УДК 533.5 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 1 (59). 2014. Вып. 3

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ОБТЕКАНИЯ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА*

И. А. Халидов

С.-Петербургский государственный политехнический университет,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Исследованы свойства полигауссовской модели случайной шероховатой поверхности, влияющие на ее аэродинамические характеристики в потоке разреженного газа. Представление распределения вероятностей в виде смеси нормальных распределений позволило вывести аналитические выражения факториальных моментов числа выходов за уровень, играющих ключевую роль при нахождении функции рассеяния атомов газа на поверхности и коэффициентов обмена импульсом и энергией. Рассмотрен также важный частный случай полигауссовских процессов — сферически-симметричные случайные процессы, для которых условия удается записать в более простом виде. Найдены асимптотические оценки для характеристик выбросов за высокий уровень, отвечающие случаю слабо шероховатой поверхности. Полученные результаты позволяют оценить влияние шероховатости поверхности на характер течения газа вблизи поверхности в сопоставлении с гауссовской моделью шероховатости. Библиогр. 16 назв.

Ключевые слова: течение разреженного газа, взаимодействие газа с поверхностью, полигауссовская модель шероховатости.

Введение. При описании течений разреженного газа вблизи твердой поверхности определяющую роль играют модели взаимодействия частиц газа с поверхностью. Любая реальная поверхность для падающей частицы газа является неровной, шероховатой. Поэтому один из важнейших факторов, требующих учета в процессе взаимодействия — шероховатость поверхности. Построением таких моделей с учетом шероховатости в первую очередь занимались в лаборатории аэродинамики Санкт-Петербургского государственного университета, результаты наиболее полно изложены в монографии Р. Н. Мирошина [1]. В дальнейшем эти результаты были многократно уточнены, модернизированы и обобщены в работах Р. Н. Мирошина и его учеников [2–8].

Базовое предположение во всех этих и связанных с ними работах — моделирование формы шероховатой поверхности однородным изотропным гауссовским случайным полем [1]. У данной модели — множество преимуществ, в числе которых три важнейшие:

1) дифференцируемость реализаций, обеспечивающая существование локальной нормали к элементарной площадке — в отличие от многих других применяемых в литературе моделей типа набора плоских элементов [9] или же конусообразных углублений [10];

2) полная свобода выбора корреляционной функции процесса, позволяющая моделировать широкие классы реальных поверхностей, получаемых при любых способах обработки;

3) возможность аналитического представления вероятностных характеристик числа пересечений наклонного уровня реализациями случайного поля — таких, как вероятность отсутствия пересечений и факториальные моменты числа пересечений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проект 6.0.24.2010).

Все же гауссовская модель применима не всегда. В частности, в работе [12] на базе экспериментальных данных приводится обоснование предпочтения более общей полигауссовской модели шероховатости: «Негауссовской статистикой обладают шероховатости со смешанной структурой, образующиеся в результате нескольких последовательных стадий обработки поверхности (при прессовании, притирке, хонинговании) для поверхностей деталей, подвергшихся износу и приработке в процессе эксплуатации и т. д. Другой причиной негауссовости рельефов является наличие в структуре поверхности детерминированной, часто периодической составляющей, что характерно, в частности, для обработки точением, фрезерованием, обкатыванием, электрополированием». В литературе можно найти и другие свидетельства негауссовости рельефов [13].

Цель настоящей работы — распространить некоторые полученные для гауссовских процессов и полей результаты о свойствах процессов и их выходов за некоторый уровень на более общий случай полигауссовских процессов с возможностью приложений в задаче о рассеянии атомов разреженного газа на шероховатой поверхности. Отметим, что задача впервые была поставлена Р. Н. Мирошиным.

