

МОДЕЛИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН В ЗАДАЧАХ ОФТАЛЬМОЛОГИИ

С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Предметом настоящего обзора стали математические модели, построенные в сотрудничестве с врачами-офтальмологами. Кратко описаны модели расчета напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после выполнения операций, связанных с лечением отслойки сетчатки, модели теории аккомодации.

Обсуждаются математические модели, описывающие процесс определения истинного внутриглазного давления (ВГД) при помощи аппланационных методов. Обсуждаются модели, которые позволяют оценить влияние отклонений формы роговицы и склеры от сферической формы на показатели ВГД, оценить влияния толщины роговицы на показатели внутриглазного давления. Отмечается, что модели биомеханики глаза помогли получить ряд новых результатов в механике деформируемого твердого тела, например, решить задачу об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием сосредоточенной силы и внутреннего нормального давления, об устойчивости осесимметричной формы равновесия кольцевых неоднородных ортотропных пластин, находящихся под действием нормального давления, задачу об устойчивости сегмента ортотропной оболочки, находящегося под действием нормального внутреннего давления и приложенного груза с плоским основанием, решить задачи о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев, находящихся под действием внутреннего и внешнего давлений. Сравнение этих решений с решениями, получающимися по неклассическим теориям оболочек, позволили оценить точность некоторых теорий. Библиогр. 49 назв. Ил. 9.

Ключевые слова: математическое моделирование, теория оболочек, модели неклассических теорий оболочек.

1. Введение. Более двадцати лет на кафедре теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета в сотрудничестве с врачами ведутся работы по моделированию некоторых процессов в офтальмологии. Рассмотренные задачи ставились и результаты обсуждались со специалистами Санкт-Петербургского филиала МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С. Н. Федорова, со специалистами кафедры офтальмологии Российской Военно-медицинской академии, работающими под руководством д-ра мед. наук проф. В. В. Волкова, со специалистами Московского НИИ глазных болезней им. Гельмгольца. Результаты работы докладывались на многочисленных российских и международных конференциях как по механике, так и по проблемам офтальмологии.

Новые знания в области биомеханики глаза позволяют улучшать диагностику различных заболеваний, развивать новые методы терапевтического и хирургического лечения глаза. В связи с этим к математическому описанию глаза в целом и его отдельных элементов обращались уже при решении многих проблем, и даже эти существенно упрощенные модели оказывались полезными для врачей-офтальмологов.

В течение четверти века был построен ряд математических моделей, связанных с деформированием элементов глаза. Опишем кратко структуру глаза (рис. 1). Глаз человека, в первом приближении шаровидной формы, имеет три основных оболочки: наружную плотную капсулу, включающую в себя склеру и роговицу, сосудистую оболочку и внутреннюю очень тонкую оболочку — сетчатку. Проблемы возникновения и лечения отслойки сетчатки, развития отслойки сосудистой оболочки, глаукоматозной

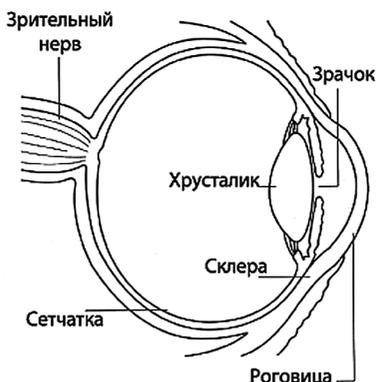


Рис. 1. Строение глаза.

атрофии зрительного нерва, аккомодации, связанные с деформированием составных элементов глаза, остаются важными проблемами хирургии [17]. В последнее время в связи с развитием рефракционной хирургии, меняющей параметры роговицы глаза, особое значение приобрели вопросы стандартизации измерения внутриглазного давления (ВГД), изучение влияния различных параметров глазного яблока на показатели тонометров.

2. Модели методов лечения отслойки сетчатки. Отслойкой сетчатки называют патологическое состояние, при котором сетчатка теряет контакт с сосудистой оболочкой и отходит от нее внутрь полости глаза. В большинстве случаев отслойка сетчатки подлежит хирургическому лечению с эвакуацией жидкости из образовавшейся полости и вдавливанием наружных слоев оболочки глаза до совмещения их с отслоившейся сетчаткой. Для вдавливания склеральной оболочки применяли различные приемы: круговое вдавливание нитью или лентой по параллели, так называемый циркулярж (рис. 2), локальное пломбирование, или комбинированная нагрузка циркуляржа и пломбы. Чрезмерное затягивание циркуляржной ленты или швов над пломбой является одним из факторов, которые могут вызвать осложнения: повышение внутриглазного давления, продавливание ленты или пломбы сквозь склеру в полость глаза, возникновение дополнительных складок. Рассматривался ряд моделей расчета напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после выполнения противоотслоечных операций [9, 14, 16, 24, 25, 34, 37, 48].

Простейшая модель наружной оболочки глаза представляет собой упругую изотропную тонкостенную сферическую оболочку постоянной толщины h и радиуса R , широко используемый вариант циркуляржа — перетягивание глаза нитью (или лентой) в плоскости экватора $\theta = 0$. При этом оболочка находится под действием внутриглазного давления p и поверхностного давления q со стороны ленты. В силу симметрии действующих на глаз нагрузок рассматривались осесимметричные деформации оболочки. Учитывалось изменение внутриглазного давления глаза p после циркуляржа по сравнению с начальным давлением p_0 :

$$p = p_0 + K \frac{\Delta V_2 - \Delta V_1}{V - \Delta V_1}, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (1)$$

Здесь V — начальный объем стекловидного тела, $\Delta V_2, \Delta V_1$ — уменьшение объема за счет циркуляржа и вследствие удаления субретинальной жидкости (объем отслойки),

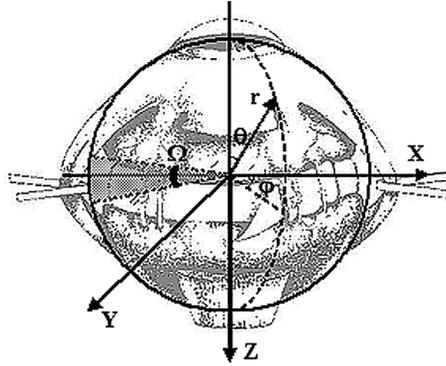


Рис. 2. Моделирование лечения отслойки сетчатки глаза.

K — модуль объемного сжатия стекловидного тела (если оно несжимаемо, то $K = \infty$ и уравнение (1) имеет вид $\Delta V_1 = \Delta V_2$).

При удалении от ленты напряженное состояние безмоментно, а в ее окрестности оно предполагалось быстроменяющимся. Дополнительное перемещение w^k , затухающее при удалении от ленты, определялось из уравнения краевого эффекта

$$\mu^4 \frac{d^4 w^k}{d\theta^4} - 2\mu^2 \gamma \frac{d^2 w^k}{d\theta^2} + w^k = q_*(\theta), \quad (2)$$

где

$$\mu^4 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad \gamma = \frac{pR}{4Eh\mu^2}, \quad q_* = \frac{qR^2}{Eh},$$

μ — малый параметр тонкостенности оболочки.

Учитывая соотношения, связывающие натяжения ленты N , ее удлинение δl , среднее по ширине ленты ее давление на глаз $q_{\text{ср}}$ и средний прогиб $w_{\text{ср}}$ оболочки глаза под лентой, для функции нагрузки можно получить выражение

$$q_*(\theta) = b\xi(\theta) \left(\frac{\Delta l}{2\pi} - w_{\text{ср}}^k + \frac{a(1-\nu)}{2(1+a)} I^k - \frac{a\Delta V_1}{4\pi R^2(1+a)} \right), \quad (3)$$

где

$$I_1^k = \int_{\theta_0}^{\infty} w^k(\theta) d\theta, \quad \Delta_* l = \frac{\Delta l}{2\pi} - \frac{a\Delta V_1}{4\pi R^2(1+a)},$$

причем угол θ_0 характеризует ширину ленты $H = 2R \sin \theta_0$, параметр a учитывает жесткость стекловидного тела (для несжимаемого стекловидного тела $a/(1+a) = 1$), параметр b учитывает жесткость ленты на растяжение. Таким образом, получается интегродифференциальное относительно функции $w^k(\theta)$ уравнение (2).

После определения функции $w^k(\theta)$ предложенная модель позволяет найти величины, важные при планировании операции: повышение внутриглазного давления, изменения ПЗО (передне-задней оси — оптической длины глаза), оценить напряженно-деформированное состояние оболочки глаза в окрестности ленты и определить влияние ширины, жесткости, начального укорочения ленты на эти величины.

