффекты может быть очень сложно, поскольку области неустойчивости крайне узки, т. е. случайное попадание в них исключительно маловероятно. При этом необходимо иметь в виду, что неустойчивость может различаться по характеру — сходные эффекты наблюдаются и в окрестности отдельных бифуркаций удвоения цикла, и в области каскада бифуркаций Фейгенбаума.

## Литература

1. *Мирошин Р. Н.* Бифуркации скорости при протекании разреженного газа в плоской щели // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 4 (№ 22). С. 72–74.
2. *Мирошин Р. Н.* О лучевой модели взаимодействия атомов разреженного газа с поверхностью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 4 (№ 22). С. 74–79.
3. *Мирошин Р. Н.* Решение задачи о свободномолекулярном течении газа в полости клина методами нелинейной динамики // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 1 (№ 1). С. 73–77.
4. *Мирошин Р. Н., Халидов И. А.* Локальные методы в механике сплошных сред. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 304 с.
5. *Мирошин Р. Н.* Случайные процессы и поля. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 304 с.
6. *Аксенова О. А., Халидов И. А.* Шероховатость поверхности в аэродинамике разреженного газа: фрактальные и статистические модели. СПб.: Изд-во ВВМ, 2004. 120 с.
7. *Аксенова О. А., Халидов И. А.* Computation of Unstable Rarefied Gas Flow in Channels with Different Scattering Functions // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. 1501: Melville, New York, 2012. P. 931–937; doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4769642>
8. *Галкин В. С., Ерофеев А. И., Толстых А. И.* О приближенном методе аэродинамического расчета в разреженном газе // Труды ЦАГИ. 1981. Вып. 2111. С. 27–35.
9. *Холявин И. И.* Определение коэффициентов режима локальной теории взаимодействия по данным о пластине // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1986. Вып. 2. С. 125–128.
10. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М., 1988. 240 с.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

## Сведения об авторе

*Аксенова Ольга Анатольевна* — доктор физико-математических наук, профессор;  
[olga.a.aksenova@gmail.com](mailto:olga.a.aksenova@gmail.com)

## INFLUENCE OF APPROXIMATION FORM OF MOMENTUM EXCHANGE COEFFICIENTS ON A SURFACE ON RAREFIED GAS FLOW INSTABILITY CHARACTER IN A CHANNEL

*Olga A. Aksenova*

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;  
[olga.a.aksenova@gmail.com](mailto:olga.a.aksenova@gmail.com)

Numerical and analytical results are compared concerning the limit properties of the trajectories, attractors and bifurcations of rarefied gas flows in channels. The results are obtained not only by different parameter values, but also by different local interaction approximation models for gas-surface interaction. The results as well for the models suggested originally by R. N. Miroshin, as for considered for the first time or for studied in our subsequent papers approximations are compared. Gas-surface interaction on channel walls is described by the ray model generalizing specular reflection. The advantages and the drawbacks of considered approximations are detected and the features of obtained solutions are indicated and the recommendations are given for applying the results in practical applications and in numerical calculations of rarefied gas flows. Refs 10. Figs 3.

*Keywords:* unstable rarefied gas flow, gas-surface interaction, gas atoms scattering from the walls of a channel.