Учитывая, что в аэродинамические характеристики входит в первую очередь вероятность отсутствия выбросов случайного поля за наклонный уровень — траекторию падающей на поверхность частицы газа, можем рассматривать не всю трехмерную поверхность, т. е. не полную реализацию случайного поля, а лишь ее профиль — реализацию случайного процесса, представляющего собой проекцию поля на плоскость траектории движения частицы газа (и локальной нормали к поверхности). Тем самым достигается возможность моделировать не случайное поле, а более простой случайный процесс. При этом для сохранения возможности успешного применения в прикладных задачах необходимо выполнение следующих двух важнейших ограничений на модель случайного процесса.

1. Параметры модели должны быть связаны достаточно простыми аналитическими выражениями с основными статистическими характеристиками процесса — например, с его первыми и вторыми моментами. Данное требование необходимо для выработки эффективных методов численного подбора параметров модели с целью аппроксимации характеристик шероховатости, полученных из профилографических измерений. В частности, выполнение этого требования необходимо при сопоставлении результатов численных расчетов с экспериментальными данными.

2. Модели должен отвечать простой и эффективный алгоритм численной имитации реализаций процессов и полей, позволяющий использовать модель для расчета средних значений функционалов случайной поверхности при помощи усреднения (методом Монте-Карло) по большому количеству имитированных реализаций.

С этой точки зрения наиболее удобным способом аппроксимации случайных процессов представляется использование смесей вероятностных распределений, приводящее нас к полигауссовской модели, позволяющей сколь угодно точно приближать почти любой случайный процесс [14]. Плотность распределения таких процессов в n точках $x_1, \ldots, x_n$, отвечающих моментам времени $t_1, \ldots, t_n$, определяется формулой

$$p_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|R_n(v)|}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\sigma(v))R_n^{-1}(v)(x-\sigma(v))^T\}dF(v), \tag{1}$$

где $\sigma(v)$ и $R_n(v)$ — векторное математическое ожидание и корреляционная матрица значений процесса в заданных точках, $|R_n(v)|$ — определитель корреляционной матрицы, $F(v)$ — неубывающая на $[0;\infty)$ весовая функция, которая может быть как непрерывной (имеющей плотность), так и дискретной (ступенчатой) — требуется лишь сходимость интеграла.

Алгоритм численного моделирования реализаций полигауссовских процессов, базирующийся на преобразовании гауссовских распределений, описан в работе [12], ориентированной на приложения в таких областях, как рассеяние света на шероховатой поверхности, выращивание тонких пленок в микроэлектронике, диагностика поверхности методами электронной спектроскопии и контактные явления, включая трение и износ изделий в машиностроении. При этом показана возможность достаточно точной аппроксимации реальных микрорельефов, полученных в ряде технологических процессов. В частности, моделируются распределения высот шероховатости, образующиеся как при ионной бомбардировке образца стали марки СТ20 атомами азота и аргона, так и при химическом травлении стали спиртовым раствором азотной кислоты по методике, применяемой при стандартном металлографическом исследовании структуры сталей, а также при других методах обработки. Учитывая, что аналогичные технологии применяются и при обработке поверхностей летательных аппаратов, движущихся в верхних слоях атмосферы, уделим основное внимание свойствам полигауссовских процессов, влияющим на моделирование рассеяния атомов разреженного газа на шероховатой поверхности. Наибольший интерес в этом случае представляют так называемые сферически-симметричные процессы, являющие собой важный частный случай полигауссовских [16]. С одной стороны, эти процессы составляют достаточно общий класс, дающий возможность аппроксимировать разнообразные реальные профили шероховатости. С другой стороны, многие характеристки сферически-симметричных процессов (прежде всего, требуемые в рассматриваемых нами задачах) могут вычисляться через соответствующие величины для гауссовских процессов, которые можно считать в достаточной мере изученными [1].