Если циркуляж наложен узкой лентой или нитью, то удастся получить приближенное аналитическое решение задачи [9, 16, 25, 37]. При больших отслойках иногда

цирклиаж выполняется широкой лентой (шириной 9 мм). Предположение, что решение быстро затухает при удалении от ленты, в этом случае не является оправданным. Тогда задача о напряженно-деформированном состоянии оболочки глаза решается на основе системы уравнений осесимметричной деформации сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления p и давления со стороны ленты $q(\theta)$. Решение строится в виде рядов по полиномам Лежандра $P_m(x)$ [16, 25].

Проведены расчеты при различных параметрах. Ширина стандартной узкой ленты, используемой в России для цирклиажа, была 2.5 мм. Результаты расчета по формулам для такой ленты согласуются с клиническими данными. Для широкой ленты деформации (прогиб под лентой и удлинение ПЗО) на 15–18% отличались от результатов, полученных по соотношениям для узкой ленты. Изменения внутриглазного давления отличались только на 1–2%.

Стандартная ширина узкой ленты, используемой для цирклиажа в Германии, — 3 мм, в связи с этим по просьбе коллег и офтальмологов из Германии были сделаны расчеты для лент, используемых в Германии. Проведены сравнения с клиническими данными. Результаты представлялись на конференциях, которые проводят European Association for Vision and Eye Research (EVER-2004) и American Association for Research in Vision and Ophthalmology (ARVO-2005) [47].

Из-за большой относительной толщины склеральной оболочки (~ 0.1) был проведен также расчет напряженно-деформированного состояния склеральной оболочки глаза на основе уравнений трехмерной теории упругости. Уравнения взяты в форме, предложенной П. Ф. Папковичем. Определены перемещения сферической оболочки и максимальные значения напряжений. Проведено исследование изменения коэффициента ригидности глаза после цирклиажа [16] (в офтальмологии коэффициентом ригидности глаза называют соотношение между изменением ВГД и соответствующим изменением объема глазного яблока).

Как уже отмечалось, одной из форм послеоперационного осложнения может быть образование складок, нарушающее кровообращение и приводящее к отекам, поэтому рассматривалась задача о локальной устойчивости глаза при наложении цирклиажного шва [37]. В окрестности линии, по которой проходит лента, оболочка глаза моделируется тонкой сферической оболочкой. Осесимметричный прогиб оболочки глаза, вызванный давлением ленты, определяется из уравнений краевого эффекта (2). Для построения смежной неосесимметричной формы равновесия используется система уравнений пологих оболочек Доннелла, а для решения задачи используется метод асимптотического интегрирования. Определяется критическое укорочение ленты, приводящее к неосесимметричным прогибам. Исследование на устойчивость показало, что, по-видимому, для цирклиажа опасно использовать нерастяжимые нити. Более целесообразно применять силиконовые ленты или жгуты. Следует отметить, что от нерастяжимых нитей в таких операциях отказались в середине 1990-х годов.

Иногда для лечения отслойки сетчатки глаза используется пришивание к склере пломбы. Самостоятельное локальное пломбирование проводят, в основном, при единичных разрывах. Величина пломбы определяется размерами разрыва. Материал пломбы обычно жестче материала оболочки глаза. В работах [24, 34, 48] операция пломбирования рассматривалась как задача контактного взаимодействия однородной упругой оболочки с абсолютно жестким осесимметричным штампом (рис. 3, а)

На рис. 3, б представлено распределение безразмерных контактных напряжений σ/E под штампом при безразмерных прижимных усилиях Y/ER [24, 48]. Рассматривался штамп в форме эллипсоида вращения. Анализ результатов расчета показывает,

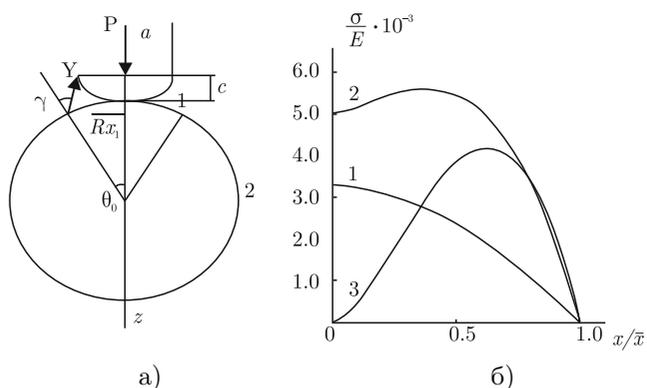


Рис. 3. Локальное промбирование (а) и распределение контактных напряжений (б).

что с увеличением прижимных усилий наряду с ростом площадки контакта происходит смещение максимума контактных напряжений под пломбой от центра (рис. 3, б, кривая 1) в сторону границы контакта (кривая 2). При дальнейшем возрастании прижимных усилий напряжения в окрестности центра контакта убывают до нуля (кривая 3), и возможен переход от круговой зоны контакта к кольцевой с потерей контакта в окрестности центра. Это является следствием большего радиуса кривизны пломбы по сравнению с радиусом оболочки глаза.

3. Модели отслоения сосудистой оболочки. После операций, сопровождающихся вскрытием глазного яблока, иногда возникают осложнения, связанные с отслоением сосудистой (средней) оболочки глаза. В связи с этим рассматривалась механическая модель развития отслойки сосудистой оболочки, которую можно представить как одну из форм разрушения — в виде трещины расслоения [8, 16]. В частности, в зонах сжатия может произойти отслоение, причиной которого является местная потеря устойчивости. Используя энергетический критерий Гриффитса, полагаем, что нижняя граница опасного напряжения отслаивания определяется из соотношения

$$U_1 = U_2 + W, \quad (4)$$

где U_1 — упругая энергия сжатия, накопленная в слое толщиной h_0 перед выщелкиванием, U_2 — энергия этого слоя после выщелкивания — энергия изгиба, $W = 2\gamma S$ — работа разрушения (S — площадь поверхности отрыва, а γ — удельная работа разрушения). Предполагалось, что оболочка находится под действием внешнего давления и что при локальной потере устойчивости сферической оболочкой под действием равномерного давления образуется одна вмятина, и на первой стадии развития вмятины, вплоть до расслоения, поведение упругой сферы может быть описано теорией пологих оболочек. По энергетическому критерию (4) оценивались сжимающие напряжения в оболочке глаза, соответствующие отслоению слоя толщины h_0 . Константа Гриффитса γ , характеризующая прочность связи склеры и сосудистой оболочки, определялась экспериментально на энуклеированных глазах в лаборатории прочности полимеров Б. А. Зиминим. Оказалось, что минимальное значение σ_{kr} достигается при толщине, соответствующей средней толщине сосудистой оболочки, и, таким образом, этот слой является наиболее склонным к отщеплению. Критическое значение напряжения, соответствующее этому слою, следует, по-видимому, рассматривать как нижнюю границу

опасного напряжения, вызывающего расслоение. Эта величина оказалась значительно меньше предельных разрушающих напряжений для склеры. Следовательно, при ударе в область глаза более вероятно отслойка сосудистой оболочки с последующим разрывом сетчатки или сосудистой оболочки, а не разрыв склеры.

В клинических исследованиях наблюдаются различные (не только симметричные) формы отслоения, что может быть обусловлено различными факторами. В связи с этим рассмотрена задача о потере устойчивости сферической оболочкой под действием сосредоточенной силы и внутреннего давления [36]. Для этого сначала с помощью асимптотических и численных методов определялись большие деформации в окрестности приложения сосредоточенной силы и далее определялась точка бифуркации осесимметричного равновесия сферической оболочки. Определялось влияние внутреннего давления на величину и форму потери устойчивости. В случае, когда внутреннее давление равно нулю, наименьшему параметру сосредоточенной силы соответствуют три волны. Естественно, критическое значение сосредоточенной силы увеличивается с ростом внутреннего давления. Но при малых значениях внутреннего давления форма потери устойчивости не меняется. При значении p внутреннего давления $p > 3.56Eh^2 / (R^2 \sqrt{12(1-\nu^2)})$ происходит потеря устойчивости с четырьмя волнами в окружном направлении. Интересно отметить, что при разных значениях внутреннего давления размеры зоны больших деформаций оказываются равными.

4. Деформация решетчатой пластинки диска зрительного нерва. Известно, что при повышении ВГД разрушение зрительного нерва, приводящее к дефектам поля зрения, происходит в области решетчатой пластинки диска зрительного нерва. Решетчатой пластинкой (РП) называется участок склеры недалеко от заднего полюса глаза. В этом месте склера становится тоньше и имеет множество мелких отверстий, через которые проходят пучки зрительного нерва.