1. Свойства полигауссовских и сферически-симметричных процессов. Случайный процесс называют сферически-симметричным порядка n, если характеристические функции ϕ размерности n зависят только от нормы вектора аргумента (задаваемой корреляционной матрицей R_n процесса):

$$Me^{\xi x} = \phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \phi_1(\xi R_n \xi^T), \tag{2}$$

где $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_n$ — вектор аргумента n-мерной характеристической функции (отвечающей значениям $x_1, \ldots, x_n$ процесса в точках $t_1, \ldots, t_n$), ξ^T — транспонированный вектор, M — символ математического ожидания. Корреляционная матрица R_n положительно определена, поэтому квадратичную форму $\xi R_n \xi^T$ можно интерпретировать как квадрат r^2 нормы вектора ξ.

Принимая во внимание условие согласованности Колмогорова, которое для характеристических функций при $m < n$ записывается в виде $\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \phi(\xi_1, \ldots, \xi_m, 0, \ldots, 0)$ (здесь число нулей равно $m - n$), видим, что соотношение (2) справедливо и для всех характеристических функций меньших размерностей $m < n$, причем функция $\phi_1(r)$ остается той же самой.

Из (2) нетрудно вывести, что сферически-симметричные процессы — частный случай полигауссовских. Связь между функцией одной переменной $\phi_1(r)$, задающей n-мерное распределение, и весовой функцией $F(v)$, определяющей полигауссовское распределение (1), записывается в форме

$$\phi_1(r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^\infty \left(\frac{2}{rv}\right)^{\frac{n}{2}-1} J_{\frac{n}{2}-1}(rv)dF(v), \tag{3}$$

где $J_{\frac{n}{2}-1}$ — функция Бесселя I рода.

Произвольность весовой функции $F(v)$ делает класс сферически-симметричных процессов почти настолько же общим при моделировании реальных профилей, что и множество полигауссовских процессов. Однако ряд свойств сферически-симметричных процессов показывает их большое сходство с гауссовскими процессами. В числе этих свойств необходимо отметить следующие.

1. Сферически-симметричные процессы имеют линейную регрессию [16].

2. Если сферически-симметричный процесс — эргодический, то он имеет нормальное распределение, т. е. весовая функция $F(v)$ представляет собой единичную ступеньку.

3. Класс процессов, для которых понятия широкой и узкой стационарности эквивалентны, совпадает с классом сферически-симметричных процессов.

4. Момент любого порядка сферически-симметричного процесса $\zeta(t)$ выражается в виде произведения аналогичного момента гауссовского процесса (с той же корреляционной матрицей) на однократный интеграл с той же весовой функцией:

$$M\left\{\zeta^{\alpha_1}(t_1)\cdot\ldots\cdot\zeta^{\alpha_k}(t_k)(t)\right\} = M\left\{\zeta^{\alpha_1}(t_1)\cdot\ldots\cdot\zeta^{\alpha_k}(t_k)(t)\right\}\int_0^\infty v^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k}dF(v). \tag{4}$$

5. Марковский сферически-симметричный процесс — всегда гауссовский.

Последнее утверждение вытекает из определения марковского процесса в терминах условных плотностей. Подстановка в это определение выражения для плотностей (1) после представления условных плотностей через безусловные приводит путем логарифмирования и дифференцирования по первой компоненте x_1 к равенству вида

$$\int_0^\infty v^{-5}\exp\left\{-\frac{y}{2v^2}\right\}dF(v) = K\int_0^\infty v^{-3}\exp\left\{-\frac{y}{2v^2}\right\}dF(v), \tag{5}$$

где K — постоянная величина. С помощью замены $v^2 = w^{-1}$ это равенство можно трактовать как обращение в нуль преобразования Лапласа от функции $(w - K)F'(w^{-\frac{1}{2}})$, а это может произойти только в случае, если весовая функция — ступенька, т. е. процесс — гауссовский.

Отметим, что приведенные 5 свойств не могут быть распространены на весь класс полигауссовских процессов. Однако важные для исследования взаимодействия частиц газа с поверхностью (в частности, для построения локальной нормали к малой площадке на поверхности) свойства гладкости остаются верными и для любых полигауссовских процессов, причем их доказательство аналогично доказательству для гауссовских процессов. Эти свойства формулируются следующим образом.

6. Пусть асимптотическое поведение корреляционной функции $r(h)$ полигауссовского процесса $\zeta(t)$ в окрестности нуля $(h \to 0)$ задано соотношением

$$r(h) = 1 - \frac{\lambda_2 h^2}{2} + O(|h|^{2+a}), \tag{6}$$

где $a \in (0;\ 2]$ — константа, λ_2 — конечный второй спектральный момент.

Если для некоторого положительного $\delta > 0$ конечен интеграл

$$\int_0^\infty v^{\frac{2}{a}+\delta} dF(v), \tag{7}$$

то существует процесс, эквивалентный процессу $\zeta(t)$, выборочные функции которого имеют непрерывные производные с вероятностью единица.

7. Пусть асимптотическое поведение корреляционной функции $r(h)$ полигауссовского процесса $\zeta(t)$ в окрестности нуля ($h \to 0$) задано соотношением

$$r(h) = 1 - O(|h|^{2\alpha+a}), \tag{8}$$

где $a \in (0;\ 2]$ и $\alpha > 0$ — константы.

Если для некоторого положительного $\delta > 0$ конечен интеграл (7), то существует процесс, эквивалентный процессу $\zeta(t)$, выборочные функции которого с вероятностью единица удовлетворяют условию Липшица порядка α: $|\zeta(t+h) - \zeta(t)| < C|h|^\alpha$.

Отметим, что ограничения на корреляционную функцию $r(h)$ полигауссовского процесса не являются необходимыми, т. е. их можно убрать из формулировок последних двух утверждений. Однако при этом существенно усложнится ограничение на весовую функцию $F(v)$. Это условие примет вид

$$\int_0^\infty \frac{v\sigma(x^{-1})}{g(x^{-1})} \exp\left(-\frac{g^2(x^{-1})}{4v^2\sigma^2(x^{-1})}\right) dF(v) < \infty, \tag{9}$$

где $g(h) = |h|^\beta$ для некоторого $\beta > 0$ при $0 < a < 2$, и $g(h) = \big|\ln|h|\big|^{-\alpha}$ для некоторого $\alpha > 1$ при $a = 2$, а функция $\sigma(h)$ различна в зависимости от того, какое из свойств (6 или 7) рассматривается. Для свойства дифференцируемости $\sigma^2(h) = 6 + 2r(2h) - 8r(h)$, а для условия Липшица $\sigma^2(h) = (1 - r(h)) \cdot |h|^{-2\alpha}$.

Таким образом, упростить ограничение (9) можно лишь в том случае, если есть возможность вычислить асимптотику внутреннего интеграла в условии (9) при $v \to \infty$.

2. Число пересечений уровня. При решении проблемы рассеяния атомов газа на поверхности основной интерес представляет число $A_u[0;\ T]$ выходов реализаций случайного процесса или поля за некоторый уровень u на отрезке $[0;\ T]$. Атомами мы называем здесь все частицы газа, независимо от наличия внутренней структуры, так как структура учитывается локальной функцией рассеяния, которая считается заданной, т. е. ее рассмотрение не входит в наш круг задач. Вообще говоря, высота уровня u должна зависеть от абсциссы, поскольку уровень по сути задает форму траектории движения атома газа. Хотя в режиме, близком к свободномолекулярному потоку, эту траекторию можно считать прямолинейной, она остается наклонной по отношению к плоскости среднего уровня шероховатости. Однако на практике нередко можно полагать угол наклона малым, поэтому начнем с модельной задачи постоянного уровня, которая наиболее полно изучена для гауссовских процессов и полей.