Как отмечают офтальмологи, первые признаки глаукоматозной экскавации (прогиба) диска зрительного нерва, как правило, появляются раньше дефектов в поле зрения. То есть начальные изменения диска зрительного нерва имеют значение для диагностики глаукомы, а их динамика важна для оценки эффективности проводимой терапии. Это делает важным изучение индивидуальных особенностей строения решетчатых пластинок, которые могут увеличить предрасположенность к глаукоматозным повреждениям. В ряде работ деформации РП глаза изучались на основе клинических наблюдений, но представляет также интерес построение математических моделей, адекватно описывающих поведение РП диска зрительного нерва при изменении ВГД.

Решетчатая пластинка в 5–6 раз тоньше склеры и ослаблена множеством отверстий, поэтому ее можно рассматривать как круглую или близкую к круглой пластину с жестко заделанным краем. В [35] проведено сравнение решений задачи о деформации составной оболочки (склеры и РП) и отдельно задачи о деформации пластинки под действием нормального давления. Расчеты показали, что как и отмечается в клинических данных офтальмологов, диаметр склерального кольца практически не меняется, и прогибы пластинки, полученные при рассмотрении составной оболочки и жестко заделанной пластинки, отличаются меньше, чем на 1%. Таким образом, деформацию РП можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки, что облегчает учет особенностей ее строения — анизотропию и неоднородность. При расчетах перфорированных пластинок обычно последние заменяются некоторыми сплошными пластинами с приведенными параметрами. Оценить приведенный модуль упру-

гости РП можно по данным о средней глубине экскавации диска зрительного нерва при фиксированном ВГД.

Как отмечается в офтальмологической литературе, у большинства людей (80–90%) РП имеют неравномерную по радиусу и по углу механическую структуру, особенность которой может передать модуль упругости вида

$$E(r, \theta) = E_1(r) + E_2(r) \cos 2\theta, \quad (5)$$

где E_1, E_2 — убывающие функции радиальной координаты.

Решетчатая пластина рассматривается в математических моделях как трансверсально-изотропная в общем случае неоднородная круглая пластинка [3, 16, 30, 38, 39].

Задача о прогибе круглых цилиндрически ортотропных и трансверсально-изотропных неоднородных (по радиусу и по углу) пластин решалась в рамках линейной и геометрически нелинейной общей уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], теории анизотропных оболочек средней толщины Палия—Спиро (ПС) [26] и уточненной итерационной теории Родионовой—Титаева—Черныха (РТЧ) [28]. Для однородных пластин получены соотношения для прогиба пластин по приближенным моделям [41, 49].

По классической теории пластин Кирхгофа—Лява (КЛ) безразмерный прогиб пластины под действием давления q зависит только от механических параметров срединной поверхности и имеет вид (для жестко защемленного края)

$$w^{KL}/q = \begin{cases} \frac{1}{8(n^2 - 9)} \left(\frac{4r^{n+1}}{n+1} - r^4 + \frac{n-3}{n+1} \right) & \text{для } n \neq 3, \\ (4r^4 \ln r - r^4 + 1) / 192 & \text{для } n = 3. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $r = r_{dm}/R$, $w = w_{dm}/R$ — безразмерная радиальная координата и прогиб срединной поверхности, $n^2 = E_\theta/E_r$ — отношение модулей упругости пластины в окружном (E_θ) и радиальном (E_r) направлениях, $q = q_{dm}R^4/(D_r h)$ — безразмерный параметр нагрузки, $D_r = h^3/(12(1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}))$.

Теории ТР и Амбарцумяна дают для прогиба, соответственно

$$\frac{w^{TR}}{q} = \frac{w^{KL}}{q} + \frac{a_2^T}{2}(r^2 - 1), \quad a_2^T = -\frac{3D_r}{4hR^2G_{rz}}, \quad (7)$$

$$\frac{w^A}{q} = \frac{w^{KL}}{q} + a_2^A \frac{r^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{a_1^A}{2(n^2 - 1)} \left(\frac{2r^{n+1}}{n+1} - r^2 + \frac{n-1}{n+1} \right), \quad (8)$$

$$a_1^A = \frac{h^2}{10R^2}(\nu_{31}^* - \nu_{32}^*) - \frac{4(n^2 - 1)}{5}a_2^A, \quad a_2^A = -\frac{3D_r}{4hR^2G_{rz}},$$

где G_{rz} — модуль жесткости на сдвиг в плоскости (r, z) .

Теории ПС и РТЧ позволяют учесть распределение напряжений и перемещений, возникающих в пластине, по ее толщине. Выражение для прогиба срединной поверхности, получающееся по теории ПС, имеет вид (8) с коэффициентами a_1 и a_2 :

$$a_1^P = \frac{h^2}{8R^2}(\nu_{31}^* - \nu_{32}^*) - (n^2 - 1)a_2^P, \quad a_2^P = -\frac{D_r}{2hR^2G_{rz}}.$$

Здесь ν_{31}^* , ν_{32}^* — параметры, зависящие от свойств пластины, введенные, например, в [28]. Явные выражения для прогибов и напряжений по теории РТЧ имеют громоздкий вид и приведены в [41, 49].

Решение задачи о прогибе ортотропной пластины, моделирующей РП глаза, полученное по неклассическим теориям, сравнивалось с численным решением трехмерной задачи теории упругости, полученным методом конечных элементов (МКЭ) с помощью прикладного пакета COMSOL Multiphysics (v. 4.4). Результаты сравнения для нормальных перемещений приведены на рис. 4, для напряжений — на рис. 5.

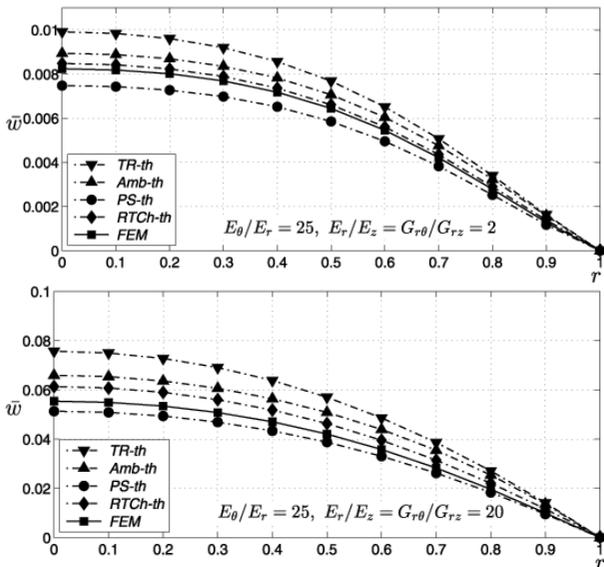


Рис. 4. Безразмерный нормальный прогиб срединной поверхности для $E_r/E_z = G_{r\theta}/G_{rz} = 2$ (вверху) и $E_r/E_z = G_{r\theta}/G_{rz} = 20$ (внизу) по различным теориям пластин (пунктирные линии) и МКЭ (сплошная линия).

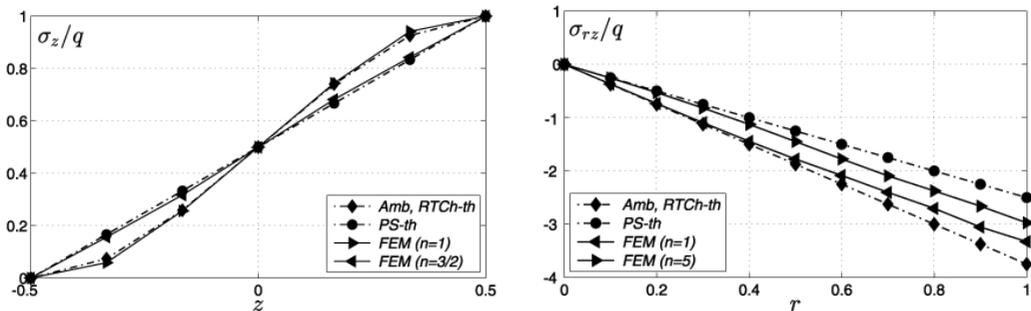


Рис. 5. Распределение нормальных (слева) и сдвиговых напряжений (справа) в круглой пластине ($h/R=0.2$).

Расчеты деформации РП, проведенные на основе моделей однослойных пластин, не позволяют объяснить тот факт, что атрофия зрительного нерва при повышении давления возникает, по данным офтальмологов на «наружном слое». Задача о деформации многослойной оболочки вращения с упругими связями между слоями под

действием внутреннего давления в рамках общей нелинейной теории тонких упругих оболочек решена в безмоментной постановке в работе [16], в моментной постановке в [19].