Аэродинамические свойства шероховатой поверхности, обтекаемой разреженным газом, определяются через вероятность отсутствия выбросов за уровень $P(A_u[0;\ T] = 0)$ или же через факториальные моменты числа выходов $N_k(T) = M[A_u(A_u - 1) \cdot \ldots \cdot (A_u - k + 1)]$. Отметим, что вероятностные характеристики (в частности, факториальные моменты) случайной величины $A_u[0;\ T]$ выражаются в виде многократных интегралов от совместной плотности распределения случайного процесса и его производных в нескольких точках $p_{t_1,\dots,t_k}(u_1, u_2, \dots, u_k, y_1, y_2, \dots, y_k)$, где $u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_k$ — значения случайного процесса, а $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_k$ — значения его производных в несовпадающих точках $t_1,\ t_2 \dots ,t_k$.

Для сферически-симметричного процесса совместную плотность распределения процесса и его производных $p_{t_1,\dots,t_k}$ удается выразить через аналогичную совместную плотность распределения гауссовского процесса и его производных:

$$p_{t_1,\dots,t_k}(u_1, u_2, \dots, u_k, y_1, y_2, \dots, y_k) = \int_0^\infty p^{v^2 r}_{t_1,\dots,t_k}(u_1, u_2, \dots, u_k, y_1, y_2, \dots, y_k) dF(v), \tag{10}$$

где $p^{v^2 r}_{t_1,\dots,t_k}(u_1, u_2, \dots, u_k, y_1, y_2, \dots, y_k)$ — плотность распределения гауссовского процесса с корреляционной функцией $v^2 r(t)$ и его производных в несовпадающих точках $t_1, t_2 \dots ,t_k$. На корреляционную функцию накладывается требование: спектр процесса должен содержать непрерывную компоненту.

Доказательство формулы (10) довольно громоздко, поэтому полностью приводить его не будем, ограничимся лишь кратким изложением его сути. Плотность распределения процесса и его производных в k точках представляется в виде предела плотности распределения процесса в $2k$ точках при стремлении к нулю k приращений по времени значений $t_1,\ t_2 \dots ,t_k$. Последняя плотность для любого полигауссовского процесса выражается в виде смеси (1) гауссовских распределений. Основную трудность составляет обоснование предельного перехода при стремлении к нулю k приращений по времени. При наличии непрерывной компоненты в спектре для сферически симметричного процесса обоснование предельного перехода базируется на теореме Лебега и может быть проведено для любой весовой функции $F(v)$. Заметим, что доказательство может быть обобщено и на случай произвольных полигауссовских процессов, однако требуются ограничения как на корреляционную функцию $r(t)$, так и на весовую функцию $F(v)$.

Представление (10) плотности распределения процесса и его производных дает возможность получить выражение для факториальных моментов $N_k(T,u)$ числа $A_u[0;\ T]$ выходов реализаций случайного процесса за уровень u на отрезке $[0;\ T]$. Для этого необходимо подставить формулу (10) в выражения факториальных моментов $N_k(T,u)$ в виде многократных интегралов от совместной плотности распределения случайного процесса и его производных [1], после чего поменять порядок интегрирования. Оценки, обосновывающие законность изменения порядка интегрирования, также достаточно громоздки, поэтому приводить их здесь нецелесообразно. Отметим, что при этом не возникает ограничений в дополнение к тем, которые требовались при выводе (10). В результате получаем

$$N_k(T,u) = \int_0^\infty N_k^r(T, \frac{u}{v}) dF(v), \tag{11}$$

где $N_k^r(T, \frac{u}{v})$ — факториальные моменты числа выходов реализаций гауссовского случайного процесса с корреляционной функцией $r(t)$ за уровень $\frac{u}{v}$ на отрезке $[0;\ T]$.

Аналогичные (11) представления характеристик полигауссовских и сферически-симметричных процессов через соответствующие величины для гауссовских процессов имеют место и для обычных степенных (не факториальных) моментов числа выходов за уровень, так как обычные моменты можно выразить в виде линейной комбинации факториальных моментов.