Предполагалось, что слои могут проскальзывать друг по другу. Напряжения касательного взаимодействия слоев оболочки принимались в виде

$$q_1^k = \alpha_k (s_0^{k+1} - s_0^k) (r - r_*). \quad (9)$$

На краю пластины принимались условия упругой заделки

$$T_1^k = c_k (s - s_0^k) \quad \text{при} \quad r = r_*, \quad (10)$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от вершины купола, функции $s_0^k(s)$, $k = 1, \dots, n$, — дуговые координаты точки s k -го слоя до деформации, n — число слоев, T_1^k — меридиональное усилие в k -м слое, отнесенное к единице длины после деформации. Таким образом, задача сводится к системе $2n + 2$ дифференциальных уравнений относительно неизвестных $T_1^k(s)$, $s_0^k(s)$, $\varphi(s)$, $r(s)$, где r , φ — расстояние до оси вращения и угол между нормалью к оболочке и осью вращения соответственно. Расчеты проводились для двух- и трехслойных пластин при различных параметрах c_k и α_k .

В работе [19] показано появление «точек перегиба», т. е. точек в которых изгибающие моменты меняют знак. Для более мягких и тонких оболочек, а также при увеличении нагрузки точки перегиба смещаются к внешнему краю оболочки. В широком диапазоне изменения параметров c_k и α_k при учете особенностей строения решетчатой пластинки (последний «наружный» слой является более плотным и массивным: $h_N > h_k$ при $k < N$, а также более жестким) получается, что, как и в работе [16], наиболее значительные относительные смещения увеличиваются к краю пластины. Это соответствует тому факту, что «начальные дистрофические изменения в нервных волокнах определяются на уровне заднего края решетчатой пластинки склеры» [18].

В ряде случаев при сильном увеличении внутриглазного давления по краю РП могут образовываться складки и возникать отеки [18]. Большие прогибы круглой пластины сопровождаются появлением в окрестности края пластины сжимающих напряжений, что создает предпосылки для перехода пластины в несимметричное состояние и может быть одним из возможных объяснений «отеков и складок». Впервые вопрос о существовании несимметричных решений у симметрично нагруженной круглой пластины был рассмотрен Пановым Д. Ю. и Феодосьевым В. И. в работе [27]. Методом Галеркина для больших прогибов пластины, нагруженной постоянным давлением, авторы получили некоторое решение, соответствующее несимметричным формам равновесия. Позже Морозов Н. Ф. (1961) строго доказал существование несимметричного решения в этом случае, а единственность такого решения была доказана Pieschowski (1969). В работе Cheo L. S., Reiss E. L. [43] для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к несесимметричной. Величина критической нагрузки, полученная Cheo и Reiss, почти в 3 раза больше нагрузки, определенной Пановым и Феодосьевым. Формы потери устойчивости также отличаются: по краю пластины образуется 14 ([43]) и 8 ([27]) волн соответственно. Как отмечается в [43], ошибочные результаты были получены в [27], так как недостаточно точно было определено докритическое осесимметричное состояние. Влияние неоднородности материала пластины на величину критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к

несоосесимметричной, было рассмотрено в [40, 42]. Следуя [43], решение уравнений, описывающих деформации круглой неоднородной пластины, представлялись в виде

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_m(r) \cos m\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_m(r) \cos m\theta, \quad (11)$$

где функции w_s, F_s описывают докритическое симметричное решение, а функции $w_{ms}(r, \theta) = w_m(r) \cos m\theta, F_{ms}(r, \theta) = F_m(r) \cos m\theta$ — закритическое состояние пластины (m — число волн в окружном направлении после потери устойчивости).

После разделения переменных (11) исходная нелинейная система уравнений распадается на две: нелинейную, для определения симметричного решения $w_s(r), F_s(r)$, и линейную систему уравнений относительно $w_m(r), F_m(r)$, так как функции w_{ms}, F_{ms} полагаются малыми. Для каждого числа волн в окружном направлении m определялись такие значения нагрузки p_m , при которых существуют отличные от нуля функции $w_m(r), F_m(r)$. Критической нагрузкой соответствует $p_{cr} = \min_m p_m$.

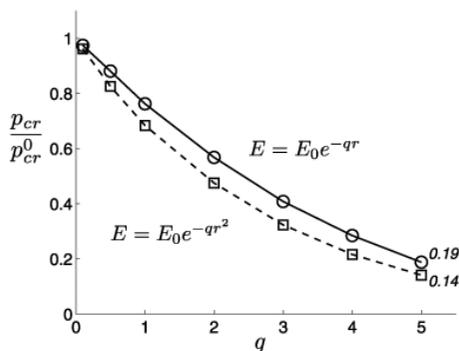


Рис. 6. Изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности пластины q (p_{cr}^0 — критическая нагрузка для однородной пластины).

Проведены расчеты при изменении модуля упругости пластины по различным законам. На рис. 6 представлено изменение критической нагрузки при изменении степени неоднородности пластины в случае, если модули упругости меняются по экспоненциальному закону: $E = E_0^{(1)} e^{-q_1 r}$ и $E = E_0^{(2)} e^{-q_2 r^2}$. Параметры $E_0^{(i)}$ и q_i ($i = 1, 2$) выбирались так, чтобы среднее значения модуля упругости пластины оставалось постоянным. Значения $q = 0$ соответствуют пластине с постоянным модулем упругости.

С ростом неоднородности потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходила при более низкой нагрузке (до 7 раз) и с образованием большего числа волн в окружном направлении, чем для однородной пластины [40].

5. Модели теории аккомодации. До сих пор одной из самых актуальных проблем биомеханики глаза остается механизм аккомодации [17]. Аккомодация это приспособление глаза к ясному видению предметов, находящихся на различных расстояниях. Достигается аккомодация изменением кривизны (геометрической формы) хрусталика глаза (мягкой оболочки, которую в первом приближении можно считать заполненной несжимаемой жидкостью). Единой общепринятой теории аккомодации до сих пор не существует, в связи с чем появляются новые теории, часто противоречащие первой классической теории аккомодации, созданной Гельмгольцем. Согласно

теории Гельмгольца в процессе аккомодации участвует только хрусталик и ресничная мышца, при сокращении этой мышцы происходит увеличение кривизны хрусталика (рис. 7, а). Однако, как отмечается в работе В. В. Волкова [17], сейчас при изучении процесса аккомодации важно принимать во внимание факты, полученные в клинической практике за последние 20–30 лет: «Стало ясно, что нельзя сбрасывать со счетов роль структур, не имеющих прямого отношения к хрусталику (склеры, стекловидного тела, наружных мышц глаза)». Совместно с механиками из Королевского технического университета г. Стокгольма был сделан ряд работ, моделирующих процесс аккомодации методом конечных элементов в пакете ABAQUS с учетом новых данных [45, 46]. Выполненные работы подтвердили основные выводы теории Гельмгольца и опровергли возникшие в конце XX века теории аккомодации Шахара и Фукусаку [29].

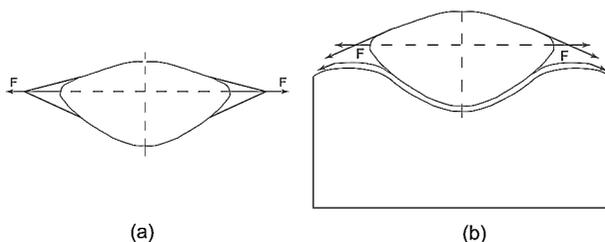


Рис. 7. Теоретические модели аккомодации.

6. Об операциях на роговице глаза. С начала 90-х годов XX столетия для коррекции зрения стали широко пользоваться рефракционными операциями, заключающимися в удалении определенного слоя в центре роговицы глаза, для того, чтобы сделать ее более полой. При этом одним из важнейших вопросов остается изучение свойств роговицы оболочки после таких операций, а также изменения коэффициента запаса прочности роговицы после изменения ее толщины. Работы [23, 32] посвящены изучению напряженно-деформированного состояния сопряженных однородных изотропных и трансверсально-изотропных сферических оболочек, находящихся под действием нормального давления. Проводится сравнение аналитических и численных решений, полученных в прикладном пакете ANSYS. Рассматривается влияние геометрических и механических параметров на прогиб роговицы, проводится оценка изменения коэффициента запаса прочности роговицы после рефракционных операций. Аналитические результаты получались по различным теориям оболочек, при этом они различаются менее, чем на 10 %.

В последнее время чаще стали проводится операции по коррекции не только миопии (близорукости), но и гиперметропии (дальновзоркости). В этом случае меняется толщина роговицы не в центральной зоне, а по кольцу в окрестности центра для того, чтобы уменьшить радиус кривизны роговицы, сделать ее более «выпуклой». Большое количество таких операций проводится в Чебоксарском филиале «МНТК «Микрохирургии глаза» им. акад. С. Н. Федорова». Построена математическая модель [5], позволяющая оценить изменение напряженно-деформированного состояния и показателей внутриглазного давления после рефракционных операций по коррекции гиперметропии.

7. Математические модели тонометрии. В 1884 г. А. Н. Маклаков создал тонометр, положивший начало развитию аппланационной тонометрии. При аппланационной тонометрии глаз деформируется грузом с плоским основанием, в результате

чего образуется «кружок сплющивания, или ашпланаии». В тонометре Маклакова использовались грузы весом 5 или 10 граммов. Измерение ВГД производится по величине деформации при одинаковой силе давления на глаз. В 1954 г. Г. Гольдман изобрел тонометр, который быстро стал международным стандартом. При измерении ВГД по Гольдману создается небольшая зона контакта (диаметр зоны сплющивания составлял 3.06 мм), и о величине ВГД судят по силе, которая требуется, чтобы сделать плоской эту часть роговицы. При такой малой зоне контакта предполагалось, что влияние сил упругости роговицы очень мало, и тогда можно считать, что сила, вызывающая сплющивание роговицы, деленная на площадь контакта, будет равна давлению внутри мягкой оболочки. Диаметр ашпланаии 3.06 мм был выбран в связи с тем, что он обеспечивает соотношение, когда внешнее давление на роговицу в 1.0 г соответствует внутриглазному давлению в 10 мм рт. ст. Калибровка всех тонометров была основана на экспериментальных данных, то есть на «средних» показателях. Диаметр глазного яблока человека действительно варьируется в очень малых пределах и в среднем равен 24 мм. Толщина роговицы переменна, но в центральной зоне минимальна и в среднем равна 0.52 мм. Однако в конце XX века появились приборы, которые позволяют при обследовании пациента точнее определить геометрические параметры роговицы, и, как следствие, появилось много работ, обсуждающих чувствительность показателей тонометра Гольдмана, считавшегося одним из самых точных тонометров, к толщине роговицы в центральной зоне. Особенно сильно эта зависимость проявляется после операций по коррекции зрения, так как при этих операциях существенно меняются толщина и кривизна роговицы. В работах офтальмологов имеются результаты определения уровня внутриглазного давления с использованием различных методик измерения после различных рефракционных операций и отмечены значительные расхождения значений ВГД, полученных различными тонометрами на одном и том же глазу (до 12 мм рт. ст.).

Как отмечено в работе известного офтальмолога С. Ю. Кальфа еще в 1928 г. [21], «если мы обратимся к методике исследования ВГД, то мы должны признать, что наши тонометрические определения не столько дают нам заключение о внутриглазном давлении, сколько о реакции глазных оболочек на приложение к глазу тонометра».

Роговица глаза близка к мягкой оболочке (т. е. к оболочке, не сопротивляющейся изгибу). Известно, что модули упругости и склеры и роговицы в тангенциальном направлении на два порядка больше модуля упругости в направлении толщины оболочки [20]. При измерении ВГД ашпланаационными методами различают тонометрическое давление $p_t = P/S$ (P — вес, прилагаемого груза, S — площадь зоны контакта) и истинное давление p_0 , т. е. давление до нагружения тонометром.

В настоящее время истинное внутриглазное давление при использовании тонометра Маклакова определяют с помощью специальных таблиц, в основе которых для определения внутриглазного давления лежат эмпирические формулы, связывающие величину изменения внутриглазного давления $p_t - p_0$ при нагружении глаза тонометром и объем ΔV сегмента роговицы, основание которого равно кругу, совпадающему с зоной контакта тонометра и роговицы. Объем ΔV называют объемом смещенной жидкости. Никакие аналитические модели при этом не рассматриваются.

Наши первые модели ашпланаационной тонометрии представлены в работах [12, 33]. Глаз рассматривался как две сопряженные оболочки с разными свойствами — роговица и склера (рис. 8).

Предполагалось, что склера и роговица имеют форму сферических сегментов разного радиуса. Проводился анализ влияния упругих и геометрических свойств скле-

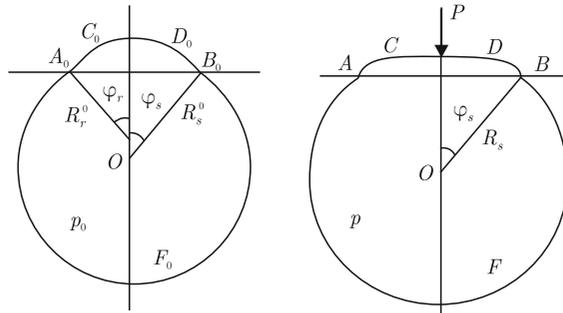


Рис. 8. Модель двух сопряженных сферических сегментов.

ры и роговицы на изменение давления в глазу при его нагружении. Предполагалось, что глаз до нагружения заполнен несжимаемой жидкостью с давлением p_0 . Роговица, которая при нагружении испытывает большие деформации, предполагалась безмоментной мягкой оболочкой. (Известно, что модуль упругости роговицы E_r в несколько раз меньше модуля упругости склеры E_s .) В этом случае по зоне контакта определялось давление внутри нагруженной оболочки p ($p = p_t = P/S$). Предполагалось также, что линия действия приложенной к оболочке внешней силы (веса груза) проходит через центры обоих сферических сегментов, и что в результате действия груза склера деформируется так, что угол φ_s , под которым из центра склеры видна линия контакта, остается неизменным, а сферический сегмент, моделирующий склеру, остается сферическим сегментом, но с измененным радиусом — R_s . Деформация роговицы описывалась нелинейными уравнениями. Полагалось, что уменьшение объема ΔV под сегментом $ACDB$ в результате действия груза,

$$\Delta V = \pi \int_0^{s_0} (r_0^2 \sin \varphi_0 - r^2 \lambda_1 \sin \varphi) ds_0,$$

компенсируется растяжением склеры:

$$\Delta V = \Lambda(p - p_0), \quad \Lambda = \frac{3(1 - \nu_s)R_s^0 V_s}{2E_s h_s}.$$

Здесь основная переменная s_0 — длина дуги образующей оболочки в ненагруженном состоянии, отсчитываемая от оси симметрии; $r' = \lambda_1$; r , φ — расстояние до оси симметрии и угол между нормалью к оболочке и осью симметрии; Λ — податливость оболочки при повышении давления. На основе расчетов, проведенных в [12] для многих параметров, отмечается, что используемая на практике связь между истинным внутриглазным давлением и диаметром плоской части области деформации роговицы глаза при измерении по методу Маклакова удовлетворительно описывается решениями модельных задач. Связь $p_0 = f(d)$ слабо зависит от упругих свойств оболочек глаза, однако утверждение о том, что изменение давления внутри оболочки при ее нагружении совпадает с изменением давления в той же оболочке после введения в нее дополнительного объема жидкости, равного количеству «смещенной жидкости», не согласуется с решениями модельных задач. Результаты расчетов показали также, что на истинное значение ВГД оказывают влияние параметры не только роговицы, но и склеры.

Известно, что у людей с миопией (близорукостью) и гиперметропией (дальнозоркостью) глаз имеет форму эллипсоида, полуоси которого могут существенно отличаться. Причем у людей с миопией длина «передне-задней оси» и объем глаза больше, чем у людей с нормальным зрением и у людей с гиперметропией. В связи с этим в работе [15], продолжая исследования [12], также обсуждалась математическая модель измерения ВГД по методу Маклакова, но роговица и склера моделировались сегментом эллипсоидальной оболочки. Если принять, что объем эллипсоидального сегмента с полуосями a и b равен объему сферического сегмента радиуса R_s , то можно получить зависимость истинного ВГД от соотношения полуосей эллипсоидального сегмента.

Расчеты, проведенные при различных параметрах, показали, что одинаковой зоне контакта груза и роговицы в дальнозорких глазах (сплюснутый эллипсоид) соответствует несколько большее ВГД, чем в глазах с нормальным зрением, в близоруких глазах (вытянутый эллипсоид) истинное значение ВГД незначительно (меньше, чем на 1 мм рт. ст.) ниже, чем в глазах с нормальным зрением. Однако, если учесть, что у людей с миопией объем глаза обычно больше, чем у людей с нормальным зрением и у людей с гиперметропией, то можно получить зависимость, которая хорошо согласуется с клиническими данными. Таким образом, в зоне реального внутриглазного давления ($p = 14\text{--}20$ мм рт. ст.) модель сопряженных оболочек хорошо описывает зависимость показателей ВГД, полученных методом Маклакова, от объема глаза.