Кроме того, из (11) вытекает, что распределение числа нулей полигауссовских и сферически-симметричных процессов в точности совпадает с распределением числа нулей гауссовских процессов, так как при $u = 0$ факториальные моменты $N_k^r(T, \frac{u}{v})$ перестают зависеть от переменной v и могут быть вынесены из под знака интеграла в (11).

Еще одно следствие формулы (11) — выражение для среднего числа $MA_u[0;\ T]$ выбросов рассматриваемых процессов за уровень, которое получается из формулы для среднего числа выбросов гауссовского процесса:

$$\mu = MA_u[0;\ T] = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2v^2}\right) dF(v). \tag{12}$$

3. Асимптотика для пересечений высокого уровня. Распределение числа выбросов за высокий уровень важно для практических приложений, в частности, для задачи о рассеянии на шероховатой поверхности, поскольку в силу свойств подобия повышение уровня равносильно пропорциональному снижению среднего квадратического отклонения случайного процесса, моделирующего шероховатость. Иными словами, асимптотика выбросов за высокий уровень отвечает асимптотике на слабо шероховатой поверхности.

Обоснование предельного перехода при стремлении уровня u к бесконечности требует громоздких оценок при установлении равномерной сходимости. Поэтому приведем лишь итоговые результаты.

Пусть для весовой функции конечен интеграл (7), а корреляционная функция $r(t)$ удовлетворяет асимптотическим условиям в нуле и на бесконечности:

$$r(t) = 1 - \frac{1}{2}\lambda_2 t^2 + o(t^2), \quad t \to 0, \tag{13}$$

$$r(t) = o(\ln^{-1}(t)), \quad t \to \infty. \tag{14}$$

Пусть высота уровня возрастает $u \to \infty$ при согласованном увеличении длины отрезка:

$$T = \frac{2\pi\mu}{\sqrt{\lambda_2} f_1(u^2)}, \tag{15}$$

где

$$f_1(u^2) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2v^2}\right) dF(v). \tag{16}$$

Тогда для факториальных моментов числа $A_u[0;\ T]$ выходов реализаций случайного процесса за высокий уровень $u \to \infty$ на отрезке $[0;\ T]$ при согласованном увеличении длины отрезка имеет место альтернатива:

— либо полигауссовский процесс имеет в смеси гауссовскую компоненту с максимальным значением v — иными словами, весовая функция $F(v)$ имеет скачок на правом конце, т. е. функция тождественно равна единице, начиная с некторого значения аргумента: $F(v) = 1$ при $v \geq v_0$; а предел слева — меньше единицы:

$$\lim_{v \to v_0 - 0} F(v) = 1 - c_1, \quad 0 \leq c_1 < 1; \tag{17}$$

при этом все моменты сходятся к конечным значениям (постоянная μ здесь определяется формулой (12)):

$$\lim_{u\to\infty} N_k(T,u) = c_1 \frac{\mu^k}{c_1^k}, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{18}$$

— либо все факториальные моменты, начиная со второго, стремятся к бесконечности в соответствии с (11), т. е. каждый следующий момент стремится к бесконечности быстрее предыдущего.

Таким образом, асимптотика моментов числа выбросов за высокий уровень напоминает соответствующую асимптотику для гауссовского процесса только при наличии в смеси $F(v)$ гауссовской компоненты с максимальным значением v. Во всех остальных случаях асимптотика моментов существенно другая, т. е. и все характеристики числа выбросов полигауссовских процессов должны заметно отличаться от гауссовских.

4. Применение к задаче о рассеянии на шероховатой поверхности. Полученные результаты имеют два аспекта приложений к проблеме учета влияния шероховатости на аэродинамические характеристики поверхности в потоке разреженного газа.

С одной стороны, появляется возможность вывести асимптотические формулы, описывающие изучаемое влияние на слабо шероховатой поверхности. Однако здесь нужно учесть, что уже для гауссовских процессов такие асимптотические формулы достаточно громоздки и содержат континуальные интегралы — интегралы по множеству реализаций случайного процесса (или случайного поля), требующие при вычислении аппроксимации интегралами очень высокой кратности. Кроме того, реальные поверхности всегда обладают микрошероховатостью (даже при самой лучшей обработке), которую нельзя считать слабой. Поэтому асимптотические исследования не получили широкого распространения. Главный практический вывод, который можно сделать из полученной альтернативы (формулы (17)–(18)) состоит в том, что влияние шероховатости для полигауссовской модели сильнее, чем для чисто гауссовской (так как каждый следующий момент стремится к бесконечности быстрее предыдущего).

С другой стороны, полигауссовская модель может применяться в численных расчетах, прежде всего наиболее употребительными в аэродинамике разреженного газа методами статистического моделирования [15]. В этом случае многое зависит от вида функции рассеяния на поверхности и от свойств газа и поверхности [11]. Полученные результаты позволяют еще на предварительном этапе расчета подобрать класс процессов так, чтобы он не только аппроксимировал реально наблюдаемые профили шероховатости, но и обладал нужным набором свойств для оптимального подбора численных процедур моделирования взаимодействия атома газа с неровностями шероховатости.

Заключение. Рассмотренные в работе классы полигауссовских и сферически симметричных случайных процессов позволяют значительно расширить и обогатить возможности асимптотических и численных исследований, связанных с моделированием шероховатых поверхностей. Анализ полученных результатов дает возможность сделать следующие выводы:

1) для обеспечения выполнения основных свойств случайных процессов, необходимых при моделировании реальной шероховатости, следует при задании параметров

модели учитывать ограничения на корреляционную и весовую функции моделирующего процесса (формулы (6)–(9));

2) характеристики числа выходов за уровень (в частности, за траекторию движущегося атома газа) могут быть выражены через соответствующие характеристики гауссовского процесса, что позволяет применять достаточно хорошо разработанную теорию [1–8], базирующуюся на моделировании шероховатости гауссовскими процессами и полями;

3) хотя важнейшие свойства полигауссовских процессов близки к аналогичным свойствам гауссовских, асимптотика числа выбросов за высокий уровень при отсутствии гауссовской компоненты в смеси существенно отличается, причем влияние на представляющие наибольший интерес вероятностные характеристики увеличивается, т. е. вклад шероховатости в аэродинамические величины для полигауссовской модели может существенно вырасти по сравнению с гауссовской моделью.

Литература

1. *Мирошин Р. Н.* Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л., 1981. 212 с.

2. *Мирошин Р. Н., Халидов И. А.* Локальные методы в механике сплошных сред. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 304 с.

3. *Мирошин Р. Н.* Случайные процессы и поля. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 304 с.

4. *Аксенова О. А., Халидов И. А.* Шероховатость поверхности в аэродинамике разреженного газа: фрактальные и статистические модели. СПб.: Изд-во ВВМ, 2004. 120 с.

5. *Мирошин Р. Н.* Метод моментов в аэродинамике. СПб.: Изд-во ВВМ, 2012. 142 с.

6. *Мирошин Р. Н.* О дисперсии числа нулей некоторых стационарных гауссовских процессов: малые отклонения от простых решений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2006. Вып. 1 (№ 1). С. 50–59.

7. *Мирошин Р. Н.* Об одном классе многократных интегралов // Математические заметки. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 390–401.

8. *Аксенова О. А., Халидов И. А.* Application of Gaussian Random Field Theory to Direct Simulation of Rarefied Gas Flow near Rough Surface // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. 1501: Melville, New York, 2012. P. 1160–1167; doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4769672

9. *Borisov S., Ukhov A., Porodnov B.* Numerical Simulation of Gas Dynamics Conductivity of Micro Channels with Consideration of Surface Structure // Rarefied Gas Dynamics. AIP Conference Proceedings, Melville, NY, 2009. P. 712–717.