Как уже отмечалось, при апланационной тонометрии измерение ВГД может производиться по величине деформации при заданном грузе (по методу Маклакова) или по величине давления на глаз при одной и той же зоне контакта (по методу Гольдмана). С математической точки зрения это прямая и обратная задачи при одной и той же механической модели. Описанная выше и подробно представленная в работах [12] модель сопряженных оболочек может быть использована и для описания тонометра Гольдмана. Однако и в этом случае, так как роговица рассматривалась как мягкая оболочка, результаты расчетов говорят о том, что показатели ВГД также должны быть не чувствительны к толщине роговицы, но это не соответствует данным офтальмологов.

В настоящее время во многих работах, например [2], обсуждается чувствительность показателей тонометра Гольдмана к толщине роговицы в центральной зоне. С учетом данных [2] в работе [11] проведен сравнительный анализ показателей ВГД, полученных на одних и тех же глазах разными методами. Результаты показали, что данные ВГД, полученные методом Маклакова, существенно менее чувствительны к значению толщины роговицы, чем данные, полученные тонометром Гольдмана.

Роговица, как и склера, близка к мягкой оболочке, но упругими свойствами обладает и при изгибе. По данным [20], и склера, и роговица близки к трансверсально-изотропным оболочкам, у которых модуль упругости в направлении толщины оболочки существенно меньше тангенциального модуля. В работах [11, 13] представлены конечно-элементные модели задачи, выполненные в пакете ANSYS (v. 9.0). Упругая система роговица — склера представляла собой сопряжение двух сферических оболочек с разными диаметрами и разными упругими свойствами. Расчеты показали, что возмущение, вносимое в упругую систему (роговица — склера) тонометром Гольдмана, локализовано вблизи области контакта и на стыке роговицы со склерой уже достаточно мало, т. е. в этом случае деформирование роговицы в основном зависит от упругих свойств и геометрии роговицы. Поэтому без потери точности система роговица — склера в ряде работ заменена трансверсально-изотропной сферической обо-

лочкой постоянной толщины, имеющей радиус роговицы. Однако при моделировании измерения ВГД тонометром Маклакова, особенно грузом 10 г, зона контакта оказывается значительно большей, и оболочка склеры может оказывать существенное влияние на процесс деформирования. В [11, 13] корнеосклеральная оболочка моделируется сопряженными оболочками. Задача решалась в предположении осевой симметрии.

Расчеты показали, что чем меньше зона контакта груза и оболочки (за счет величины груза или внутреннего давления), тем больше доля усилий, идущих на изгибные деформации [13]. Толщина роговицы существенно влияет именно на изгибные деформации оболочки. Показатели ВГД при измерении тонометром Гольдмана существенно более чувствительны к изменению толщины роговицы, чем показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова, так как при измерении ВГД тонометром Гольдмана диаметр зоны контакта существенно меньше, диаметра зоны контакта при измерениях тонометром Маклакова (5 и 10 г) при тех же значениях ВГД. По той же причине (размера зоны контакта) влияние толщины роговицы на показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова весом 5 г больше, чем на показатели ВГД при измерении тонометром весом 10 г. Это подтвердили и клинические данные [11].

Результаты расчетов при разных модулях упругости показали, что на деформации оболочек, а значит, и на показатели ВГД наиболее существенное влияние оказывает модуль сдвига в плоскости, перпендикулярной к поверхности, а этот модуль в трансверсально-изотропной оболочке не зависит от тангенциального модуля упругости. Для роговицы, состоящей из нескольких слоев, этот модуль характеризует связь этих слоев, и известно только, что этот модуль имеет малое значение.

В работе [22] построены модели апланационной тонометрии (тонометр Маклакова и Гольдмана) с учетом многослойности роговицы. Сравнение результатов, полученных при моделировании апланационных методов тонометрии для многослойной роговицы, с результатами, полученными тем же методом для однородной роговицы, но с осредненными значениями упругих параметров составляющих ее слоев, показало, что зона контакта в первом случае больше, а следовательно, величина истинного внутриглазного давления меньше.

Известны несколько разновидностей операций по коррекции зрения, в число которых входят фоторефракционная кератэктомия (PRK) и лазерный кератомилез (LASIK). В обоих случаях используется один и тот же эксимерный лазер, но техники операции существенно различаются. При PRK воздействию лазерного луча подвергается наружная поверхность роговицы. При операции LASIK передние слои роговицы после специального разреза приподнимаются, при этом обнажаются более глубокие слои, которые и моделируются эксимерным лазерным лучом. В результате такого воздействия образуется еще один дополнительный слой.

Модель многослойной оболочки позволила объяснить клинические данные [10], показывающие, что после рефракционных операций происходит снижение показателей внутриглазного давления, измеренных тонометрами Гольдмана и Маклакова, при этом после операции LASIK наблюдаются более низкие показатели внутриглазного давления, чем после операции PRK при одинаковом изменении толщины и кривизны роговицы, что может быть объяснено появлением дополнительного слоя, возникающего при операциях LASIK.

В работе ряда офтальмологов отмечается, что тонометр Маклакова является менее чувствительным к толщине, но если роговица является «слишком плоской», т. е. радиус кривизны становится достаточно большой, то тонометр Маклакова может давать заниженные показатели ВГД. В работе [31] рассматривалась задача о напряжен-

но-деформированном состоянии и потере устойчивости трансверсально-изотропного сегмента переменной толщины, находящегося под действием внутреннего давления и груза с плоским основанием. Результаты расчетов при параметрах близким к параметрам роговицы показали, что при больших радиусах кривизны возможно нарушение контакта груза и оболочки в центре зоны контакта, и, таким образом, увеличение внешнего радиуса контакта, что и приводит к заниженным показателям ВГД.

8. О зависимости объем–давление для глазного яблока (изменение ВГД при введении инъекций в стекловидное тело). Одним из современных способов лечения некоторых глазных заболеваний является инъекция — введение небольшой (до 0,2 мл) дозы лечебного препарата в стекловидное тело. За счет кратковременного увеличения внутреннего объема глазного яблока при введении инъекций в первый момент происходит резкое увеличение внутриглазного давления (ВГД). Даже кратковременное увеличение ВГД выше определенного уровня может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и в диске зрительного нерва, поэтому важно в каждом конкретном случае оценить возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции и риск для отдельного пациента, а также, возможно, на основе этих данных рекомендовать уменьшенную дозу препарата для отдельных больных. С механической точки зрения это задача определения изменения внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости. В работах [7, 44] в рамках трехмерной теории упругости построено решение задачи Ламе о прогибе трансверсально-изотропного сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 под действием внутреннего давления p . В этом случае уравнение равновесия трансверсально-изотропной оболочки имеет вид

$$\frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{du_\rho}{d\rho} + \frac{2E(\nu' - 1)}{E'(1 - \nu)} \frac{u_\rho}{\rho^2} = 0.$$

Здесь E , E' — соответственно модули Юнга при растяжении — сжатии в поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней; ν и ν' — коэффициенты Пуассона. Решение этого уравнения имеет вид

$$u_\rho = \frac{C_1}{\rho^{m+1}} + C_2 u_\rho^m, \quad m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4b}}{2}, \quad b = \frac{2E(\nu' - 1)}{E'(1 - \nu)}.$$

(Отметим, что в изотропном случае $m = 1$, так как $E = E'$, $\nu' = \nu$ и $b = 2$. Решение совпадает с известным классическим.) Константы C_i определяются из условий на поверхности сферы. На основе полученного решения определено изменение внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема такой же жидкости. Модуль упругости склеры в направлении ее толщины существенно меньше модуля упругости в тангенциальном направлении. Для такой оболочки расчеты по различным теориям оболочек, полагающим толщину оболочки неизменной, могут привести к результатам, которые не согласуются с клиническими данными. Построенная модель позволяет для глаз, имеющих форму, близкую к сферической, адекватно оценить изменение внутриглазного давления при введении в стекловидное тело глаза небольшой дозы лечебного препарата. Полученное аналитическое решение позволяет по соотношению для нормального перемещения получить изменение толщины слоя склеры под действием давления p :

$$\Delta h = u_\rho(R_2, p) - u_\rho(R_1, p).$$

Изменение толщины склеральной оболочки при увеличении ВГД, как один из результатов представленного моделирования, согласуется с имеющимися клиническими данными [44], а также с данными о том, что при глаукоме, заболевании, сопровождающемся, как правило, повышенным уровнем ВГД, также наблюдается уменьшение толщины склеры.

Решение более общей задачи об изменении внутреннего давления при изменении внутреннего объема оболочки эллипсоидальной формы позволит оценивать ВГД после инъекций в дальновзорных и близоруких глазах. Известно, что зависимость объем—давление очень чувствительна к начальной форме. На рис. 9, а представлено относительное изменение объема изотропных эллипсоидальных оболочек, имеющих первоначально одинаковый объем, но разные отношения вертикального и горизонтального диаметра оболочки k при нагружении внутриглазным давлением 45 мм рт. ст. (Расчеты проведены при $R_0 = 12$ мм, $E = 14.3$ МПа, $h = 0.5$ мм [6]). На рис. 9, б для тех же оболочек представлено изменение давления при изменении объема на 0.1 мл (введение инъекции). Видно, что форма оболочки существенно влияет на отношение $\Delta P/\Delta V$. Максимальное значение это отношение принимает для сферической оболочки.

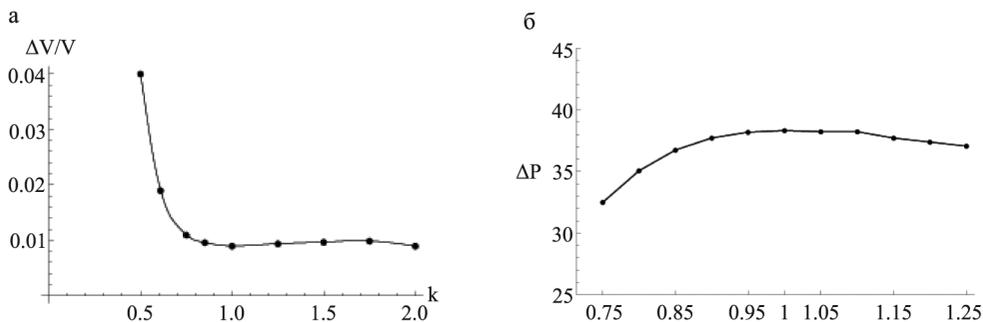


Рис. 9. Относительное изменение объема изотропных эллипсоидальных оболочек (а) и изменение давлений ΔP при изменении объема на 0.1 мл (б).

Сравнение точного решения, полученного в рамках трехмерной теории упругости, с решениями на основе теории анизотропных оболочек позволяет оценить, насколько точно теории оболочек могут описывать решение задачи, и их применимость для оболочек более сложной формы.

Будем считать, что трансверсально-изотропный слой является тонким, т. е. относительная толщина оболочки $\alpha = h/R$ является малой величиной. Здесь $h = R_2 - R_1$ — толщина слоя (оболочки), $R = (R_1 + R_2)/2$ — радиус срединной поверхности слоя. Тогда по классической теории оболочек прогиб сферической оболочки под действием внутреннего давления имеет вид

$$u^{kl} = p \frac{(1 - \nu)R^2}{2Eh},$$

(как и раньше E — тангенциальный модуль упругости в поверхности изотропии). Для трансверсально-изотропного слоя первые два члена асимптотического разложения функции прогиба срединной поверхности, полученной по трехмерной теории [7], в безразмерном виде дадут соотношение

$$\frac{u^{3D}}{u^{kl}} = 1 - \alpha(1 - \nu^*) - \alpha^2 \frac{3\nu' - \nu^* - 11\nu^*\nu'}{12\nu'}$$

Здесь

$$\nu^* = \frac{E}{E'} \frac{\nu'}{1 - \nu'}, \quad E^* = \frac{E'}{1 - 2\nu'\nu^*},$$

E' — модуль Юнга при растяжении—сжатии в направлении, перпендикулярном плоскости изотропии.

Нормальные напряжения в срединной поверхности слоя равны

$$\frac{\sigma_{zz}^{3D}}{p} = -\frac{1}{2} \left(1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{E}{E'} \frac{1 - \nu'}{1 - \nu} - 1 \right) \right).$$

Уточненная теория анизотропных пластин и оболочек, представленная в монографии В. А. Родионовой, Б. Ф. Титаева, К. Ф. Черныха [28], позволяет при построении модели деформации анизотропных оболочек учитывать не только поперечные сдвиги, поперечные нормальные напряжения, повороты волокон, но и изменения их длины в процессе деформации.

Безразмерные соотношения для нормального прогиба и нормальных напряжений, полученные по итерационной теории РТЧ, имеют вид

$$\frac{u^{RTCh}}{u^{kl}} = 1 - \alpha(1 - \nu^*) - \frac{\alpha^2}{12} \left(3 - 12\nu^* - 2(\nu^*)^2 - \frac{6E_2}{5(1 - \nu)E^*} \right),$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{RTCh}}{p} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 \right).$$

Безразмерные соотношения для нормального прогиба и нормальных напряжений, полученные по теории оболочек средней толщины Палия [26], имеют вид

$$\frac{u^P}{u^{kl}} = 1 - \alpha(1 - \nu^*), \quad \frac{\sigma_{zz}^P}{p} = -\frac{1}{2} \left(1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \right).$$

Таким образом, обе теории оболочек, учитывающие изменение толщины оболочки при деформации, позволяют построить для прогиба первые два члена асимптотического разложения точного решения при малых значениях $\alpha = h/R$.

Первые два члена соотношений, описывающих нормальные (также и тангенциальные) напряжения в фиброзной оболочке, полученные по теории Палия, также совпадают с точным решением. Результаты, получающиеся для нормальных напряжений по теории РТЧ, отличаются от точного решения уже во втором члене, т. е. в данной задаче для оценки напряжений более точные результаты получаются по теории Палия.

9. Заключение. В приведенном обзоре работ представлена часть исследований, выполненных с приложением теории оболочек и пластин к задачам офтальмологии. Можно отметить, что наряду с этим проводились исследования аберрометрических показателей; совместно с сотрудниками лаборатории физиологии зрения (института физиологии им. Павлова) проводились исследования скорости движения глаз в зависимости от разных тестов, выполненных на системе «Jazz Novo Standard» и др.

В результате многолетней работы с офтальмологами построен ряд интересных механических моделей, которые помогли объяснить некоторые наблюдаемые явления, но эти модели иногда помогали получить новые результаты в механике деформируемого тела, например, решить задачу об устойчивости осесимметричной формы

равновесия кольцевых неоднородных ортотропных пластин, находящихся под действием нормального давления, задачу об устойчивости сегмента ортотропной оболочки, находящегося под действием нормального внутреннего давления и приложенного груза с плоским основанием, решить задачи о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев, находящихся под действием внутреннего и внешнего давлений [4]. Сравнение этих решений с решениями, получающимися по неклассическим теориям оболочек, позволили оценить точность некоторых теорий.

Мы благодарим офтальмолога Военно-медицинской академии В. В. Волкова, офтальмологов МНТК «Микрохирургия глаза» Л. И. Балашевича, А. Б. Качанова, С. А. Никулина, ведущего научного сотрудника института им. Гельмгольца Е. Н. Иомдину за сотрудничество.

Литература

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М., 1967. 226 с.
2. Балашевич Л. И., Качанов А. Б., Никулин С. А., Головатенко С. П., Бауэр С. М., Зимин Б. А. Влияние толщины роговицы на пневмотонометрические показатели внутриглазного давления // Офтальмохирургия. 2005. № 1. С. 27–29.
3. Бауэр С. М. Осесимметричные деформации неоднородных трансверсально-изотропных круглых пластин // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2002. № 3. С. 65–68.
4. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев под действием нормального давления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2011. № 3. С. 86–93.
5. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Ермаков А. М., Качанов А. Б., Федотова Л. А. Изменение напряженно-деформированного состояния роговицы и показателей вгд после лазерной коррекции гиперметропии // V Всероссийский общенацион. офтальмологический форум. Сб. научных трудов. 2013. Т. 1. С. 191–194.
6. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Титяев А. С. О зависимости объем-давление для глазного яблока // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2010. Т. 4. С. 106–109.
7. Бауэр С. М., Замураев Л. А., Котляр К. Е. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики. 2006. Т. 2. С. 43–49.
8. Бауэр С. М., Зимин Б. А., Волков В. В., Качанов А. Б. К построению биомеханической модели отслойки сосудистой оболочки глаза // Прикладная механика. Сб. научных трудов. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 1995. Вып. 9. С. 149–155.
9. Бауэр С. М., Зимин Б. А., Миронов А. Н., Бегун П. И., Качанов А. Б. Построение модели глаза при наложении циркулярного шва // Повреждение органа зрения у детей. Сб. трудов Педиатрического медицинского института. СПб., 1991. С. 57–64.
10. Бауэр С. М., Карамшина Л. А., Качанов А. Б. Механические модели измерения внутриглазного давления тонометрами Маклакова и Гольдмана после операций по коррекции зрения // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16. № 3. С. 25–31.
11. Бауэр С. М., Качанов А. Б., Семенов Б. Н., Слесорайтите Е. О влиянии толщины роговицы на показатели внутриглазного давления при измерении ВГД аппланационными методами // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца. 2007. С. 119–124.
12. Бауэр С. М., Любимов Г. А., Товстик П. Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 1. С. 24–39.
13. Бауэр С. М. Об аппланационных методах измерения внутриглазного давления // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды», 2006–2007 гг. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2007. С. 84–99.
14. Бауэр С. М., Миронов А. Н. Контакт сферической оболочки с упругим кольцом // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2007. № 3. С. 111–114.
15. Бауэр С. М., Титяев А. С. О математической модели оценки внутриглазного давления по методу Маклакова // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2008. № 4. С. 98–101.
16. Бауэр С. М., Товстик П. Е., Зимин Б. А. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2000. 92 с.