10. *Gimelshein N. E., Lilly T. C., Gimelshein S. F., Ketsdever A. D., Wysong L. J.* Surface Roughness Effects in Low Reynolds Number Nozzle Flows // Rarefied Gas Dynamics. Proc. of XV Int. Symp. Novosibirsk, 2007. P. 695–702.

11. *Мирошин Р. Н.* О лучевой модели взаимодействия атомов разреженного газа с поверхностью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 4 (№ 22). С. 74–79.

12. *Литвак М. Я., Малюгин М. И.* Полигауссовские модели негауссовской случайно-шероховатой поверхности // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. Вып. 4. С. 99–107.

13. *Rough Surfaces* / ed. by N. R. Thomas. London: Longman Groups, 1982. 261 p.

14. *Чабдаров Ш. М., Трофимов А. Т.* Полигауссовы представления произвольных помех и прием дискретных сигналов // Радиотехника и Электроника. 1975. Т. 20. № 4. С. 734–745.

15. *Bird G. A.* Molecular gas dynamics and direct simulation of gas flows. Oxford: University Press, 1996.

16. *Kung Yao.* A Representation Theorem and its Application to Spherically-Invariant Random Processes // IEEE Transactions on Information Theory. 1973. Vol. 19, N 5. P. 600–608.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Сведения об авторах

Халидов Искандер Анасович — доктор физико-математических наук, профессор; iskander.khalidov@gmail.com

APPLICATION OF POLY-GAUSSIAN RANDOM PROCESSES TO FLOW MODEL NEAR ROUGH SURFACE IN RAREFIED GAS

Iskander A. Khalidov

St.Petersburg State Polytekhnical University, Polytekhnicheskaya ul., 29, St. Petersburg, 195251, Russian Federation; iskander.khalidov@gmail.com

The properties of poly-Gaussian model of randomly rough surface are investigated affecting its aerodynamic characteristics in rarefied gas flow. The representation of probability distribution in the form of the mixture of Gaussian distributions allows to derive analytic expressions of factorial moments of the number of outliers upon a level, playing a key role in finding the scattering function of gas atoms on the surface and the momentum exchange coefficients. The important particular case of poly-Gaussian processes in considered — spherically-symmetric random processes, permitting to simplify the conditions. The asymptotic evaluations are found for high level crossings characteristics corresponding to the case of weakly rough surface. Obtained results allow to evaluate the influence of surface roughness on the type of gas flow near the surface in comparison to Gaussian model of roughness. Refs 16.

Keywords: rarefied gas flow, gas-surface interaction, poly-Gaussian model of roughness.

ХРОНИКА

15 мая 2014 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступили магистрант А. А. Пашкина и доктор физ.-мат. наук, профессор М. П. Юшков (Санкт-Петербургский государственный университет) с докладом на тему «О возможности применения обобщенного принципа Гаусса».

Краткое содержание доклада:

Одну из важнейших задач теории управления о переводе механической системы за заданное время из одного фазового состояния в другое часто решают с помощью классического принципа максимума Понтрягина. В докладе эта задача обсуждается как задача о гашении колебаний при переводе тележки с маятником из состояния покоя в новое состояние покоя. Показано, что решение такой задачи с помощью принципа максимума Понтрягина эквивалентно решению неголономной задачи при наложении связи шестого порядка. В связи с этим для решения той же задачи предлагается применить обобщенный принцип Гаусса, опубликованный сотрудниками кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Ленинградского университета в «Докладах АН СССР» еще в 1983 г. Важно, что при этом применение обобщенного принципа Гаусса дает более плавное движение системы по сравнению с решением, полученным по принципу Понтрягина, вводящем систему при длительном движении в резонанс.