17. Волков В. В. Актуальные и, по-видимому, наиболее перспективные направления в изучении биомеханики функционирования органа зрения в нормальном и патологическом состояниях // Биомеханика глаза. Сб. трудов конференции. М.: Ин-т глазных болезней им. Гельмгольца. 2001. С. 3–4.
18. Волков В. В. // Глаукома при псевдонормальном давлении. Руководство для врачей. М.: Медицина, 2001.
19. Золотухина (Карамшина) Л. А. О деформации многослойной решетчатой пластинки диска зрительного нерва // Российский журнал биомеханики. № 4 (42). 2008. С. 40–46.
20. Иомдина Е. Н. Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция: автореф. дис. ... д-ра. М., 2000. 32 с.
21. Кальфа С. Ю. Эластометрия глаза // Русский офтальмологический журнал. 1928. Т. 8. № 2. С. 250–262.
22. Карамшина Л. А. Механические модели апланационной тонометрии с учетом многослойности роговицы // Российский журнал биомеханики. 2011. № 3. С. 37–44.
23. Краковская Е. В. О деформации составной сферической оболочки под действием внутреннего давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. № 2. С. 129–132.
24. Миронов А. Н. Осесимметричная контактная задача для неполой сферической оболочки // Прикладная механика. Сб. научных трудов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. Вып. 10. С. 136–140.
25. Мишина Э. Н. К расчету напряженно-деформированного состояния оболочки глаза при опоясывающей нагрузке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1995. № 2. С. 68–72.
26. Палий О. М., Спири В. Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. 1977. 386 с.
27. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах // ПММ. Т. XII. 1948. С. 389–406.
28. Родионова В. А., Титаев В. Ф., Черных К. Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996. 280 с.
29. Светлова О. В., Бауэр С. М., Кошиц И. Н. Биомеханические аспекты лечения пресбиопии по способам R. Schahar и H. Fukusaku // Труды международного симпозиума 18–20 декабря 2001. М., 2001. С. 232–233.
30. Bauer S. M. Mechanical models of the development of glaucoma // Advances in Mechanics of Solids In Memory of Prof. E. M. Haseganu. Singapore: 2006. P. 153–178.
31. Bauer S. M., Ermakov A. M. Buckling of a spherical segment under the flat base load // Proceedings of the 2nd International Conference Optimization and Analysis of Structures. 2013. P. 24–27.
32. Bauer S. M., Krakovskaya E. V. On the stress-strain state of the fibrous eye shell after refractive surgery // Proceedings of the 23rd Nordic Seminar on Computational Mechanics. 2010. P. 60–62.
33. Bauer S. M., Lyubimov G. A., Tovstik P. E. On the mathematical simulation of the measuring of the intraocular pressure by Maklavov method // Technische Mechanik. 2004. Vol. 24, N 3. P. 231–235.
34. Bauer S. M., Mironov A. N. On the mathematical simulation of the stress-strain state of the eye shell undergoing the scleral buckling procedure // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 2002, Vol. 4, NS. P. 726–727.
35. Bauer S. M., Romanova A. A., Smirnov A. L. On formulation of the problem on deformation of the lamina cribrosa // Russian Journal of Biomechanics. 2001. Vol. 5, N 3. P. 18–22.
36. Bauer S. M., Tovstik P. E. Buckling of Spherical Shells under Concentrated Load and Internal Pressure // Technische Mechanik. 1998. Vol. 18, N 2. P. 135–139.
37. Bauer S. M., Tovstik P. E., Kachanov A. B. On the stability of the eye shell under encircling band // Technische Mechanik. 1995. Vol. 15, N 3. P. 183–190.
38. Bauer S. M., Voronkova E. B. On the deformation of the lamina cribrosa under intraocular pressure // Russian Journal of Biomechanics. 2001. Vol. 5, N 1. P. 273–82.
39. Bauer S. M., Voronkova E. B. The mechanical response of the lamina cribrosa to the elevated intraocular pressure // Acta of Bioengineering and Biomechanics. 2002. Vol. 4, NS, P. 712–713.
40. Bauer S. M., Voronkova E. B. On the unsymmetrical buckling of the nonuniform orthotropic circular plates // Lecture Notes in Computer Science. Numerical Analysis and its Applications. Springer. 2013. Vol. 8236. P. 198–205.
41. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical theories for bending analysis of orthotropic circular plate // Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. 2014. Vol. 3. P. 57–60.
42. Bauer S. M., Voronkova E. B., Ignateva K. A. Unsymmetric equilibrium states of inhomogeneous circular plates under normal pressure // Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. 2014. Vol. 3. P. 171–174.

43. *Cheo L. S., Reiss E. L.* Unsymmetric wrinkling of circular plates // *Quart. Appl. Math.* 1971. N 31. P. 75–91.
44. *Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I.* Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model // *Acta Ophthalmol. Scand.* 2007. Vol. 85, N 7. P. 777–781.
45. *Ljubimova D. Y., Eriksson A., Bauer S. M.* Numerical study of effect of vitreous support on eye accommodation // *Acta of Bioengineering and Biomechanics.* 2005. Vol. 7, N 2. P. 3–15.
46. *Ljubimova D. Y., Eriksson A., Bauer S. M.* Aspects of eye accommodation evaluated by finite elements // *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2008. Vol. 7, N 2. P. 139–150.
47. *Maier M. M., Bauer S. M., Lanzl I. M., Kotliar K. E.* How Does Optical Refraction Change in Myopia, Emmetropia and Hypermetropia After Encircling Band Procedure? A Biomechanical Model // *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.* 2005. Vol. 46. P. 177.
48. *Mironov A. N., Semenov B. N.* Zum problem der mathematischen modellierung in der ophthalmologie // *Technische Mechanik.* 1996. N 3. P. 245–249.
49. *Voronkova E. B., Bauer S. M., Eriksson A.* Nonclassical theories of shells in application to soft biological tissues // *Advanced Structured Materials. Shell-like Structures.* Springer. 2011. Vol. 15. P. 647–654.

Статья поступила в редакцию 27 марта 2014 г.

Сведения об авторах

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор;
s_bauer@mail.ru

Воронкова Ева Борисовна — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник;
voronkova@mech.kth.se

MODELS OF SHELLS AND PLATES IN THE PROBLEMS OF OPHTHALMOLOGY

Svetlana M. Bauer, Eva B. Voronkova

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;
s_bauer@mail.ru, voronkova@mech.kth.se

In this paper an overview of the mathematical models, developed in collaboration with ophthalmologists is presented. Models for the stress-strain state analyses of the eyeball after retinal detachment surgery, models related to the theory of accommodation of the eye are briefly described. The mathematical model for applanation tonometry and determination of true intraocular pressure (IOP) are discussed. Models that can be used for assessment of the effect of out-of-sphericity of the cornea and the scleral shapes, the central corneal thickness on intraocular pressure readings are displayed.

New results in solid mechanics were obtained while developing biomechanical models of the eye. For example, the problem of stability of spherical shell subjected to concentrated force and inner pressure, the problem of axisymmetric stability of annular plates, the problem of stability of orthotropic spherical segments under inner pressure and load with flatted foundation, the problems of deformation of spherical and cylindrical layers subjected to inner and outer pressure were solved. For pressurized spherical and cylindrical layers, the accuracy of the approximate solutions, obtained with the refined shell theories is analyzed by comparison of these solutions with the 3D exact solutions. Refs 49. Figs 9.

Keywords: mathematical simulation, shell theory, nonclassical models.